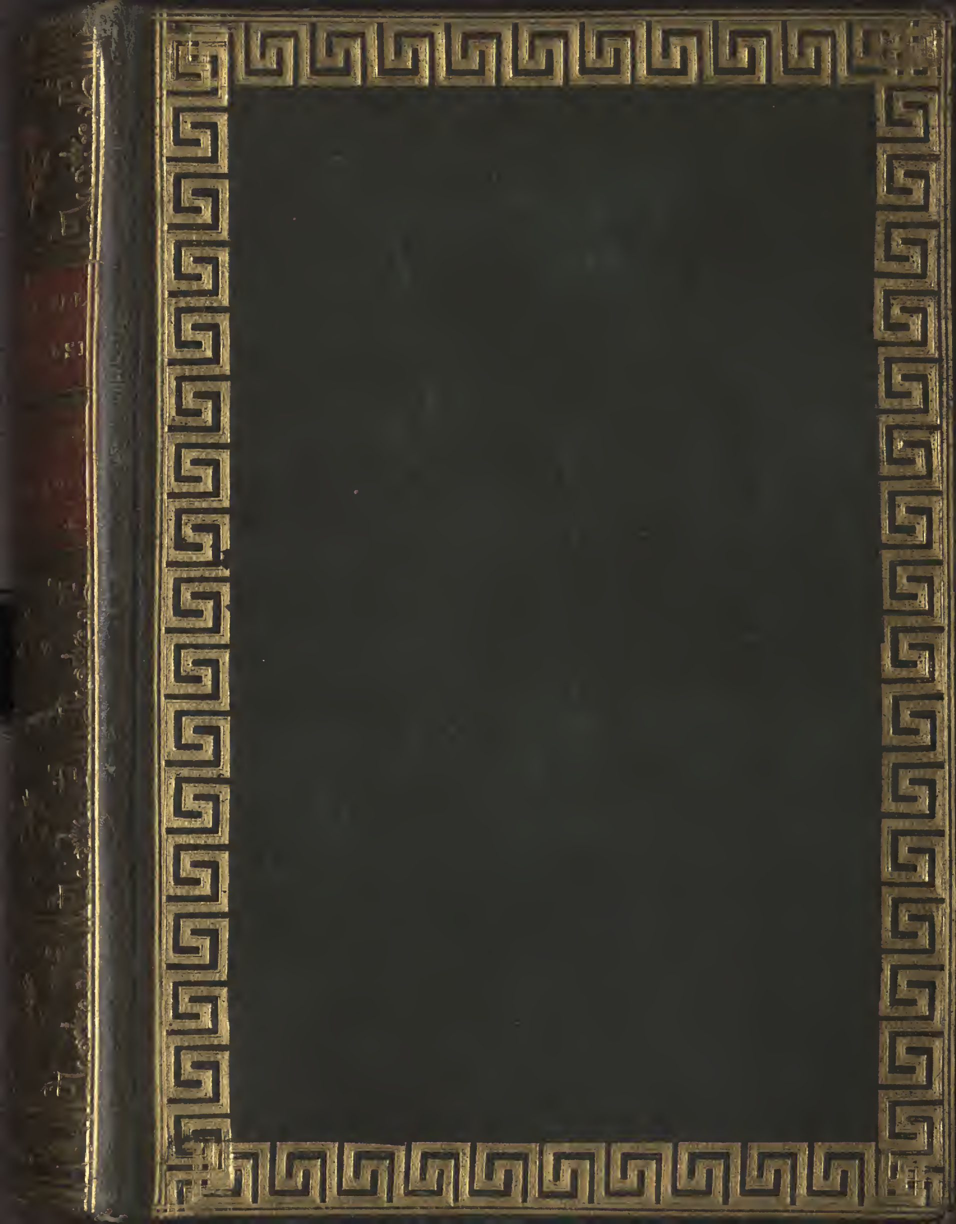
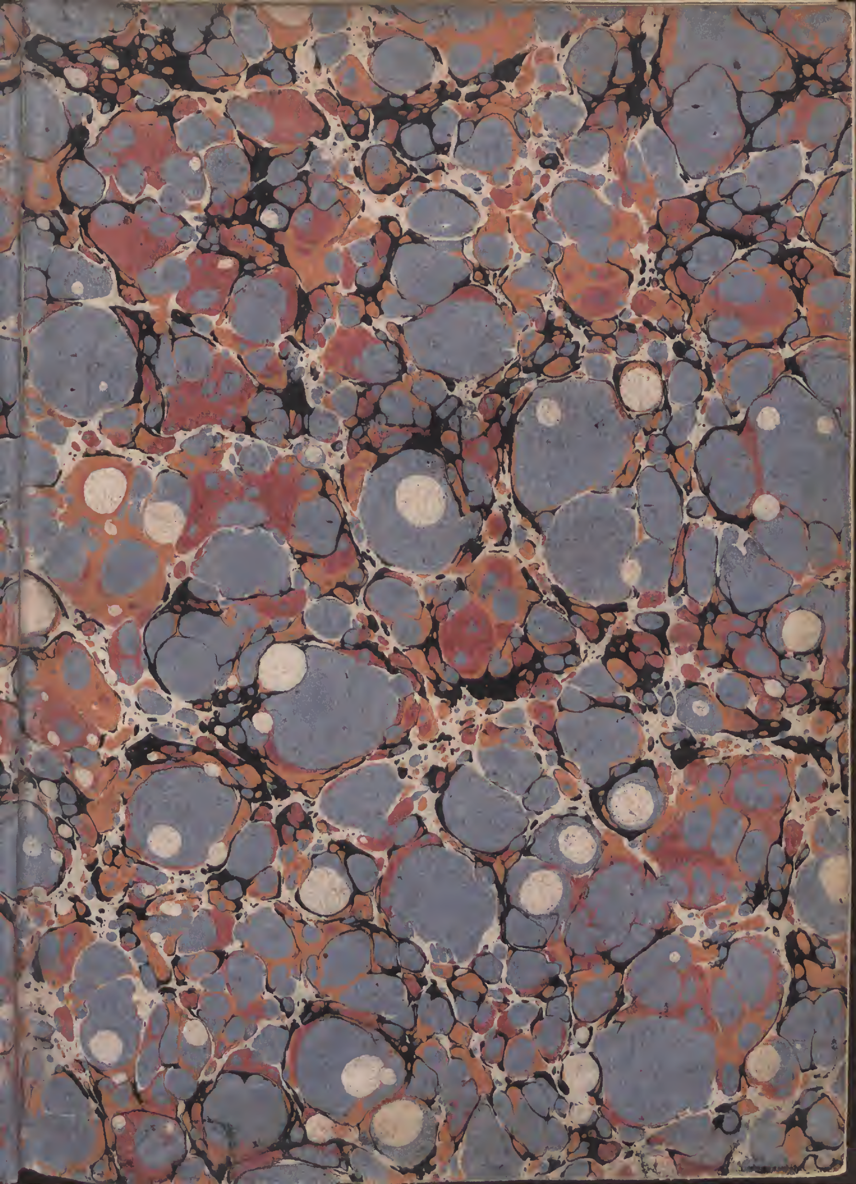



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
a. V. 4.



MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS QUARTUS.

MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

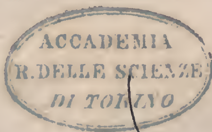
POUR LES ANNÉES 1766—1769.



A TURIN

DE L' IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.



TABLE

Des Mémoires contenus dans ce volume.

AVIS AU LECTEUR.

Monſieur CADET ayant reclamé la découverte de l'encre ſympathique cuivreuſe ſur M. BAUMÉ, dont M. MACQUER parle dans ſon Mémoire ſur la différente diſſolubilité de ſels neutres dans l'eſprit de vin (*Mélanges de la Société Royale Tom. III. pag.* 23 *lign.* 32) la Société Royale, ayant fait examiner les piéces juſtificatives de M. CADET a reconnu le droit d'ancienneté qu' il a ſur M. BAUMÉ, & en même tems celui qui paroit aſſurer la découverte de cette encre à feu M. HELLOT, voyez la première, & principalement la ſeconde partie du Mémoire ſur l'encre ſympatique pag. 245 &c. qu'il a preſenté, & qui a été imprimé dans les Volumes de l'Académie des Sciences de Paris pour l'anné 1737.

N. B. Pour ne pas ſéparer les matières la S. R. a jugés à propos de faire imprimer dans ce volume l'addition au calcul intégral de M. le Marquis de Condorcet du 1771.

MÉMOIRE,

Sur la trompe du Cousin & sur celle du Taon, dans lequel on donne une description nouvelle de plusieurs de leurs parties; avec des remarques sur leur usage, principalement pour la suction; communiqué à M.r le Comte De Saluces.

PAR D. MAURICE ROFFREDI

Abbé de Casanova ordre de Citeaux.

Les naturalistes sont aujourd'hui en grand nombre, & l'avantage de cette branche de la philosophie naturelle est si intimément attaché à l'exactitude de leurs observations, qu'il ne doit pas être permis de frustrer le public du droit qu'il a aux recherches d'un observateur eclairé, & dont le génie perce malgré les soins qu'il peut prendre pour se cacher. J'aurois cru faire un tort à la République des lettres si j'avois négligé de porter l'illustre auteur de cette pièce à la comuniquer, & ayant été trouvée digne de paroître dans ce recueil, je me suis empressé d'en prévenir les lecteurs.

I. La trompe du Cousin ayant été décrite par les plus grands maîtres dans l'art d'observer ces petits corps, qui par leur finesse dérobent à nos yeux les merveilles de leur structure, on pourroit douter si ce ne seroit pas en pure perte que l'on s'occuperoit à observer de nouveau ce même sujet; cependant si l'on fait attention aux descriptions de cet organe que Swammerdam, Leeuwenhoeck & M. de Réaumur nous ont données, on avouera, je pense, qu'elles ne nous éclairent pas assés, pour qu'il soit possible

de ſe former quelque idée de ſa vraie ſtructure. On ne convient ni du nombre des pièces qui le compoſent, ni de la figure préciſe de chacune d' elles; pourra-t-on après cela ſe décider ſur leur véritable arrangement? M. de Réaumur non ſeulement nous fait l' aveu de l' incertitude, où il étoit, ſur le nombre des pièces qui compoſent cet aiguillon, ſur la manière dont elles ſont réunies & ſur leur figure préciſe; mais allant plus loin il nous apprend, *qu' il lui paroit prèſqu' impoſſible de déterminer avec certitude, de voir auſſi diſtinctement qu' il ſeroit à ſouhaiter, toute la compoſition de la trompe du Couſin.* Cela prouve aſſés, ce me ſemble, combien les obſervations, que l'on a faites ſur cet objet, ſont imparfaites, & peut être cela prouve-t-il auſſi qu' il eſt bien plus naturel que l' on ſoit rebuté de faire des nouvelles tentatives pour éclaircir ce point d'hiſtoire naturelle par la difficulté d' y réuſſir, que détourné par l' inutilité même de l' entrepriſe. Cependant la conſéquence que j' ai tirée de ce que je viens de dire n' a point été qu' il fallut déſeſpérer de prendre une connoiſſance un peu plus exacte de cet organe que celle qui nous a été donnée par ces fameux obſervateurs; mais ſeulement qu' apparement il ne devoit pas être poſſible de mieux faire, tant que l' on continueroit à s'en tenir, pour l'obſervation, aux méthodes qu' ils ont ſuivies.

II. Tout le monde connoit ce filet qui part du devant de la tête du Couſin & qui paroit à l' œil ſe terminer par quelque choſe d' allongé & pointu. Depuis que l'on a eu la curioſité de ſavoir ce que c'étoit que la trompe de cet inſecte, on s' eſt apperçu que ce filet n' étoit que l' étui, qui cache & renferme les pièces qui forment, par leur réunion, le vrai aiguillon dont il ſe ſert pour percer les corps, qui peuvent lui fournir une nourriture convenable. Swammerdam ayant obſervé qu' un petit filet à pointe fine débordoit quelques fois l' extrémité de cet étui,

en conclut que cette gaine étoit un fourreau bien complet, sans fente, & percé dans son extrémité, & comme il arrive souvent à l'étui de s'entr'ouvrir & de laisser sortir par une fente une partie de l'aiguillon, au lieu de vérifier par des observations l'existence de cette fente, il prit le parti de supposer que quelque fois les aiguillons rompent d'eux-mêmes leur gaine. Cette méprise de Swammerdam fut relevée par Leeuwenhoeck qui observa que l'étui avoit réellement une fente d'où l'aiguillon, dans des occasions, pouvoit sortir, mais en voulant déterminer sa position, il prétendit qu'elle n'est pas dans la face supérieure, mais le long d'un de ces côtés, prétention qui a fort surpris M. de Réaumur, à qui l'expérience avoit appris, que rien n'étoit plus aisé que de voir qu'elle est au dessus. Ce fameux observateur de l'histoire naturelle des insectes a donc vû & bien prouvé que ce filet qui se présente à nos yeux & qui n'est que l'étui qui renferme l'aiguillon, est fendu dans sa partie supérieure, que les bords de la fente peuvent s'écarter l'un de l'autre, & qu'il arrive quelque fois de voir la pointe de l'aiguillon s'avancer au-delà de l'extrémité du fourreau. C'est ce qui a été très-bien observé par M. de Réaumur; mais que cet étui ne soit pas fendu dans toute sa longueur, qu'il soit terminé par un bouton un peu allongé, & que ce bouton soit percé pour laisser sortir l'aiguillon, ce sont autant de suppositions qu'il doit avoir puisées en partie dans Swammerdam & en partie dans Leeuwenhoeck, sans que l'observation y ait eu beaucoup de part. Leeuwenhoeck ayant conçu cet étui comme un fourreau d'épée qui seroit fendu d'un des côtés qui répond au tranchant de la lame, & n'y aiant reconnu d'autre destination que celle de défendre l'aiguillon dans le tems de son inaction, ne s'interessa pas beaucoup pour la forme par laquelle il doit finir, & s'en étant tenu à une légére apparence il

le fit terminer par un gros bouton allongé! Swammerdam toujours fort réservé à ne rien rapporter comme vrai au-delà de ce qu' il croioit avoir bien vû, n' a point fait terminer la gaine par un bouton, & il s' est borné à dire, que l' on y remarquoit quelques divisions vers son extrémité, & quelques poils sur chaque côté de son sommet; mais comme il croioit que cette gaine étoit un fourreau bien complet, il lui fallut percer le bout pour en laisser sortir le vrai aiguillon: on peut s'appercevoir que M. de Réaumur satisfait d' avoir exactement déterminé la position de la fente, s' en est rapporté pour le reste, aux deux observateurs qui l' avoient précédé, sans s'être occupé à examiner si cet étui est réellement terminé par un bouton percé; structure cependant qui ne paroit pas trop être dans le goût des ouvrages de la nature, quoique depuis que le mémoire de M. de Réaumur a paru les naturalistes se soient plu à nous représenter l' extrémité de la trompe du Cousin, comme le bout d'un bouton, dont l' ouverture fait l' effet d' un anneau.

III. Mes observations m' ont fourni des moyens non seulement de rectifier & de completer celles qui avoient déja été faites sur la partie de la trompe du Cousin, la plus sensible & la plus facile à être maniée, mais celles aussi qui regardent la structure de l'aiguillon & des pièces les plus déliées qui le composent. Avant cependant que d' entrer dans les détails de ces observations, il me faut demander grâce pour ces mêmes détails, qui pourroient bien paroître pencher du côté d'une trop ennuyante précision, aux personnes sur-tout, qui ne s'étant point exercées à observer au microscope, & qui par cela même ignorant le grand désordre que l' on rencontre dans les descriptions d' observations microscopiques, que bien des auteurs nous ont données, pensent que l' on en a dit assez dés que l'on en présente au lecteur les résultats fidélles, sans qu'il

faille le conduire par tous les détours où l'obſervateur a dû paſſer; j'avoue que je ſuis d'un tout autre ſentiment, & je le ſuis d'autant plus, que l'expérience m'a appris combien le progrés des connoiſſances humaines eſt retardé par la méthode de ne donner les précis des obſervations, que pour ainſi dire, en miniature. Quelques moments de réflexion ſur les diſputes interminables qui ſe ſont élevées depuis une vingtaine d'années ſur les réſultats des obſervations microſcopiques des infuſions des ſubſtances animales & végetales, nous porteroient peut-être à avouer, que les trois quarts des auteurs qui ont figuré dans cette diſpute n'auroient pas eu le courage d'embaraſſer le public avec leurs prétendues découvertes, ſi une loi ſacrée leur eut défendu de les publier autrement que par des écrits où les faits auroient été exactement détaillés dans toutes leurs circonſtances. On ne doit pas craindre, ce me ſemble d'être minutieux, lorſque l'on ne dit que ce qui eſt précifement néceſſaire pour mettre un lecteur au fait de vérifier l'obſervation & de la répéter dans toutes ſes circonſtances.

IV. Pour obſerver la trompe du Couſin telle qu'elle ſe montre ordinairement lorſque l'inſecte n'en fait point uſage, je le ſaiſis avec la pincette à reſſort entre le corcelet & le ventre, ayant l'attention que les plans des bras de la pincette ſoient à peu-près paralleles à la face ſupérieure de la trompe: par cette poſition l'on s'aſſure contre les mépriſes où l'on pourroit tomber en croiant d'obſerver le deſſus, quand ce ſera peut être l'un des côtés qu'on préſente au foyer du microſcope; je lui coupe enſuite les ailes, les jambes, & ſur-tout les antennes, afin que rien ne puiſſe ſe trouver entre l'objet & la lentille ou la loupe, qui pour cette obſervation, doit avoir deux à trois lignes de foyer: ſi on ſe place alors contre la lumière du jour, qui doit être vive, & éclairer l'objet par des rayons

qui le traversent, on pourra observer que le dessus de la trompe, à commencer à son articulation avec la tête jusqu' à un tiers environ de sa longueur totale, ne présente que des poils & des petites écailles; mais de-là jusqu' à son extrémité on y voit le long de son milieu une petite ligne de couleur de marron clair qui va se perdre vers l' extrémité de la trompe, où l' on apperçoit une pointe mal terminée & surmontée de quelques poils. Ce sont les mêmes apparences si l' on observe le dessous de la trompe, seulement la petite ligne n' y paroit pas aussi distinctement que lorsqu'on l' observe dans la face supérieure; mais on ne l' apperçoit plus si l' on examine la trompe par ses côtés. Cette observation nous apprend que si la pièce qu' on à commencé à examiner a une fente, elle doit se trouver à une de ses deux faces, savoir à la supérieure ou à l' inférieure, & non pas sur un de ses côtés, ainsi qu' il avoit paru à Leeuwenhoeck.

V. Poursuivant l' examen de l' extérieur de la trompe, on peut observer près de son bout un étranglement qui fait comme une division entre le corps de la trompe, & son extrémité; si l' on observe cette extrémité par le dessus, elle paroit ovale, & finir en pointe; mais observée des deux côtés elle présente sur chacun d'eux un tranchant un peu émoussé; de plus cette petite pièce vue à chacune de ses faces la supérieure, & l'inférieure, occupe plus d' espace dans le champ de la lentille de ce qu' elle n' en prend si on l' observe par les cotés, & par une conséquence nécessaire elle doit avoir plus de diamètre d' un côté à l' autre, que de dessus en dessous. La trompe du Cousin ne se termine donc pas par un bouton, & si l'on vouloit nommer bouton un corps, qui a une figure ovale oblongue, deux tranchants des deux côtés & qui a plus de largeur que de profondeur, du moins seroit-il un bouton d'une tout-autre figure que celle que Leeuwenhoeck & M. de Réaumur nous ont donnée.

VI. Le même Cousin sur lequel on a fait les observations précédentes, peut encore servir pour celles dont je vais parler ; il faut seulement le saisir différemment, savoir par la tête, de sorte qu'elle soit comprimée par la pincette de haut en bas ; mais on doit s'y prendre de façon que, son extrèmité où la trompe s'articule, déborde un peu les bras de la pincette. Pour lors si on présente la trompe, même à lœil nud, par un de ses cotés, il arrivera le plus ordinairement d'observer vers son origine, que quelque chose s'en est élevée, & au moyen de la même lentille dont on s'est déja servi, il sera aisé à reconnoître que cette ligne qu'on avoit apperçue tout le long de la trompe, étoit un filet, qui à présent est sorti en partie, laissant à découvert la cavité où il étoit logé; ce que l'on apperçoit plus complettement en fixant l'observation tout-près de l'endroit où les bords de la fente de l'étui retiennent encore une partie du filet dans sa cavité, car on peut y remarquer une petite élévation des bords & leur rapprochement qui oppose une résistance à la sortie totale du filet. Si ensuite avec quelque pointe qu'on aplique vers l'extrémité de la trompe, on la force de plier en bas l'aiguillon, car à présent on peut appeller de ce nom ce filet qui en est élevé, l'aiguillon, dis-je, sortira entièrement de son étui ; mais comme il ne s'agit pas encore de l'observer, je le coupe près de la tête, & afin qu'il ne trouble pas l'observation de l'étui, que je dois pousser plus loin, il n'y a qu'à l'observer contre la lumière du jour avec la même lentille de deux à trois lignes de foyer pour connoître que sa fente s'étend depuis l'origine de la trompe jusqu'à cet étranglement dont j'ai déja parlé ; mais comme à cet endroit-là l'étui perd sa transparence, on ne sauroit décider si vraiment la fente continue ; seulement on peut s'assurer qu'au delà de l'étranglement il y a une division, car l'observation nous ap-

prend, que le bout de la trompe ne se termine pas en une pointe percée, & qui fasse la fonction d'un anneau, comme on l'a dit dans quelques livres d'histoire naturelle; mais que l'aiguillon se termine au moins par trois pointes bien séparées les unes des autres: cependant je dois remarquer que l'on ne pourra pas toujours réussir dans cette observation, si pour la faire on se sert de cette espéce de Cousins dont la trompe est recouverte par deux pièces oblongues & cylindriques qui ressemblent à des antennes, mais qui sont appliquées aux deux côtes de l'étui de la trompe à laquelle elles servent comme d'un surfourreau. A' la verité en saisissant ce Cousin par la tête, les deux corps cylindriques s'ouvrent, & l'aiguillon peut sortir de son étui, comme on le fait sortir dans les Cousins d'autres espéces, mais néanmoins l'extrèmité de l'étui, peut-être, dépendemment de l'habitude d'être continuellement resserée par les pièces cylindriques, souvent ne s'ouvre pas assez pour laisser voir, sans d'ultérieures préparations, ces pointes que l'on observe aisément dans les espéces différentes.

VII. Il est aisé de comprendre qu'il ne doit pas être impossible de se procurer une connoissance un peu plus complette de la structure de l'étui de la trompe du Cousin que celle que je viens de donner: cet étui a une fente; il est composé d'une matière pliante & flexible en tout sens; on pourroit donc bien l'ouvrir entièrement ou du moins en grande partie, & nous mettre par-là en état de connoître l'arrangement de ses parties, l'étendue de sa fente, la destination de l'étranglement que l'on voit tout-près de son extrémité, & enfin la vraie forme & l'emploi de cette même extremité. Il est vrai pourtant que ce seroit un projet chimérique que celui d'entreprendre de dissequer l'étui en question & d'en examiner les parties l'une après l'autre. La dernière pièce que l'on a nommée

mé un bouton, n' a qu'un neuvième de ligne de longueur, & quelque chose encore moins de largeur, comment donc s' y prendre pour opérer sur de tels atomes? il paroît que Leeuwenhoeck aimoit qu'on pensa qu' il avoit l'art de disséquer la poitrine, le pied & les testicules d' une puce. Ce sont des foiblesses qu'on passe en vue d'un mérite réel; mais ce sont des foiblesses qu' il ne doit pas être permis d' imiter, & le bon sens éxige, à ce qui me paroît, que l' on ne fasse pas mystere de certaines pratiques, qui bien souvent ne sont pas plus difficiles pour l' invention, que pour l'exécution. La méthode, que j'ai suivie pour observer l'objet en question, est à peu-près la même que celle dont se sont servis les observateurs, qui ont employé le microscope, pour connoître la structure des viscères dans les plus petits insectes: on a toujours fait usage de quelque fluide pour en dégager successivement les parties, & apprendre par-là leur arrangement & leur liaison. Si Swammerdam dans ses surprenantes observations a suivi rarement cette méthode, c' est que pour son travail il a voulu choisir des objets, dont la nature lui permettoit d'exercer ce rare talent, qu' il eut en partage pour les plus fines préparations anatomiques.

VIII. Puisque l' étui de la trompe du Cousin est fendu, si l' on en coupe une partie, & qu'on la mette dans une goute de quelque fluide convenable, il devra s' ensuivre, que ce fluide pénetrant dans sa cavité, on l' ouvrira entièrement, si la fente va réellement jusqu' à son extrémité, ou que du moins il en écartera les bords, de façon qu' il sera possible d'observer d'où vient la résistance qui s'oppose à l' entière ouverture de l'étui. Le fluide, que j'ai employé pour faire cette préparation, n' est point de l' eau; l'expérience m'aiant appris qu'elle a une trop grande action sur les fibres délicates de cet organe; mais je me sers d' huile d'olive, qui n' a point assez de force pour les faire

contracter. Le résultat de cette préparation est qu'en effet l'étranglement, dont j'ai déja parlé, oppose une résistance à l'entière ouverture de l'étui; résistance que l'action de l'huile n'a pu surmonter; il a donc fallu trouver le moyen d'augmenter l'action de ce fluide.

IX. J'ai coupé l'étui vers son extrémité, de sorte que la partie enlevée n'avoit qu'environ $\frac{1}{4}$ de ligne de longueur, & pour la saisir, car il n'est pas toujours si aisé de le faire, ayant frotté d'un peu d'huile le bout du doigt, je l'ai fait passer dessus le bras des petits ciseaux, où la loupe m'avoit appris que la pièce avoit coulée, elle quitta les ciseaux & s'attacha à la peau, d'où il me fut facile de l'enlever avec une pointe fine. Ce sont des lames de verre d'Allemagne qui me servent de porte-objet, & c'est sur une de celles-ci, où auparavant j'avois laissé tomber une goute d'huile, que j'ai placé mon petit objet, qui quittant la pointe où il tenoit, s'introduisit dans l'huile. Pour lors prenant par les bords la lame *a* (Pl. 1. Fig. 1.) & la tenant bien horizontalement, après avoir mis sur chacune de ses extrémités un mourceau *b.b.* de papier mince, j'ai appliqué sur celle-ci une seconde lame, me servant de fil ciré *d.d.* pour les arrêter & les unir stablement l'une contre l'autre. Par le moyen de cette préparation, la goute d'huile se comprimant perd sa sphéricité, & en se détalant oblige par son action, les parties du corps infusé à se déployer. Cette façon de préparer un objet est souvent d'un grand avantage pour les observations que l'on doit faire avec le microscope; mais il faut faire attention à sa nature, afin de choisir le papier, que l'on doit mettre entre les deux lames, d'une épaisseur convenable aux différens degrés de compression que des différens objets peuvent exiger. Je dois encore remarquer, que si la goute d'huile *n*, ou de quelqu'autre fluide qu'on aura renfermée entre les lames,

en se répandant par la compression, va toucher au papier, la préparation ne sera plus de service, & il faudra la refaire ; un peu d'expérience apprendra facilement comment on doit s' y prendre pour qu'elle soit bien faite. Au reste un défaut qu'on pourroit reprocher à cette méthode de préparation, est que d' une part la transparence des objets & leur subtilité ne permet le plus souvent à l' observateur d' en voir la figure, que comme si leurs parties étoient dans un même plan, étant fort difficile d' y distinguer le dessus du dessous, les parties élevées de celles qui ont de l' enfoncement, & que d' autre part un objet qui est renfermé entre des verres, ne peut plus être observé de tous ses côtés, comme il faudroit, pour constater la vraie position de ses parties. Je dois avouer que ce défaut est réel ; mais en l' avouant je ferai remarquer qu' il subsiste toujours, de quelque manière que l'on s' y prenne, lorsqu'il s'agit d'observer des objets extrêmement petits, & que ce n' est que par la multiplication des préparations, & par la combinaison de leurs résultats qu'on peut parvenir à s'assurer de la situation réelles des parties par rapport à leur tout.

X. Les détails que je viens de donner, suffisent, à ce qui me paroit, pour mettre au fait les curieux qui voudroient répèter & vérifier les observations que j'ai faites sur la trompe du Cousin ; ainsi je vais supprimer ce qui regarde le manuel des préparations, & je me bornerai à en donner les résultats, si ce n' est dans les cas où la nature des observations exigera que l' on rende compte de la route que l' on a tenue pour y parvenir. Les microscopes dont je me suis servi, sont le simple de Wilson, le double à réflexion de la façon de Cuff, & le microscope solaire ; & le plus souvent j' ai examiné les mêmes pièces avec les trois différents microscopes, mais je me suis servi sur-tout du solaire pour fixer la proportion de toutes les parties de

l'objet, & pour m'affurer de la véritable figure de quelques unes. Je dois prier les perfonnes qui pourroient avoir quelque préjugé contre le microfcope folaire, de faire attention qu'on ne connoit pas encore d'efpéce de microfcope qui n'ait fes défauts particuliers, & qu'au furplus il pourroit fort bien arriver d'imputer à l'inftrument l'effet, peut-être, des mauvaifes pratiques de ceux qui s'en fervent.

XI. Les figures des planches qui appartiennent à la trompe du Coufin, font deffinées fur la même échelle, & l'agrandiffement de leurs diamètres eft de 270 fois : la figure du n.° 11. qui a un demi pied de longueur ne repréfente que $\frac{1}{5}$ de celle de la trompe entière ; donc la longueur réelle étant de $\frac{4}{3}$ de ligne, celle de la portion repréfentée par la figure n.° 11. n'aura dans la réalité que $\frac{4}{15}$ de ligne. Ce qui m'a obligé de donner cette grandeur aux figures, eft qu'on ne fauroit bien comprendre la compofition de la trompe, fi fes parties ne retiennent pas dans les figures les mêmes proportions qu'elles ont en nature, & que d'ailleurs, il y a des traits dans quelques unes de ces pièces, qu'il étoit néceffaire d'exprimer, mais qu'on ne pouvoit relever au jufte fans donner de la grandeur à toute la figure. Du refte comme le but de ce Mémoire n'eft pas de faire une defcription complette de la trompe du Coufin, mais feulement de fuppléer à celles qui ont été données par Leeuwenhoeck & M. de Réaumur, j'ai évité de donner des figures qu'on peut trouver dans leurs ouvrages, & je n'ai parlé ni de fes antennes, ni de fes barbes, ni des écailles qui recouvrent l'étui de fa trompe, que je n'ai pas même fait repréfenter dans les figures pour ne pas les embarraffer.

XII. Ce n'eft pas dans les téguments extérieurs de l'extrémité de la tête du Coufin qu'il faut chercher l'origine de l'étui de fa trompe ; mais c'eft dans fon intérieur qu'

on la trouve à la diſtance d'environ $\frac{1}{4}$ de ligne du bout de la tête. A' cette diſtance on y obſerve vers chacun des deux côtés une eſpéce de nœud qui a la forme de la tête d'un os de couleur de marron clair, d'où part de chaque côté un gros filet de la même couleur, qui d'abord ſe courbe un peu vers l'embas, & va enſuite tout droit juſques près de ſa ſortie à l' extérieur ; mais avant que d'en ſortir il ſe reléve & remonte prenant une petite corbure, & aboutit à un nœud ſemblable à celui d'où le filet a ſon origine. Ces deux filets ſont d'abord beaucoup écartés l' un de l'autre, & à commencer du nœud le plus intérieur juſqu'au ſecond, ils s' avancent paralléle-ment, mais immédiatement au delà du ſecond nœud, & à leur ſortie de la tête du Couſin, ils s' inclinent l' un vers l' autre ; & après s' être quelque peu avancées dans cette direction, ils ſe raprochent tout-a-fait & ſe prolongent ainſi raprochés tout le long de l' étui, juſqu' à ſon étranglement, où ils changent de forme, & par leur expanſion produiſent une eſpèce de cartilage *c. c.* (F. II.) dont la plus grande partie de l' étranglement eſt compoſée. Ce ſont ces deux filets qui forment les bords de la fente de l' étui, & ce ſont ceux-là qui, étant de nature écailleuſe, donnent à toute la pièce une certaine conſiſtance.

XIII. La partie membraneuſe qui fait le corps de l'étui, a des fibres tranſverſales *a. a.* fort viſibles au microſcope, pourvu qu'elle ſoit dépouillée des écailles qui la recouvrent, & empéchent par-là l' obſervateur de les pouvoir appercevoir ; mais il y a de la difficulté à découvrir les fibres longitudinales, celles-cy étant beaucoup plus déliées que les tranſverſales. On peut obſerver dans l' intérieur de l'étui deux vaiſſeaux *b. b.* (F. III.) qui rampent tout le long de ſa membrane, mais que l' on ne peut plus ſuivre au-delà du commencement de ſon étranglement *c. c.* Ces vaiſſeaux ſont à peu-près du même diamètre que les filets qui

forment les bords de l' étui, & comme ils ont auſſi la même opacité, il ſeroit difficile de bien diſtinguer les uns des autres; & ſi ce n'étoit que les premiers ſont tortueux, & que ceux-ci s'avancent en ligne droite, on pourroit douter ſi ces vaiſſeaux ne ſeroient pas des trachées, mais j' en ai vû ſortir de la liqueur, & au ſurplus leur ſtructure ne reſſemble pas à celle que l' on obſerve dans les trachées des inſectes: cependant je dois avouer que je n'ai pu découvrir par le microſcope, que ces vaiſſeaux ayent des ramifications.

XIV. La partie la plus curieuſe & qui paroit mériter le plus d' attention, eſt celle qui commence à l' étranglement de l' étui & en forme l' extrémité. Au moyen de la préparation, dont j'ai parlé plus haut, on peut faire ouvrir cette piéce & en dégager les parties, à la vérité non pas autant qu'on le pourroit ſouhaiter, par l'obſtacle qui s'oppoſe du côté de la ſubſtance cartilagineuſe, dont une partie de l' étranglement eſt compoſée; néanmoius elle s'ouvre aſſez pour nous en laiſſer comprendre la ſtructure, & nous donner la facilité de nous la repréſenter, comme ſi elle étoit entièrement ouverte. Il eſt évident par la Fig. III., que ſi l' étranglement ou le collet cartilagineux *c.c.* ſe préſentoit parfaitement ouvert, nous le verrions ſurmonté d'une eſpéce de membrane découpée par quatre grandes échancrures, qui avec les parties ſaillantes & pointues *d. d. m.* nous la montreroit, pour ainſi dire, comme une main diviſée en cinq doigts: que ſi l'on conçoit les deux bords du collet rapprochés l'un de l'autre juſqu' à ſe toucher, on comprendra aiſément que de chaque côté les deux pièces *d. d.* dans leur état naturel doivent s' appliquer l' une contre l' autre, & même recouvrir la pièce *m.*, donnant par-là l' apparence à l' extrémité de l' étui, comme d' une eſpéce de bouton. La figure III. repréſente les parties de cette extrémité autant écartées qu' il m' a

été poſſible de les voir, & on peut y obſerver que celle du milieu *m.* n'eſt pas ſeulement plus petite & plus courte que celles de côté, mais qu'elle eſt garnie d'une eſpéce d'appendices, qui pourroient bien être des poils gros & courts rangés avec ſymétrie, dont on ne peut méconnoître la deſtination, étant aiſé de comprendre qu'ils doivent ſervir à affermir la pointe de l'aiguillon, lorſqu'il s'y appuye pour pénétrer dans la chair.

XV. Je paſſe maintenant à la deſcription & à l'arrangement des pièces qui compoſent l'aiguillon proprement dit. Pour peu que l'on obſerve des Couſins avec une bonne loupe l'on ne manquera pas de voir quelques fois la pointe fine de l'aiguillon avancée au-de-là du bout de ſon étui; on peut alors ſaiſir avec la pincette la tête du Couſin qu'on doit comprimer œil contre œil & non pas verticalement, car on obligeroit par-là l'aiguillon à reculer. Un obſervateur doit toujours, autant qu'il le pourra, connoître exactement qu'elle eſt la partie de l'objet qu'il préſente au foyer du microſcope, & on le ſaura ſans équivoque dès que l'on connoit la vraie poſition de l'objet par rapport aux bras de la pincette. Pour obſerver la pièce en queſtion, c'eſt-à-dire, le bout de l'aiguillon, je me ſers du microſcope double, monté d'une objective d'environ une ligne de foyer. Le réſultat de l'obſervation eſt, que cette pointe vue ou par le deſſus ou par le deſſous repréſente un cylindre cannelé qui finit par une pointe. (Pl. 2. F. IV.) & dont l'extrémité a ſes deux côtés garnis de dentelures en forme arrondie; mais lorſque c'étoient les côtés mêmes que je préſentois au foyer du microſcope, les dentelures diſparoiſſoient, ou tout-à-fait, ou ſeulement en partie, ſelon que le centre du foyer tomboit plus ou moins à plomb ſur le côté dentellé, d'où il peut arriver, comme il arrive en effet, que la vraie forme des dents ſoit altérée par leur poſition oblique à l'égard de

l'axe de la lentille, & cette déformation sera encore plus grande si l'on en force le feu en approchant l'objet plus qu'il ne faudroit. C'est par quelque cause semblable, qu'il peut-être arrivé aux trois observateurs que j'ai nommés au commencement de ce mémoire, d'avoir cru voir cette dentelure en forme de fer de fleche, ou de crochet, ce qui vraiment ne répond pas à la réalité; c'est sur les aiguillons de *l'abeille*, de la *guepe*, & des *bourdons* qu'on voit cette forme de dentelure; elle convient aussi à quelques pièces de la trompe du *scorpion aquatique*, & à celle de la *tique* des chiens; mais il est certain que les dents de l'aiguillon du Cousin ont une forme arrondie. Au reste je dois avertir que la Figure V. qui représente l'ensemble des pièces de l'aiguillon, est de conséquence pour en bien comprendre la composition. Il s'agit à présent de les débarrasser, d'en connoître le nombre, la forme & leur arrangement; mais si l'on veut y parvenir, il ne faut pas trop se presser en les tourmentant, comme à l'aventure, & sans une méthode raisonnée, qui ait son fondement dans la nature même de l'objet qu'on doit observer.

XVI. Si l'on prend le parti de laisser l'aiguillon attaché à la tête du Cousin & de le frotter contre le porte objet avec une pointe fine, on pourra, il est vrai, en dégager les parties; mais il en arrivera, qu'à peine les pièces seront écartées les unes des autres, qu'elles se courberont, se fronceront & se contourneront en différens sens; & par surcroit d'inconvéniens, elles auront un mouvement presque continu; que si d'après Leeuwenhoeck & M. de Réaumur on le coupe près de la tête, & qu'ensuite on le frotte sur le porte-objet; alors les pièces dégagées n'auront plus ce mouvement incommode pour l'observation, mais elles ne retiendront pas pour cela leur forme naturelle, qui sera toujours altérée par leur froncement. Pour mieux faire sentir cette vérité, je ferai remarquer que

Swam-

Swammerdam, qui a obſervé l'aiguillon ſelon la première méthode, a bien pu s'aſſurer par elle du juſte nombre des pièces qui le compoſent & qu'il à fixé à ſix; mais il ne lui a pas été également poſſible de nous bien inſtruire ſur leur véritable forme & arrangement; & que par la ſeconde méthode Leeuwenoeck & M. de Réaumur, ſans avoir avancé de beaucoup les connoiſſances qu'on avoit déja ſur la forme de ces pièces, en ont abſolument manqué le nombre que le premier de ces obſervateurs n'a porté qu'à quatre, & le ſecond à cinq. *Je crois donc*, dit M. de Réaumur dans ſon Mémoire ſur les Couſins. Tom. IV., *être bien certain que l'aiguillon a une pièce de plus que Leeuwenoeck ne lui en a donné; mais je ne ſçai ſi c'eſt faute d'adreſſe que je ne ſuis pas parvenu à y trouver les ſix pièces de Swammerdam, au moins ce n'a pas été faute de ſoins*„ la difficulté venoit réellement du côté de la préparation.

XVII. Avant donc que de ſéparer les parties qui compoſent l'aiguillon, il m'a paru convenable de débuter par commencer à prendre quelque connoiſſance générale ſur ſa compoſition & ſon arrangement à l'égard de l'étui; ainſi j'ai choiſi la circonſtance où il n'en étoit pas entièrement ſorti, & aiant porté la préparation au microſcope double monté d'une objective d'une ligne de foyer; je l'y ai préſenté comme ſi j'euſſe voulu obſerver le deſſous de l'étui; mais alors j'ai fait tourner les pincettes fort lentement ſur leur axe, juſqu'à ce que j'ai commencé à découvrir la face de l'aiguillon qui regarde l'ouverture de l'étui. Dépendamment de cette poſition de l'objet par rapport au microſcope, on eſt à portée de connoître quelles ſont les parties de l'aiguillon qui doivent occuper le fond de ſon étui; & puiſqu'en comprimant la tête du Couſin avec les pincettes, comme on doit le faire pour cette obſervation, il eſt rare qu'il n'y ait quelques pièces qui

s' en séparent dans une partie de leur longueur. Les observations que l' on fera sur cette préparation pourront nous mettre au fait sur la manière dont nous devons nous y prendre pour bien connoître l' organe dont il s' agit.

XVIII. La Figure II. représente une portion de l' aiguillon qui ne tient plus à l' étui, qu' à peine par son extrémité *g*. On y voit une grande pièce convexe dans sa face supérieure *m. m.* & concave dans l' inférieure *s. n.* dont la grosseur diminue jusqu' à l' extrémité *g.* qui finit en pointe. Il y a deux pièces beaucoup plus petites *r. o.* qui sont sorties en partie de la concavité de la grande pièce, & le vuide *n.* qu' elles ont laissé se rend sensible par la transparence de l'endroit qu'elles ont quitté. Or ces observations suffisent pour nous faire comprendre que la grande pièce est de toutes, celle qu' il est le plus important de bien connoître pour parvenir à la découverte de la structure de l'aiguillon.

XIX. J' ai nommé la *grande pièce* celle qui dans l'aiguillon est en effet la plus grande & la plus apparente, & la cause de cette dénomination est l' embarras où je suis de trouver un nom convenable à la nature & aux fonctions de cette partie. Swammerdam l'a appellée la *gaine intérieure* ou *canule* qu'il a dit être un fourreau bien complet, ce qui, à la vérité, ne répond aucunement à la nature de cette partie. Leeuwenoeck l'a nommée tantôt *l'aiguillon extérieur*, & tantôt la *seconde gaine*, sur le fondement que les autres pièces de l' aiguillon sont renfermées dans l' intérieur de celle-cy; mais on verra dans la suite, que cela ne sauroit être vrai qu' en partie. Enfin M. de Réaumur a donné à cette piéce le nom de *canule* & de *tuyau*, sans vouloir décider si elle étoit fendue, oubien simplement cylindrique; & on verra aussi que cette dénomination ne présente pas à l' esprit une idée qui réponde à la structure de cette pièce.

XX. Après donc avoir fait ſortir de l'étui la pièce dont il s' agit, j'en ai coupé l' extrémité, de la longueur environ de $\frac{1}{3}$ de ligne, que j'ai placé ſur un verre dans une goutte d' huile. Il eſt eſſentiel de préparer la pièce en fort petits morceaux; ſi elle l' étoit en ſon entier ou par grandes parties, ce ſeroit par leur côté qu'elles ſe préſenteroient à l' obſervateur; au contraire ſa forme eſt très-favorable pour que la pièce ſe préſente de face, lorſque la partie qu'on porte dans la goutte d'huile eſt extrêmement petite. Il réſulte de l'obſervation, que dans la face qui regarde l'étui, la grande pièce eſt entièrement ouverte depuis ſon origine à la tête du Couſin juſqu'à fort près de ſon extrémité; mais cette ouverture diffère de celle qui regne le long de l' étui; celle-ci peut devenir plus ou moins grande ſelon la différence des circonſtances, & celle-là paroît toujours fixe & d' une figure qui ne change point, au moins ſenſiblement. Les bords de cette ouverture ſont ſoutenus des deux côtés par deux filets (Pl. 2. Fig. V.), ou, ſi l'on veut, par deux paquets de petits filets écailleux, qui en forment un gros de chaque côté, qui depuis leur origine s' avancent preſque parallélement l' un à l' autre juſques près de l' extrémité de l'ouverture, où en ſe rapprochant par un ovale allongé, ils s' uniſſent l' un à l' autre & vont finir à la pointe *d.* de la pièce. Chacun de ces filets en a un autre à côté, qui tient la même route que les premiers; & à l'endroit *b. b.* où ceux-ci ſe rapprochent, les filets extérieurs changent auſſi de direction & forment une eſpèce d'ovale extérieur au premier dont le bout eſt cette même pointe *d.* où les filets intérieurs, après leur union, ſont allés ſe terminer. Entre le filet qui forme le bord de l' ouverture, & celui qui eſt à ſon côté, on obſerve une fort petite couliſſe *b. b.* que cependant on ne peut découvrir qu'avec de bons microſcopes; cette couliſſe devient plus ample vers l'extré-

mité de la pièce *c. c.* par l' écartement du filet intérieur de l' extérieur. Il n' eſt donc pas de cette ouverture comme de celle de l' étui, qui depuis ſon origine continue juſqu' à ſon bout; mais la grande pièce de l'aiguillon a un petit eſpace qui n' eſt point fendu, & c'eſt celui qui eſt depuis l' union des deux filets intérieurs juſqu'à la pointe *d.* où les quatre filets aboutiſſent. Les deux filets extérieurs tiennent de côté à une ſubſtance liſſe, luiſante, ſans fibres apparentes, qui paroît être comme cartilagineuſe & qui eſt pliée en gouttière; cette ſubſtance change bientôt de nature & devient comme membraneuſe, formant le fond de la pièce, comme ſi c' étoit un cul de ſac, ample dès ſon origine juſqu' à $\frac{3}{4}$ du total de ſa longueur, mais qui diminue enſuite & n' a qu' une fort petite capacité vers l' extrémité de la pièce.

XXI. Après avoir bien examiné cette préparation au microſcope double, je l' ai renfermée entre deux lames pour l' obſerver au microſcope ſimple & au ſolaire, & conſtater par-là de plus en plus la ſtructure de la pièce & la proportion de ſes parties. Il m' a conſtamment réſulté de toutes ces obſervations, que la grande pièce de l' aiguillon eſt compoſée en deſſus d' une ſubſtance membraneuſe, ou muſculeuſe, qui, vers les côtés, ſe change en cartilage, & ce cartilage étant plié tout le long en gouttière, donne une forme & une certaine conſiſtance à toute la pièce; en deſſous le même cartilage tient des deux côtés à deux filets qui ſont ſéparés par une petite couliſſe de deux autres filets qui forment les bords de cette ouverture, qui ſe prolonge tout le long de la piéce, & qui, lorſque la trompe eſt dans ſon état naturel, a ſon emplacement dans la fente de l' étui.

XXII. C' eſt en partie autour de la grande pièce & en partie au dedans que ſont rangées les cinq autres, qui, par leur réunion avec la ſixième, forment ce compoſé,

qu' on appelle l' aiguillon. Il eſt très aiſé de ſe convaincre que ce ſont ſix piéces qui en font l' enſemble ; il n' y a pour cela qu' à débarraſſer le faiſceau de ſon étui , & à couper celui-ci , du moins en partie , avec les antennes de l' inſecte , afin que rien ne puiſſe recouvrir ou embarraſſer les pièces de l' aiguillon , & à plonger enſuite la tête & l' aiguillon dans une goutte, ou d'eau, ou d' huile ; car les pièces ſe dégageront d' elles-mêmes les unes des autres, & il ne reſtera plus de doute que leur nombre ne ſoit de ſix , ni plus , ni moins ; ſeulement il faut prendre garde à n' en pas couper quelqu'une vers l' étui , ce qu' il arrive quelquefois , mais ſans conſéquence pour l' obſervation ; puiſque ſi le cas eſt arrivé , il ſera aiſé de s'apercevoir en obſervant , que pour lors la piéce qui manquera , ſera une des deux dentelées , car celles-ci ſont les plus expoſées à cet accident ; & même on pourra toujours en obſerver le tronçon encore attaché à la tête du Couſin ; cependant s' il arrivoit que l'on ne trouva pas toutes les ſix pièces, parceque quelqu'une ne ſe ſeroit pas dégagée des autres , il n' y a pour lors qu' à renfermer la préparation entre deux verres , de la manière que j'ai déja dit , & tout ſe débarraſſera à la ſatisfaction de l' obſervateur.

XXIII. Des cinq pièces que je dois examiner , il y en a deux (Fig. VI. VII.) dont la ſtructure & l' emplacement ſont ſi décidés , qu' il ne peut reſter ſur cela aucun doute. Ce ſont celles dont l' extrémité eſt dentelée & un peu courbée en arc , & qui ont été vues par tous les obſervateurs qui ont examiné avec le microſcope l' aiguillon du Couſin , mais dont les deſcriptions & les figures qu' ils nous en ont données , ne ſont rien moins qu'exactes. Il a paru à Leeuwenoeck que l' on ne pouvoit pas ſe paſſer de donner à ces pièces une certaine conſiſtance pour les rendre propres à percer la peau de l'animal dont le Couſin doit ſuccer le ſang ; il a donc cru qu'une for-

me applatie ne pouvoit leur convenir, mais qu'elles devoient être formées à peu-près comme une lame d'épée à trois quarts. Ce ſentiment de Leeuwenoeck a eu apparemment quelque influence ſur l'obſervation de M. de Réaumur, car ſur ce point il s'exprime de la manière qui ſuit. *Leeuwenoeck a cru voir, & j'ai cru de le voir de même, qu'il y a deux pièces qui ſont faites comme des lames d'épées à trois quarts; ce ſont celles dont les pointes ſont recourbées & qui ont des dentelures ſur la convexité de leur courbure.* Mais la nature aime preſque toujours à s'oppoſer à nos idées ſyſtématiques; les pièces en queſtion ſont réellement fort minces, fréles & d'une forme applatie, & cependant tout eſt ménagé de façon, que rien ne leur manque pour s'aquitter ſans le moindre inconvenient de leur fonction naturelle. Elles ont leur origine à côté des deux filets qui forment les bords de la fente de l'étui, & comme ceux-ci, à leur ſortie de la tête, ſont beaucoup écartés l'un de l'autre, il en eſt de même des deux piéces dentelées, & c'eſt là la raiſon pourquoi elles ſortent en partie de l'étui, lorſque l'on comprime la tête ou le corcelet de l'inſecte. Leur ſtructure eſt fort ſimple; du côté *a. a. a.* qui regarde le dedans de la trompe; c'eſt un petit filet arrondi, ou bien un aſſemblage de petits filets qui en forment un arrondi qui va droit depuis ſon origine juſques près de ſon extrémité, où il prend une petite courbure dont la concavité regarde l'intérieur de la trompe: à ce filet, ſuivant toute ſa longueur, tient une membrane un peu large vers l'origine de la pièce, & enſuite étroite, & applatie, qui, à ſon extrémité, eſt découpée par le bord & forme par-là cette eſpèce de dents arrondies *c.* que les figures & les deſcriptions des Naturaliſtes nous ont repréſentées comme ayant la forme de fer de fleche. Le nombre de ces dents n'eſt pas le même dans toutes les eſpèces de Couſins; j'en ai compté

tantôt dix & tantôt onze ſur les aiguillons des eſpèces communes ; mais il y en a quatorze dans celles des gros Couſins que l' on peut attraper dans les maiſons de campagne ſur les vitres aux mois de Novembre & de Décembre. Si après avoir préparé ces pièces dentelées dans l' huile & les avoir renfermées entre deux lames de verre, on les obſerve ou au microſcope ſolaire, ou au microſcope double monté d'une bonne objective d' une ligne de foyer, on découvrira ſur leurs membranes des fibres obliques *b. b.* qui ſe vont rendre au filet *a. a.*, près de la partie dentelée, ces fibres diminuent continuellement d'obliquité par rapport au filet, & ſe rapprochent toujours l' une de l' autre, mais pour lors on ne peut plus les diſtinguer ni les appercevoir. C'eſt par ce rapprochement des fibres tranſverſales que la partie dentelée de cette membrane prend un peu de fermeté & de conſiſtance.

XXIV. Maintenant ſi l'on fait attention à ces dents que le faiſceau des aiguillons laiſſe voir ſur ſes deux côtés (Fig. IV.), & ſi l' on rappelle toute la ſtructure de la grande pièce (Fig. V.), on ne pourra plus héſiter ſur la poſition des deux pièces dentelées. Le filet *a. a.* (Fig. VI. VII.) qui fait un de leurs côtés ſe loge dans la petite couliſſe *b.* (Fig. V.) que l' on a découvert le long des deux côtés de la grande pièce & tout-près de ſon ouverture : ſi la capacité de cette couliſſe étoit toujours proportionée à l' épaiſſeur du filet qui doit s' y loger, il eſt évident que les pièces dentelées en dépendance de la courbure de leur extrémité, ou reſteroient immobiles, ou que du moins elles ſeroient fort génées dans leurs mouvemens; mais cet inconvénient n'exiſte point; la couliſſe vers l'extrémité de la piéce s'ouvre & laiſſe un emplacement commode *c.* aux deux aiguillons dentelés pour pouvoir avoir leur jeu ſans contrainte. Il me paroît donc qu' à parler exactement, on ne ſçauroit dire qu' à l' égard des pièces

dentelées, la grande piéce tienne lieu d'un ſecond étui: & par la même raiſon il me paroît auſſi que l'on ne doit pas prendre trop à la lettre les expreſſions de Leeuwenoeck, lorſqu'il nous dit d'avoir tiré ces deux pièces de la cavité intérieure du ſecond étui, ce qui apparemment ne ſignifie rien autre, ſinon qu'il avoit dégagé ces deux parties, qui auparavant étoient unies au faiſceau entier des aiguillons.

XXV. Cependant parmi les trois pièces qui me reſtent encore à développer, il y en a une qui eſt réellement logée dans la cavité de la grande pièce comme dans un étui; elle a ſon origine au milieu de la tête du Couſin, & ſe trouve placée par ſa ſituation naturelle au milieu de cette cavité. M. de Réaumur doit l'avoir connue; car on ne peut entendre, que de celle-ci, ce qu'il nous dit d'avoir entrevu dans quelques unes de ſes obſervations; *j'ai cru voir*, dit il, *une pièce qui ſe termine par une pointe longue & taillée comme celle d'un cure dent*. Une membrane dont le milieu eſt occupé, ſuivant ſa longueur, par deux filets écailleux *b. b.* (Fig. VIII.) eſt ce qui entre dans ſa compoſition; la membrane eſt mince & d'une largeur qui paroît moindre que celle de l'ouverture de la grande pièce; & le microſcope ne nous laiſſe point voir ſes fibres, ni les longitudinales, ni les tranſverſales: à en juger un peu précipitamment, on diroit que c'eſt un filet arrondi qui s'étend le long de cette membrane; mais on s'apercevra de l'erreur, ſi après avoir préparé cette pièce dans une goutte d'eau ou bien d'huile, on l'obſerve à quelque microſcope monté d'une forte lentille: on verra alors deux filets *b. b.* qui laiſſent entre-deux un creux ou petit canal *a.*, qui eſt de la même capacité depuis l'origine de la pièce juſques bien près de ſon extrémité; mais là les filets s'écartent un peu l'un de l'autre & laiſſent voir en *c.* un vuide, qui ſe rend encore plus ſenſible en *d.*; mais

enſuite

ensuite ils se rapprochent, s' unissent & vont former la pointe de la pièce en *m.*, tout cela donne à cette extrémité l' apparence d' une pointe longue taillée comme celle d'un cure dent, mais en effet la réalité est tout autre chose. Il m'est arrivé plusieurs fois de voir le long de ce petit canal *a.* des bulles ou des petites colomnes de liqueur séparées par des intervalles vuides; les parties du canal où il y avoit de la liqueur avoient l' apparence d'un tuyau, & je n' y distinguois plus ni les deux filets, ni la cavité qu' il y a entre-deux.

XXVI. Ayant commencé à décrire dans ce Mémoire les pièces qui composent l' aiguillon par celle que j' ai nommé *la grande pièce*, ayant passé ensuite à la description des deux qui sont dentelées & logées aux bords extérieurs de l' ouverture de cette pièce; il paroît qu' il eut été dans l'ordre de parler de celles qui ferment cette ouverture avant que d'entrer dans les détails de la pièce qui est logée au dedans. Au vrai je n'ai point eu d' autres raisons de me départir de l'ordre qui paroissoit le plus naturel, si ce n' est que j' ai voulu représenter tout de suite ce que l'observation pouvoit nous apprendre de certain & de bien constaté sur la composition de la trompe du Cousin, pour me reserver à parler en dernier lieu de ce qu'elle a de plus embarrassant & de plus difficile a être débrouillé. En effet les deux dernières pièces de l' aiguillon, qui n'en sont pourtant qu'une même double, sont fort propres pour pousser à bout la patience d'un observateur; mais je n'abuserai pas de celle de mon lecteur, en détaillant minutieusement tous les moyens dont je me suis servi, pour tenter de surmonter ces difficultés. La source de l' embarras vient de ce qu'elles ne sont qu'une membrane très-mince, sans aucun filet écailleux, sans rien de cartilagineux qui puisse y donner un peu de consistance, d'où il arrive que si, pour les observer, on les sépare du faisceau selon la

méthode commune, elles ſe préſentent au microſcope toutes contrefaites, de ſorte qu' il n' eſt pas poſſible de deviner ce qu'elles ſont, ni en elles-mêmes, ni par rapport à leur arrangement avec les autres pièces ; & ſi l'on en fait la préparation dans l'eau ou dans l' huile, on verra bien alors qu' elles ne ſont que des membranes ; mais en même tems il ſera aiſé de comprendre que ces membranes doivent avoir perdu leur forme naturelle, puiſqu'on les voit d'une largeur à peu-près auſſi grande que celle du total du faiſceau ; que ſi l'on prend le parti de tenter l' obſervation en les laiſſant dans leur emplacement naturel, outre pluſieurs autres difficultés, il y en a toujours une inſurmontable, qui eſt, que la pièce que je viens de décrire ci-deſſus, & qui eſt logée dans la grande pièce, ne pouvant en ſortir, ſe préſente auſſi bien au microſcope que les deux qu' on voudroit examiner, d'où, par une ſuite néceſſaire, il s'enſuit que le tout eſt repréſenté confuſément, ſans qu'on puiſſe démêler les objets les uns d'avec les autres. La ſeule reſſource qui reſte eſt, de les obſerver dans les momens que l'action de l' eau ou de l' huile les oblige à ſe ſéparer, & peut être ne pourra-t-on pas encore réuſſir à ſe ſatisfaire entièrement par cette méthode même, dont l'exécution eſt d' ailleurs fort délicate. Cependant je donnerai la deſcription de ces pièces avec la précaution de ne pas confondre, avec des apparences douteuſes, ce que j' y ai vu diſtinctement & ſans équivoque.

XXVII. Chacune de ces pièces, qui, comme je l' ai déja fait obſerver, ſont d'une même ſtructure, a ſon origine immédiatement au-deſſus de celles qui ſont dentelées, & par conſéquent elle eſt placée entre l'une de ces pièces ci & le bord de la grande pièce. Sa ſubſtance eſt membraneuſe & d' une telle fineſſe, lorſqu'elle eſt bien déployée, qu' il n'eſt pas poſſible d'en ſuivre les bords que l'on apperçoit, ainſi que le corps même de la membrane,

qu' à la faveur des petits replis & froncemens qu' elle prend par intervalles (Fig. IX.) mais vers l' extrémité, de la pièce quelques uns de ces replis ont une forme constante ; ce sont ceux que l' on voit aux deux bords de cette extrémité & qui paroissent comme deux filets, dont celui d'un côté est toujours plus long que celui de l' autre, & sur ce filet plus long on découvre avec un bon microscope une crénelure à dents plates & très-fines, *a. a.* que je n' ai jamais vu déborder vers l' extérieur de la membrane ; ayant toujours observé que leurs pointes en regardoient l' intérieur. Au reste il ne m' a pas été possible de vérifier si c' est le côté dentelé qui regarde l'intérieur de la trompe, ou si c'est celui qui ne l'est point: il auroit fallu, pour fixer cette situation, avoir suivi sans intérruption un des bords de la membrane, depuis son origine jusqu' à son extrémité, mais jamais je n' y ai pu réussir. Ce qu' il y a de certain, c' est que les deux bords de l' extrémité de ces pièces sont assujettis l' un à l' autre par une espéce de ligament ou d'un filet *s. s.* qui part du bord qui n' est pas dentelé, & va obliquement s' insérer dans celui qui l' est, & par-là il les empêche de s' écarter l' un de l' autre & assure la forme de l' extrémité de la membrane, qui depuis le ligament jusqu' à son bout, est d' une petite pelle un peu évasée. Voilà ce que ces deux pièces nous font voir, lorsque par l'action d'un fluide elles se sont étendues ; mais ce n' est point là leur état naturel, comme je l' ai déja fait remarquer ; & plusieurs observations m'ont appris que ces membranes, dans leur arrangement naturel, sont plissées suivant leur longueur à peu-près comme le papier d' un éventail, & il m' est arrivé quelques fois de les voir appliquées l' une à côté de l' autre, de sorte que l' on auroit pu les prendre pour une seule pièce (Fig. X.) si ce n' étoit que près de leur origine elles étoient séparées, & aussi l' étoit-elles à leur extrémité.

XXVIII. La ſtructure de ces deux pièces prouve aſſés qu' elles ne ſont pas deſtinées à percer la peau de l'animal que le Couſin doit ſuccer, ni à agir immédiatement ſur elle, d'où il paroît s' enſuivre que leur principale deſtination pourroit être de fermer l'ouverture de la grande pièce. Mais quel peut-être l' uſage de cette dentelure que l' on obſerve ſur l' un des bords de chacune de ces deux pièces? Ferment-elles l' ouverture de la grande pièce en s' introduiſant dans ſon intérieur, ou bien ſont-elles logées à ſon extérieur? Et pourquoi deux pièces pour former cette ouverture? N' y en auroit-il pas aſſez d'une? A' la vérité, voilà des queſtions aux quelles je ſens bien de n'être aucunement en état de ſatisfaire; ſeulement j'avouerai, que je penche à croire que l' emplacement des deux membranes en queſtion n' eſt pas au dedans de la grande pièce, mais en dehors, c'eſt-à-dire que leurs bords s'appuyent ſur ceux de l'ouverture pour la fermer; & je ſuis d' autant plus porté à le croire, qu' il me paroît, que moyennant cet arrangement, il eſt plus aiſé de donner une explication ſatisfaiſante du mécaniſme qui opère dans le Couſin la ſuccion de l' aliment; car j'avouerai auſſi, que je ſens de la repugnance à embraſſer l' opinion généralement reçue pour expliquer la manière dont cette opération s' exécute.

XXIX. On s' eſt formé l' idée de l' aiguillon du Couſin comme d' un aſſemblage de pluſieurs lames appliquées les unes contre les autres & renfermées dans un étui, ainſi que les lancettes & d' autres inſtrumens propres à opérer ſur nous, ſont renfermés dans celui d'un Chirurgien, & on prétend que de cet aſſemblage, il en réſulte une trompe d' autant plus admirable qu' elle eſt plus ſimple; lorſque le faiſceau de ces lames, dit-on, eſt introduit dans la veine, le ſang s' éléve dans la longueur de ces lames à peu-près par le même mécaniſme qui fait monter les liqueurs dans les tuyaux capillaires. Quelques obſervations

que M. de Réaumur a faites ſur l' aiguillon du *Taon*, ont donné lieu d' imaginer ces ſortes de trompes, où la ſuccion s' exécute, ſans que cette opération demande ni quelqu' organe précis deſtiné à cet office, ni même un arrangement fixe & déterminé des pièces qui compoſent ces trompes. Je ne ſçaurois déférer à ce ſentiment; & quand même il pourroit avoir lieu à l' égard de la trompe du Couſin, on ne pourroit pas, ce me ſemble, en prouver la vérité par ce que l' on obſerve dans celle du *Taon*; car il me paroît très-évident, que l'organe de la ſuccion dans celle-ci eſt bien plus compliqué que ne le ſuppoſe l'opinion commune, qui n' a réellement d' autre appui que quelques obſervations de M. de Réaumur, très-exactes à la vérité, mais dont on tire des conſéquences qui ne peuvent pas en découler. Ce fameux Naturaliſte a prouvé, & prouve ſans replique, que le ſang de l' animal piqué par le *Taon* ne paſſe pas par quelque ouverture placée entre les lèvres de la partie charnue de ſa trompe, mais que le conduit, par lequel il monte dans le corps de l'inſecte, doit être placé dans cet organe, qu'on appelle l'aiguillon: or quoique tout cela ſoit exactement conforme à la réalité, ce n'eſt pourtant pas une preuve, ni que les lèvres de la trompe ne ſoient pas un des principaux organes qui opère la ſuccion, ni que parmi les pièces qui compoſent l' aiguillon il y en ait quelqu'une faite pour ſervir de conduit, ni enfin que ce conduit ſoit formé par un aſſemblage quelconque de toutes les pièces, & non pas par l' encadrement de quelques unes, dont l'enſemble formeroit un vrai canal, à peu-près comme on le peut obſerver dans les deux trompes ou cornes du *Fourmilion*.

XXX. Pour vérifier ce point, il eſt néceſſaire que j'entre dans quelques détails ſur la ſtructure de la trompe du *Taon*. Je ne connois pas d'Auteurs qui l'ayent examinée, excepté M. de Réaumur, qui même, à ce qui paroît,

ne l'a obſervée qu' à la loupe, & conſéquemment n' en a pu donner que des connoiſſances incomplettes & qui exigent d' être rectifiées. Je ne prétends donc pas donner ici une deſcription achevée de la ſtructure de cette trompe, ni répéter tout ce qui en a déja été dit par M. de Réaumur, mais je me bornerai aux endroits qui demandent ou des remarques, ou des deſcriptions plus complettes; renvoyant pour le reſte au Mémoire même de ce ſavant ſur les *trompes à lèvres groſſes & charnues* Tom. IV. Mém. V.

XXXI. La trompe du *Taon* eſt du genre de celles, dont la partie qui ſe montre le plus ſenſiblement, eſt muſculeuſe & ſe termine par deux groſſes lèvres charnues, que tout le monde a vu dans les mouches qui fréquentent les appartements & les cuiſines. Ces lèvres, celles ſurtout des groſſes mouches, par exemple de la mouche bleue de la viande, préparées avantageuſement & obſervées avec un bon microſcope, préſentent un ſpectacle tout-à-fait magnifique, & offrent de plus, dans leurs trachées, une ſingularité qui mérite l' attention des phyſiciens. La Figure XI. de la Pl. III. repréſente les deux lèvres de la trompe de la mouche bleue bien étendues & écartées l' une de l'autre, où l'on peut obſerver une quantité d' eſpèces de cordons *a. a. a.* qui occupent beaucoup de place dans les membranes qui appartiennent à la partie du devant des lèvres, & ſe terminent immédiatement au de-là de ſes bords qui regardent la tête de la mouche *s. s. s.* M. de Réaumur a cru, ſur quelques apparences, que ces cordons ou filets étoient des vaiſſeaux à liqueur, mais il eſt inconteſtable que ce ſont des trachées; & ſans doute qu' il n'en auroit pas douté s' il eut obſervé à un bon microſcope les deux gros cordons *b a. b a.* ſitués tout-près du diamétre qui diviſe les deux lèvres, car il eſt viſible qu' ils ne ſont que des grandes trachées *A c d O* (Fig. XII.) qui ſe ramifient & donnent naiſſance à ces filets, c'eſt-à-dire à des trachées plus

petites, dont le nombre ſur chaque lèvre eſt de 52. dans les *Taons* de la grande eſpèce, & de 38. dans ceux de l'eſpèce plus petite; les groſſes mouches bleues de la viande en ont 32. (Fig. XI.); on en trouve ſeulement 28. dans d'autres eſpèces de grandes mouches, & moins encore dans les lèvres des mouches des plus petites eſpèces. Au reſte ces lèvres renferment un fort grand nombre de vaiſſeaux à liqueur, dont la forme eſt la même que celle que l'on obſerve dans de ſemblables vaiſſeaux des inſectes, & par conſéquent très-différente de cette ſtructure qui eſt propre aux trachées.

XXXII. La ſingularité que ces trachées nous offrent, & que je ne dois pas omettre ici de rapporter, eſt qu'elles nous donnent la connoiſſance de l'exiſtance de vaiſſeaux à air formés par une ſubſtance en partie membraneuſe & en partie écailleuſe, qui n'eſt que roulée ſuivant ſa longueur. Voici la ſtructure de cet organe: les deux grandes trachées, qui ſont la tige des ramifications, ne préſentent aucune particularité, que l'on ne puiſſe obſerver de même ſur la plus grande partie des trachées des inſectes, mais les branches qui en ſont une continuation, ont une ſtructure bien ſingulière. La Fig. XII. repréſente la portion *A. B.* de la trachée qui borde ce vuide circulaire que les deux lèvres laiſſent entr'elles d'abord en deſſous de l'échancrure *m.* (Fig. XI.); les branches qui en partent, dont, pour ne pas trop agrandir la figure, on ne donne qu'une portion, ſont marquées par *c r*, *d s*, *O t*, *m p*, *n q*, ſi l'on prépare la pièce dans une goutte d'eau (l'huile ne convient pas à cette préparation) & qu'on ne la comprime que peu entre les deux lames qui ſervent de porte-objet, les trachées ſe préſenteront ſous la forme de tuyaux parfaits *c r*, *m p*, (Fig. XII.); mais on y obſervera dans toute leur longueur quelque choſe d'obſcur & de confus, & l'on ne ſaura deviner ce que cela pourroit bien être.

Si entre les deux lames on met du papier plus mince, & par conféquent, fi l'on comprime un peu plus la préparation, les trachées *d s* commenceront pour lors à perdre leur forme de tuyau complet; elles s'entrouvriront & laifferont voir la dentelure *a*, *a*, *a*, d'un de leurs bords, & il fera aifé à imaginer, que ce que l'on voit d'obfcur vers le milieu & au long de la pièce, doit être la dentelure de l'autre bord. Enfin fi l'on comprime encore d'avantage la préparation, les trachées *O t*, *n q*, s'ouvriront entièrement & préfenteront à l'obfervateur leur ftructure tout-à-fait à découvert: on voit donc que chacune de ces trachées eft une membrane qui a la forme d'un paffément à bords dentelés, & qui eft croifée par des filets bruns de nature écailleufe, dont l'un des bouts fe termine conftamment au haut de la dentelure 1. 1., & l'autre au plus profond de la découpure 2. 2. il eft bon cependant de remarquer que ces vaiffeaux, à leur infertion dans la grande trachée, font compofés d'anneaux complets, qu'on peut bien rompre *a. a.*; mais que l'on ne fauroit développer, & que leur extrémité *s. s. s.* (Fig. XI.) qui aboutit à la face des lèvres qui regarde la tête de la mouche, paroît entièrement fermée.

XXXIII. Il me refte encore à faire obferver, fur la compofition de cette pièce, un fait qui prouve combien nous fommes loin de pouvoir pénétrer les différentes vues de la nature dans la ftructure de fes organes, & combien auffi on devroit être réfervé à en imaginer de notre cru au défaut d'obfervations qui nous éclairent fur la vérité des faits. Rien de plus naturel que de penfer, que ce filet noirâtre qui borde chacune des deux lèvres, depuis l'échancrure *m.* (Fig. XI.) jufqu'au bout inférieur *a.*, & de *m.* jufqu'à leur extrémité la plus écartée *c.* doit être dans toute fon étendue une fubftance homogène, arrangée fuivant un même deffein & qui donne naiffance à toutes les

trachées

trachées ſelon un même plan ; cependant cela n' eſt pas. Commençant en *r. r.* vers le milieu du bord circulaire, dont j' ai déja dit un mot ci-deſſus, & deſcendant juſqu'à l' extrémité *a.* la grande trachée eſt telle préciſément que je viens de la décrire, c' eſt-à-dire, elle eſt formée comme les trachées ſont dans les inſectes, & de la manière qu'elle eſt repréſentée en *A. O.* (Fig. XII.) : ce ſont 15. branches qui en partent depuis *r.* juſqu'en *a.* (Fig. XI.). Je dois dire à peu-près les mêmes choſes de la portion qui ſe trouve dans la partie ſupérieure des lèvres entre *d.* & *c.* ; mais cette portion de trachée ne donne que 8. rameaux. Or l' obſervation nous apprend que l'entre-deux *r. d.* de ces portions a une forme différente, & que 9. rameaux de trachées qui y prennent naiſſance, en ſortent d' une façon qui eſt bien diverſe de celle que l' on obſerve dant les ramifications de tout autre vaiſſeau connu. Donc ce filet, dans la portion *r. d.*, ſe préſente comme un cartilage couleur de marron clair, dont les deux parties de la grande trachée *r. a.* & *d. c.* ſont une prolongation de ce cartilage ou vaiſſeau cartilagineux, car je ne ſaurois décider ſi c' eſt l' un ou l' autre, tirant leur origine des filets *x. x.* (Fig. XII.) qui ont l' apparence de plantules qui portent quatre feuilles oppoſées, & c'eſt d'entre les aiſſelles des deux dernières que ſortent les trachées, comme les boutons portent d' entre les ſtipules. Ces tiges ſont, comme je viens de le dire, une prolongation du cartilage *O. B.* & paroiſſent être de la même nature; ſeulement on y voit au milieu & dans toute leur longueur une petite ligne blanche qui ſe continue dans les feuilles. Il y a encore à obſerver des petites lames *y. y.*, échancrées à leur extrémité, qui prennent naiſſance aux deux côtés des tiges *x. x.* & qui ſont de la nature du cartilage d'où elles partent, mais dont il paroît bien difficile que l' on puiſſe parvenir à connoître l' uſage. Voilà donc des

faits bien myſtérieux ; mais puiſque la plus grande difficulté qui ſe préſente, vient de la nature de cette ſubſtance cartilagineuſe *O. B.* qui ne paroît pas former un vaiſſeau ; mais qui cependant, malgré l'apparence contraire, pourroit bien en former un. Je ne pouſſerai pas plus loin cette eſpèce de digreſſion, dont je me flatte pourtant que le lecteur n' aura pas été faché. Toutes ces trachées développées offrent au microſcope, ſurtout au ſolaire, un ſpectacle fort joli ; mais je dois pourtant avertir qu' il n' eſt pas ſi aiſé de bien préparer les lèvres de la mouche, de ſorte que les deux grandes trachées & toutes leurs ramifications ſe préſentent diſtinctement & avec préciſion; il eſt ſurtout difficile d' avoir une bonne préparation de la partie cartilagineuſe & de ces filets, ou plantales qui en ſortent ; mais ſi l' on borne ſa curioſité à voir ſimplement la ſtructure des rameaux de ces trachées, la choſe ſera d'une facile exécution ; il n' y a qu' à obliger les lèvres à ſe gonfler, à en couper une petite portion ſur leur face extérieure, & la placer dans une goutte d'eau entre deux lames de verre que l' on fermera ſans l' entremiſe de papier ; cette préparation ne manquera pas d' avoir ſon effet, au moins dans quelques unes des trachées, qui s'ouvriront & offriront aux yeux de l' obſervateur le beau ſpectable décrit cy deſſus.

XXXIV. La ſtructure des lèvres que je viens de détailler, fait aſſez voir que c'eſt l'air qui fait le principal jeu de la trompe ; mais indépendamment de cela, il eſt ſi évident que la trompe des mouches qui ont ces groſſes lèvres charnues, eſt du genre des trompes aſpirantes, que M. de Réaumur à été obligé d' avouer le fait, quoique d' ailleurs il n' ait pas eu connoiſſance des trachées qui l' opérent ; *on ne peut pourtant*, dit-il, *s' impêcher de regarder la ſuccion comme la principale cauſe qui fait monter la liqueur dans la trompe ; de regarder cette trompe comme une*

sorte de trompe aspirante dans laquelle la liqueur est poussée par la pression de l'air extérieur; quand on fait attention à une circonstance, c'est que dans certains instans, la portion de la goutte sur laquelle le bout de la trompe est appliquée, devient toute mousseuse, parcequ'elle se remplit de bulles d'air que la trompe y introduit. „ Après un tel aveu, il n'est pas facile de deviner par quelle raison valable ce fameux Naturaliste ait fait de la trompe du *Taon* une exception de cette règle, & qu'il ait pensé que les lèvres de sa trompe ne servent qu'à donner un appui solide à la coulisse qui soutient la partie composée des aiguillons. S'il y a de la différence entre la structure de la trompe du *Taon* & celle des autres espèces de mouches à lèvres musculeuses, & il est indubitable qu'il y en a, cette différence ne regarde pourtant pas le fond de son mécanisme, par rapport aux organes propres, pour en former une trompe aspirante. Les deux cordons qui bordent l'intérieur & l'extrémité supérieure des deux lèvres de la trompe du *Taon*, sont partagés, tout comme dans la trompe des mouches que je viens de décrire, en trois portions; celle du milieu paroît un cartilage, & les deux extrêmes sont des trachées; mais les filets qui enveloppent celles-ci sont plus subtils & plus serrés l'un contre l'autre qu'ils ne le sont dans les trachées des lèvres de la mouche. La plus grande des différences qni se présente entre les deux structures en question, est que dans le *Taon* les vaisseaux qui partent de ces cordons ne sont pas formés, comme dans la mouche, par des membranes roulées suivant leur longueur; mais autant que je l'ai pu observer, ce sont des tuyaux réellement complets. Je ne puis assurer non plus que ceux d'entre ces rameaux qui ont leur origine dans la lame cartilagineuse, soient une prolongation de ces petites tiges que l'on a observé dans la trompe de la mouche; ce qui m'a empêché de me satisfaire

ſur ce point, c'eſt qu' à leur origine, ces rameaux ſont trop près les uns des autres, pour qu' ils ſe préſentent auſſi diſtinctement qu' il le faudroit pour s'aſſurer du fait. Cependant il me paroît inconteſtable que ces petites différences dans la ſtructure des trachées des lèvres du *Taon*, par rapport à l' organization que l' on obſerve dans celles de la mouche commune, ne ſont aucunement de nature à faire ſoupçonner que les lèvres de la trompe de celui-là n'ayent d' autre deſtination que celle de donner un appui ſolide aux aiguillons, pendant que l'on eſt d' accord que dans les autres mouches elles ne ſervent pas ſeulement à cet appui, mais auſſi à vuider d' air le conduit par lequel doit monter la liqueur pour entrer dans leurs corps.

XXXV. Mais quoique la ſtructure des lèvres de la trompe du *Taon* paroiſſe aſſez déciſive pour qu'on doive placer celle-ci dans le genre des trompes aſpirantes; il eſt cependant à propos d' examiner, ſi les pièces qui en compoſent l' aiguillon, ne ſont pas ſi différentes de celles qui entrent dans la compoſition de l' aiguillon des mouches communes, qu' on ſoit obligé d' imaginer d'autres principes pour rendre raiſon des moyens que la nature à employés pour la nourriture de l' inſecte. Mais à la vérité l' obſervation nous apprend que, malgré la diverſité qui ſe montre, ſoit dans le nombre des pièces qui compoſent l'aiguillon proprement dit de la trompe du *Taon*, ſoit dans leur conformation comparée à celle qui ſe fait voir dans les aiguillons des autres mouches, la nature n' agit ici que ſur un même modèle, qui n'eſt varié qu'autant que l'exige la manière différente dont ces inſectes doivent ſe nourrir. Pour pièce de comparaiſon je choiſis l' aiguillon de la mouche commune des apartements. Il eſt logé, de même que celui du *Taon*, dans une couliſſe charnue qui eſt ſur la face ſupérieure de la tige qui porte les lèvres de la trompe, & cette couliſſe aboutit à l'échancrure *m*. (Fig. XI.)

que les lèvres *c d*, *c d* laiſſent entre-deux. Il n' eſt compoſé que de deux pièces, dont la plus petite eſt encadrée au fond de la couliſſe, & reſſemble tout-à-fait à une pièce analogue *a b a* (Fig. XIII.) que l'on trouve placée de même au fond d' une pareille couliſſe charnue de la trompe du *Taon*, ayant l' une & l'autre ſuivant leur longueur, trois compartimens *c*, *d*, *c*, diviſés par deux cordons *m n*, *m n* qui aboutiſſent aux deux côtés de la pointe *b* de la pièce, & donnent la forme de couliſſe au compartiment du milieu *d*, lequel d'ailleurs, ayant une petite concavité, ſe trouve par-là arrangé en forme de conduit; la différence la plus remarquable qu' il y ait entre ces deux pièces analogues eſt que celle qui appartient au *Taon* eſt beaucoup plus épaiſſe & d' une plus forte conſiſtance.

XXXVI. La ſeconde pièce qui entre dans la compoſition de l'aiguillon de la mouche eſt beaucoup plus groſſe, plus ſolide & plus ferme que la première; elle paroît avoir une forme cylindrique; mais en l' obſervant par deſſous, du côté qu'elle regarde la couliſſe, on découvre qu'elle eſt ouverte & faite en voute; de ſorte que recouvrant la première pièce, elle doit faire, avec celle-ci, un canal qui eſt placé entre la couliſſe de la petite pièce & la concavité de la grande. Cette concavité n'occupe pas plus d' un tiers du total de la groſſeur de la pièce, ce qui fait conjecturer que ſa partie ſupérieure doit former un canal, ou, ſelon M. de Réaumur, le ſuçoir de la trompe: conjecture que l'on peut réellement appuyer de l'obſervation, en ce qu'elle nous donne pluſieurs indices de l' exiſtence d' un canal, & pas un qui puiſſe nous faire ſoupçonner que cette partie ſupérieure ne ſoit qu'un compoſé de ſubſtance ſolide. De-là il s' enſuit que l' aſſemblage des deux pièces de l' aiguillon de la mouche forme deux conduits, dont l' un eſt dans la grande pièce, & l' autre réſulte de

la capacité qui est contenue entre la coulisse de la petite pièce & la voute de la grande pièce qui la recouvre; or il est aisé de comprendre que ces deux conduits peuvent se vuider d'air; car non seulement les pièces qui les composent sont encadrées dans la coulisse charnue, mais de plus elles ont leurs bords extérieurs recouverts & surmontés par les membranes de cette partie charnue; d'où il doit s'ensuivre que ces mêmes membranes feront l'office de soupape, toutes les fois que par la dilatation des lèvres la trompe se vuidera d'air. A' présent si l'on me demandoit, pourquoi ces deux conduits dans la trompe de la mouche, comme s'il n'en étoit pas assez d'un, & quelle peut-être leur différente destination, on me feroit des questions auxquelles je ne saurois satisfaire qu'en partie; ces sortes d'insectes doivent pomper de la liqueur; une autre liqueur doit sortir de leur corps par la trompe pour délayer les matières de leur nourriture & les rendre propres à être pompées; l'air aussi doit tantôt sortir du corps des aiguillons & tantôt y rentrer pour aider le jeu de la succion; ce sont-là des fonctions bien différentes, qui pour leur exécution, ont apparemment exigé plus d'un conduit. Tenons nous en donc aux faits; ceux-ci nous apprennent que les organes qui dans la mouche commune ont part à l'action de la succion, sont les lèvres de la trompe, les deux conduits formés par l'assemblage des deux pièces de l'aiguillon, & la coulisse charnue avec ses bords membraneux qui assujettissent l'aiguillon, & sont dans les occasions un obstacle à l'air extérieur de pouvoir s'introduire entre les deux pièces qui le composent. Il s'agit maintenant de faire voir que ces organes ne se montrent pas moins dans la trompe du *Taon* que dans celle de la mouche comune.

XXXVII. La trompe du *Taon* a deux lèvres à son extrémité, & ces lèvres sont fournies de vaisseaux à air tout

comme celles de la mouche commune ; elle a auſſi une couliſſe charnue dans laquelle loge l'aiguillon, dont la pièce qui eſt encadrée dans le fond (Fig. XIII.) a la même ſtructure que la petite pièce de l' aiguillon de la mouche; & comme dans cette trompe la partie brune & luiſante que l' on voit le long de la face ſupérieure de la couliſſe, eſt la grande pièce de l'aiguillon qui couvre la petite, c'en eſt auſſi de même dans la trompe du *Taon*, mais la ſtructure en eſt pourtant différente ; ſi cela n'etoit pas, il y a apparence que l'eſpèce d' inſectes qu' on appelle *Taon* n' exiſteroit pas, faute d'organe convenable pour ſe procurer la nourriture ; car elle auroit bien les conduits propres pour la faire monter dans ſon corps ; mais elle manqueroit d' inſtrumens ſuffiſants pour la faire parvenir dans ces conduits, à quelques petites différences près que l' on comprendra aiſément par la comparaiſon des figures XIII. & XIV. Cette pièce (Fig. XIV.) eſt tout-à-fait ſemblable à celle (Fig. XIII.) qui eſt logée au fond de la couliſſe muſculeuſe, elle eſt ſeulement beaucoup plus épaiſſe & plus large que celle-ci : je ne ſais pas comment il peut-être arrivé que M. de Réaumur ait manqué cette ſtructure, qui d'ailleurs ne demande pour être bien obſervée qu'un microſcope des plus médiocres ; il lui a paru que cette pièce eſt diſtinguée en quatre cannelures formées par cinq cordons qui aboutiſſent à ſa pointe, & dont l'un en occupe l'axe dans toute ſa longueur ; mais c'eſt juſtement ce cordon du milieu qui dérange toute l'économie de la pièce & qui réellement n' exiſte point, puiſque ce milieu *A. B.* (Fig. XIV.) a une cavité, & non pas un cordon.

XXXVIII. Si ces deux pièces s' ajuſtoient immédiatement l'une contre l'autre, il eſt évident qu' il n'en reſulteroit qu'un grand canal ou conduit fait par la rencontre de leur concavité *A. B.* (Fig. XIV.) *b. d.* (Fig. XIII.);

mais il y en a deux autres qui doivent ſe loger entre celles-là, & de cet emplacement dépend, comme on va le voir, la formation des deux conduits. *Ces deux pièces-ci*, dit Mr. de Réaumur, *ſont celles qui ſont le mieux faites en lancette, qui ſont les plus minces; & elles ſont ſi liſſes & d'une ſubſtance ſi égale, qu'on n'y apperçoit pas la moindre fibre.* Cela eſt aſſez conforme aux obſervations qu'on peut faire avec le microſcope; ſeulement je ferai remarquer que ces lames (Fig. XV.), du côté ſur tout de leur courbure *a*, *a*, *a*, ont un petit bord membraneux *b. b. b.* qui ſe prolonge juſqu'à bien près de leur pointe *c*, & qu'on découvre dans cette membrane des fibres perpendiculaires à la longueur des lames qui vont s'y inſérer & ſe perdre dans leur ſubſtance liſſe & luiſante. Il dit auſſi que leur largeur eſt à peu-près la même que celle de la pièce qui eſt logée dans le fond de la couliſſe, ce qui eſt vrai de la largeur de ces lames à leur origine; mais comme dans leur prolongation elles ſe rétréciſſent bien moins que cette pièce-là; il s'enſuit qu'elles ont plus de largeur, & ne peuvent s'y appliquer ſans déborder des deux côtés. Or ces deux lames minces, liſſes & faites en forme de lancette ſe croiſent, & s'appliquent contre les cordons *a*, *m*, *m*, *a* (Fig. XIII.) de la pièce d'en-bas, & il eſt évident que de cette poſition il réſulte un conduit *b. d.*, dont le plat des lames (Fig. XV.) forme la couverture, & puiſque la grande pièce (Fig. XIV.) recouvre l'aſſemblage de celle d'en-bas & des deux lancettes, & que, par conſéquent, ſes cordons *a b*, *a b* s'appuyent contre la ſurface ſupérieure des lames, il en réſultera encore la formation d'un ſecond conduit fait à contre-ſens du premier, c'eſt-à-dire, où le plat des lames eſt en-bas, & la concavité *A B* en-haut.

XXXIX. Cependant cette compoſition de pièce dans l'aiguillon du *Taon* doit néceſſairement laiſſer des interſti-

ces

ces le long des deux côtés de leur jointure, & on ne ſauroit placer cette trompe entre les aſpirantes, ſi la machine n'eſt pas pourvue d'organes propres à empêcher que l'air extérieur ne s'introduiſe par ces interſtices dans le corps de la trompe; & il eſt vrai qu'on ne comprend pas-auſſi-tôt comment l'air extérieur peut-être empêché de pénétrer entre les bords de la grande pièce & ceux des lames qui ne ſauroient s'y appliquer exactement, par l'obſtacle qu'ils doivent rencontrer du côté des cordons dont cette pièce eſt fournie. Cette difficulté ſeroit réelle ſi on en étoit réduit à expliquer la choſe uniquement par la preſſion des bords muſculeux de la couliſſe charnue, ainſi que nous l'avons fait ci-deſſus en parlant de la trompe de la mouche commune; car il faut avouer que l'aiguillon du *Taon* n'eſt pas ſi fortement appliqué contre ſa couliſſe comme l'eſt celui de la mouche; & de plus il eſt conſtant que cet aiguillon eſt pouſſé au-de-là de la couliſſe, & même au-de-là des lèvres lorſque l'inſecte perce la chair d'un animal. Mais la ſtructure complette de cet organe nous fournit les moyens pour réſoudre la difficulté, ou plutôt elle nous apprend qu'il n'y en à aucune. La trompe du *Taon* a donc encore deux pièces qui, quoiqu'extérieures au corps de l'aiguillon, ont pourtant des fonctions très-eſſentielles qui s'y rapportent: elles ſervent à faire couler le ſang des veines que les lames à lancette ont ouvertes; elles aſſujettiſſent ces mêmes lames à la pièce ſupérieure de l'aiguillon, & enfin elles peuvent empecher l'air extérieur de pénétrer dans le corps de l'aiguillon, en s'y introduiſant par les vuides qui exiſtent entre les lames & l'intérieur de la grande pièce. M. de Réaumur, qui n'a obſervé ces deux pièces qu'à la loupe, s'eſt borné à nous apprendre qu'elles ſont faites en gouttière (Fig. XVI.) que leur emplacement eſt à chacun des deux côtés de l'aiguillon, & que c'eſt dans la gouttière de chacune de

ces pièces que ſe loge de chaque côté le bord de la grande pièce (Fig. XIV.) & le bord extérieur de chacune des lames (Fig. XV.), ce qui eſt exactement conforme à la vérité; mais d'ailleurs inſufiſant pour nous faire comprendre ſoit l'élégante ſtructure de ces pièces, ſoit leur vraie deſtination. J'ai fait graver la figure de ces pièces en gouttière, telle que M. de Réaumur l'a donnée (Fig. XVI.), ſeulement je l'ai portée à la proportion de mes trois figures précédentes, & cela pour faire comprendre que la ſimple loupe eſt d'un trop foible ſecours pour obſerver des objets d'une certaine petiteſſe.

XL. La figure (XVII.) que j'en donne ſur mes propres obſervations, ne fait voir que cette portion de la pièce qui dans la figure XVI. eſt marquée par *a. b. b.*, & n'eſt que $\frac{1}{6}$ du total de ſa longueur; l'agrandiſſement dans ma figure eſt de 260. fois ſon diamètre. Afin d'en faire mieux obſerver la ſtructure, je l'ai repréſentée ouverte, ainſi la gouttière ne s'y voit pas; mais on n'a qu'a concevoir que la pièce ſoit pliée ſelon ſa longueur de la façon qu'elle l'eſt dans la fig. XVI. pour comprendre que le fond de la gouttière eſt formé par la ſubſtance membraneuſe *a. a.* contenue entre les filets ou les cordons écailleux *b. b. b. b.* (Fig. XVII.) qui commencent à l'origine de la pièce, & diſparoiſſent près de ſon extrémité. On voit ſur un des tranchans & à l'extrémité de cette pièce une forte dentelure *c. c. c.*; ces dents, lorſque la pièce eſt à ſa place naturelle, préſentent leurs pointes vers l'intérieur de la face ſupérieure de la grande pièce (Fig. XIV..) Sa face extérieure eſt auſſi garnie de dents; mais plus petites que celles qui ſont ſur le tranchant, & leurs pointes regardent la tête de l'inſecte: les dentelures du côté *d m* s'étendent plus loin que du côté *d n*; celles-là dans l'aſſemblage des pièces qui forment l'aiguillon, ſurmontent la face ſupérieure de la grande pièce,

& celles-ci hérissent la face inférieure de l' extrémité des lames faites en lancette. Du côté que la substance membraneuse qui forme cette pièce s' applique en dessous contre ces lames, elle se termine par des appendices en forme de mammelons *o. p. p.* qui forment tout le long de son bord, à commencer en *o*, près de la pointe de la pièce, comme une espèce de frange dont on ne sauroit reconnoître la destination, qui doit être d'assujettir les pièces dont les bords sont enchassés dans le creux de la gouttière. C'est apparemment pour la même fin que cette membrane, tout-près du même bord, a dans la plus grande partie de sa longueur une petite bande *s. s. s.* qui paroit formée par des petits filets serrés & comme entassés les uns sur les autres. Cette frange de mammelons ne se trouve point au bord de la membrane qui s'applique contre la face supérieure de la grande pièce, mais depuis *m.* ou les dents finissent; elle se termine par une bande filamenteuse *u. u.* semblable, mais plus large que celle qui de l' autre coté en occupe l' intérieur *s. s. s.* Voilà donc une structure, qui sans d' ultérieurs éclaircissemens, fait assez connoître par elle-même que les pièces, à qui elle appartient, sont destinées à faire couler le sang des vaisseaux que les lancettes ont percés; qu'elles servent à assujettir les unes aux autres les pièces qui entrent dans la composition de l'aiguillon, & qu' enfin elles peuvent, dans les cas où l' intérieur de la trompe se vuide d'air, faire la fonction de soupape & empêcher l'air extérieur de s'introduire entre les jointures des pièces.

XLI. De tout ce que je viens d'observer sur la structure de la trompe du *Taon*, on peut bien, ce me semble, en tirer la conséquence qu'elle doit être rangée dans la classe des trompes aspirantes, pas moins que la trompe des mouches communes, & que même elle y est ammenée par un des plus jolis mécanismes que l' anatomie

des insectes nous présente. Au surplus la pensée de faire passer la nourriture dans le corps d'un insecte par le même mécanisme qui fait monter l'eau dans un tas de sable ou dans le corps d'une éponge, peut paroître trop singulière pour que l'on doive s'y prêter sans des preuves supérieures.

XLII. Revenons maintenant à la trompe du Cousin & faisons remarquer que l'on s'est un peu trop pressé lorsqu'on a assuré, qu'elle n'étoit que la trompe même du *Taon* en petit; la comparaison qu'on peut faire des pièces qui composent ces deux machines, est plus que suffisante pour mettre en évidence qu'elles ne se ressemblent en rien l'une à l'autre, si ce n'est qu'on veuille y trouver de la conformité en ce que toutes les deux ont deux pièces dentelées qui sont également placées en déhors du corps de leurs trompes. Si en effet elles étoient d'une même structure, la question qui regarde le mécanisme qui fait monter la nourriture dans le corps du Cousin, seroit décidée; car on ne pourroit s'empêcher de tomber d'accord, que c'est par la force de la succion que cet effet s'éxécute; mais cette ressemblance n'existe point, & surtout la trompe du Cousin n'a pas ces lèvres charnues qui sont dans celle du *Taon* & des mouches communes, l'un des principaux organes de la succion; il reste donc toujours à savoir quelle peut-être la cause de l'effet en question. Cependant je dois avouer que je ne me sens pas assez instruit pour la résoudre décisivement, car j'ai manqué de ressources pour me procurer des connoissances plus complettes sur la structure de l'organe dont il s'agit: mais comme cette ignorance ne doit pas être une raison pour nous permettre de donner l'essort à l'imagination en enfantant des prétendues loix mécaniques que la nature désavoueroit, je me bornerai uniquement à aplanir la difficulté par quelques petites remarques, par lesquel-

les je finirai ce mémoire, qui eſt déja bien plus étendu que je ne me l'étois propoſé lorſque je commençai à le compoſer.

XLIII. Premièrement les Naturaliſtes qui prétendent que le faiſceau des aiguillons ſert de conduit à la liqueur qui monte dans le corps du Couſin par les interſtices qu'il doit y avoir entre pièces & pièces, ſont obligés d'accorder au moins que les deux pièces dentelées (Pl. 2. Fig. VI. VII.) n'entrent pour rien dans l'élévation dont il s'agit, puiſqu'elles ſont placées à l'extérieur du corps de la trompe. On devroit bien, ce me ſemble, en dire autant de la grande pièce (Fig. V.), car ſa ſtructure nous montre qu'elle-même forme un grand conduit, & non pas que le conduit réſulte de ſon aſſemblage avec d'autres pièces. Il n'y reſtera donc pour faire la prétendue combinaiſon que la pièce pointue (Fig. VIII.) & les deux membraneuſes (Fig. IX. X.), mais ſi l'on fait attention à la nature de ces pièces, & ſur-tout des deux membraneuſes, peut-être ne ſera-t-on pas éloigné d'accorder, qu'il eſt hors de toute vraiſemblance que par le ſimple rapprochement de leurs ſurfaces reſpectives, elles ſervent comme des tuyaux capillaires deſtinés à faire monter la nourriture dans le corps de la trompe, ſans qu'il y ait beſoin d'autre cauſe pour opérer cet effet.

XLIV. Je dois remarquer en ſecond lieu que la forme de ces trois pièces de l'aiguillon du Couſin ne paroît rien moins que propre pour en faire des piſtons aſpirants ou refoulans; & au ſurplus quand même on pourroit expliquer par-là l'introduction de la liqueur dans la partie de la trompe qui avoiſine ſon bout, il reſteroit toujours à ſavoir par quelle force elle pourroit en parcourir toute la longueur, & monter dans l'intérieur de la bouche de l'inſecte.

XLV. Mais ſi cette trompe eſt vraiment aſpirante, comme on doit le préſumer faute de preuves contraires pour

lors la ſuccion pourroit s' exécuter de deux façons différentes, ſans pourtant que l' obſervation nous apprenne laquelle des deux réponde en effet à la réalité. Car premièrement il ſe peut que le Couſin ſoit fourni d'organes propres à vuider d' air le corps de ſa trompe, & il eſt aiſé de comprendre que dans ce cas, il faut de toute néceſſité que l' emplacement des deux pièces membraneuſes (Fig. IX. X.) ſoit en dehors de l'ouverture de la grande pièce (Fig. V.) pour la fermer en s' appuyant contre ſes bords extérieurs, & empêcher par-là l' introduction d'un nouvel air dans la capacité intérieure de la pièce.

XLVI. Cependant il ſe pourroit que le Couſin n' eut pas d' organes deſtinés à vuider d' air ſa trompe, & que néanmoins ſon jeu ne s' exécuta que par le moyen de la ſuccion; car on ne peut pas douter que cela n' ait lieu dans les grands animaux, où la force muſculaire eſt le reſſort dont la nature ſe ſert pour les rendre propres à pomper des liqueurs. On a vu que le fond de la grande pièce eſt muſculeux ou membraneux; & je ne vois pas ce qui pourroit empêcher de ſuppoſer que cette ſubſtance peut paſſer de l' état d' affaiſſement à celui d' une extenſion, qui agrandiroit la capacité intérieure de la pièce, & rendroit en conſéquence l' air qui y eſt contenu plus rare que l' extérieur; effet pourtant qui ſuppoſe toujours que les deux pièces membraneuſes ferment par le dehors l'ouverture de cette pièce. Mais enfin, ces remarques-mêmes que je viens de faire prouvent aſſez que ſur ce point-là mes obſervations ne m'ont rien appris de décidé.

RECHERCHES

Sur la cauſe de la décompoſition du nitre & du ſel marin par les intermèdes terreux.

PAR M. MONNET.

La décompoſition du Nitre & du Sel marin par les terres argilleuſes, n' étoit regardée par quelques chimiſtes non inſtruits des affinités chimiques, tels que Lemery, que comme l' effet d' une diviſion mécanique de ces Sels; leſquels préſentant par le moyen de ces intermèdes beaucoup de ſurfaces, l'action du feu en détachoit avec plus de facilité leur acide. Cette idée ne pourroit paroître guère raiſonnable à ceux qui adopterent la doctrine du grand STAHL, qui ayant expliqué le premier d'une manière claire & préciſe l'action de l'acide vitriolique ſur la baſe de ces Sels, trouva beaucoup plus naturel & beaucoup plus conforme aux loix de la nature d' imaginer que ces intermèdes terreux, tels que les argiles, ne décompoſoient ces Sels qu' à raiſon de l' acide vitriolique qu' ils contenoient. STAHL fit plus, il voulut démontrer ce qu' il avançoit, en diſant avoir obtenu du tartre vitriolé d' un réſidu d' une diſtillation du Nitre avec l' argille, & en faiſant remarquer que plus on augmentoit la doſe de l'argille, plus on avoit d'eſprit de Nitre (1) il n'en falloit pas d' avantage que l' aſſertion d'un chimiſte ſi célébre, pour faire adopter ce ſentiment comme une choſe infaillible. Auſſi on ne douta

(1) Les partiſans de la diviſion mécanique auroient bien pu objecter à Stahl que ce qu' il regardoit comme l'effet d'une plus grande quantité d'acide, n'étoit que l' effet d'une plus grande diviſion qu' éprouvoient ces ſels par l'augmentation des terres.

plus dès lors que la décompoſition du Nitre & du Sel marin opérés par les argilles, ne ſe fit qu' en conſéquence de l' acide vitriolique. Ce ſentiment eſt celui qui a prévalu juſqu' à ces derniers tems & qui a été conſacré dans les différens ouvrages de chimie qu'on a publié juſqu'à aujourd'hui.

Depuis que la chimie a fait quelques progrés, perſonne ne s' étoit encore aviſé de vérifier ces faits; & peut-être que les choſes euſſent reſté là encore long-tems, & que je n' euſſe pas moi même entrepris de traiter cette queſtion ſi un diſtillateur d' eau forte, porté par le déſir de faire un plus grand profit, ne ſe fut aviſé, d'après ce qu' il avoit oui dire, de retirer du tartre vitriolé des réſidus de la diſtillation de l'eau forte. Mais il eut beau leſſiver des tonneaux entiers de ces réſidus, il n' en retira pas la moindre partie de tartre vitriolé. Ayant ſu cela, auſſi bien que pluſieurs autres, j'entrepris de faire une diſtillation de nitre bien pur avec de l'argille bien choiſie, à deſſein d' en examiner plus particulièrement que je n'avois fait toutes les circonſtances. Une partie de nitre ſur trois d' argille bien deſſechées furent employées. L' opération ayant été pouſſée fortement, voici quel en fut le réſultat. La leſſive du *caput mortuum* amenée par l'évaporation juſqu'à ſa fin, ne me laiſſa qu' un peu de nitre qui n' avoit pu être décompoſé. Quelque tems après je répétai cette expérience plus en grand: je fis bouillir le réſidu plus long-tems & dans une plus grande quantité d' eau; je fis évaporer toutes mes eaux juſqu' à plus de la moitié de leur volume; alors je voulus examiner quel effet préſenteroit cette liqueur avec la diſſolution mercurielle, car me diſois-je, s' il y a du tartre vitriolé il doit ſe manifeſter dans cette occaſion, en donnant du turbith minéral. J'eus effectivement un précipité, qui me parut tel; mais cette liqueur

verdiſſoit

verdiſſoit le ſirop violat ; ce qui me pouroit faire préſumer que ce précipité n'étoit pas l' effet de l'acide vitriolique ; car comme je me ſuis convaincu que le turbith n' eſt autre choſe qu' un précipité mercuriel comme les autres (2) j'avois lieu de ſoupçonner que ce précipité ne fut occaſionné par quelqu' autre choſe, peut-être par l'alkali du nitre lui même modifié par la terre ou combiné avec elle, puiſqu' il ſe manifeſtoit par la couleur verte du ſirop violat. Je fis évaporer la liqueur & criſtalliſer. J'eus, comme la première fois, un peu de nitre. Je crus appercevoir quelque peu de tartre vitriolé parmi ce nitre: mais pour en être mieux aſſuré, j'en fis l'eſſai par l'opération du ſouffre. Je pris pour cela mon ſel que je mis dans un creuſet, l'y ayant fait fondre, je fis détonner tout le nitre avec de la poudre de charbon, & j'eus le ſoin d'en mettre plus qu'il n'en falloit pour cette détonnation. Je couvris le creuſet & pouſſai la matière à la fonte. Cela fait, je leſſivai ce qui étoit reſté dans le creuſet ; ayant filtré cette leſſive, qui avoit toute l'odeur d'un foye de ſouffre foible, je verſai deſſus un acide & j'eus auſſitôt toutes les marques qui accompagnent la précipitation du ſouffre. Je fis une pareille diſtillation du ſel marin, mais je n'eus pas la moindre marque du ſel de Glauber : je remarquai ſeulement que la quantité de ſel marin non décompoſée étoit beaucoup plus conſidérable que celle du

(2) Quelque révoltante que paroiſſe cette aſſertion aux chimiſtes qui ſont accoutumés à conſidérer le turbith comme une combinaiſon du mercure avec l'acide vitriolique, il faudra pourtant tôt ou tard revenir de ce préjugé, en conſidérant que du turbit qui a été ſuffiſamment lavé ne donne pas le moindre atome de ſublimé avec le ſel marin ; & il convient de rendre juſtice à *M. Baumé*, qui, ſuivant ce qu'en dit le célébre auteur du dictionaire de chimie, paroît être le premier chimiſte qui ait entrepris de nous détromper ſur cet objet.

nitre ; ce qui fait voir que le sel marin est bien plus difficile à se décomposer que le nitre.

D'après ces expériences, je ne pouvois douter à la vérité d'une part que les argilles ou du moins quelques unes ne continssent un peu d'acide vitriolique, mais de l'autre je ne pouvois rapporter entièrement la décomposition de ces sels à ce peu d'acide, & ce qui me prouvoit qu'il en falloit chercher la cause ailleurs, c'étoit de voir que le sel marin n'étoit point décomposé dans la même proportion du nitre, quoique poussé aussi fortement à la distillation, ce qui, ce me semble, ne devroit pas être, si cette décomposition n'étoit due qu'à l'acide vitriolique, qui assurément a autant de facilité de décomposer le sel marin que le nitre. D'un autre côté l'extrême violence du feu qu'on est obligé de donner pour enlever ces acides par ces intermèdes, tandis qu'avec beaucoup moins de feu on enlève ces acides par des intermèdes qui contiennent véritablement l'acide vitriolique, étoit encore pour moi une autre preuve de mon sentiment, & j'y étois d'autant plus déterminé, que M. Pott dans sa dissertation sur le sel marin expose plusieurs décompositions de ce sel par des intermèdes dans lesquels on ne peut pas raisonnablement soupçonner de l'acide vitriolique. Mais à quoi donc rapporter cette décomposition ; est ce seulement à la division mécanique que procurent ces intermèdes à ces sels, comme l'ont cru quelques uns de nos anciens chimistes? ou est ce à l'union que contracte la base de ces sels avec ces intermèdes? je crois l'un & l'autre de ces effets, & j'ose me flater de le mettre ici en évidence.

J'avois été long-tems comme ayant perdu cet objet de vue, lorsque M. Le Veillard gentilhomme ordinaire du Roi entreprit, pour s'instruire sur cela, une distillation de nitre avec du sabion. Il employa une partie de nitre bien

pur & bien ſec & trois parties de ſablon qui n' eſt autre choſe que notre grès en poudre (pour la nature.) Il eut la précaution de bien laver ce ſablon & de le bien faire deſſécher auparavant. Il obtint un eſprit de nitre fumant. Ayant enſuite leſſivé ſon réſidu & voulant filtrer cette leſſive, qui préſentoit au gout un caractère d'alkalinité bien ſenſible & qui verdiſſoit le ſirop violat, elle ſe coagula d' abord comme une gelée tranſparente, qui dans très peu de tems devint ſolide. M. Le Veillard ſurpris de ce qui venoit de lui arriver ne manqua pas de m'en faire part auſſi bien qu' à M. Macquer comme à ſes bons amis. Très ſurpris moi même de ce dernier effet, je remis auſſitôt toutes mes idées de ce côté-là, & j'entrepris de faire pluſieurs eſſais à la fois ſur un fourneau de diſtillateur d' eau forte qu'on apelle galère. J' y fus invité par l'offre gracieuſe de M. Charlard apoticaire en charge de Monſeigneur le Duc d'Orléans, qui tient un de ces ateliers. Je préparai en conſéquence pluſieurs mélanges du ſel marin & du ſel de nitre. 1.° Avec du ſable de riviere, qui n' eſt autre choſe que des petits fragmens de caillous & de *ſilex*. 2.° Avec du ſablon pour obtenir le produit ſingulier de M. Le Veillard. 3.° Avec du verre, du ſablon, du borax & de la litarge à partie égale. Mon deſſein étoit de voir par ce troiſième procédé, ſi en donnant à la baſe du nitre & du ſel marin le moyen d'entrer en vitrification, ce ne ſeroit pas un bon expédient pour décompoſer plus aiſément ces ſels & d'en obtenir leur acide plus promptement. Ces mélanges, qui étoient tous d' une demi livre de ſel ſur une livre & demi d'intermède, furent mis dans des cornues propres à ces fourneaux, auxquelles on joignit leur récipient de même matière; le tout bien laté, on les pouſſa à la diſtillation de même qu'on a coutume de faire pour l'eau forte; c'eſt à dire depuis ſix

heures du matin jusqu' à pareille heure du soir. Il donnerent : 1.° Ceux du nitre, une eau forte assez bonne ou passablement forte : 2.° Ceux du sel marin, un esprit de sel à peu-près de la même force, mais en bien moindre quantité ; ce qui n'est point étonnant, vu que le sel marin se décompose bien plus difficilement que le nitre, ainsi que nous l'avons déja fait remarquer. Il faut pourtant en excépter celui qui étoit provenu du mélange du verre, du borax & de la litarge, qui étoit à peine aigrelet. Je ne fus point surpris de cette différence, en faisant attention que l' acide marin avoit bien pu s'unir à la litarge & former avec elle un plomb corné. Je crus, en effet, en avoir remarqué dans le col de la cornue, qui s'étoit élévé par la force du feu en forme de farine ; aussi le *caput mortuum* de ce mélange n'étoit-il point demeuré rougeâtre comme celui du nitre : il étoit blanc.

Je me proposai aussitôt d' examiner ces résidus avec la plus scrupuleuse attention. Je commençai d'abord par celui du nitre & du sable de rivière, qui étoit peu dur & aisé à briser. J' en fis la lessive avec une s. q. d'eau. Cette lessive étoit sensiblement alkaline & verdissoit promptement le sirop violat, & même faisoit effervescence avec les acides: preuve manifeste de l'alkali. L' ayant évaporée, j' en obtins par la cristallisation une once & demi de nitre & deux onces d'alkali fixe, qui n'étoit point pur, car il étoit gris. Je crus que cela venoit d' une portion de terre à laquelle il s' étoit uni : j' avois pressenti cette terre par des flocons qu'occasionnoit l'acide vitriolique versé dans cette lessive. Je laissai tomber cet alkali en *deliquium*, à dessein d' en séparer ensuite cette terre par le filtre : mais ce fut inutilement.

J' examinai ensuite celui du sel marin avec le même intermède. Il étoit beaucoup plus dur. La lessive verdissoit

ſenſiblement le ſirop violat; cependant je n'en pus pas avoir un atome d'alkali minéral, j'en obtins quatre onces de ſel marin : il ne s' en étoit donc décompoſé que quatre onces.

Nous voici arrivé au phénomène le plus intéreſſant que nous préſentent ces diſtillations : c' eſt l' expérience de M. Le Veillard, c'eſt-à-dire la diſtillation du nitre par le ſablon. Je fis donc la leſſive de ce *caput mortuum*, qui étoit rare, ſpongieux & paroiſſoit comme une eſpéce de fritte, ſur-tout vers l' endroit qui touchoit immédiatement le fond de la cornue. Cette leſſive préſentoit au gout quelques choſe de légérement alkali ; elle verdiſſoit cependant très-ſenſiblement le ſirop violat. Ayant voulu verſer deſſus quelques gouttes d'acide vitriolique, je fus agréablement ſurpris de voir s' y former ſur le champ un *cœgulum*. En faiſant attention alors à ce qui étoit arrivé à M. Le Veillard, je commençai d' entrevoir l' analogie qu' il y avoit entre mon réſultat & le ſien. Il faut remarquer que ce *cœgulum* ne ſe faiſoit bien que pendant que la liqueur étoit chaude : l' acide y produiſoit alors une eſpèce de mouvement d'effervefcence & la liqueur ſe troubloit un peu en blanc, pendant qu'il ne produiſoit pas le moindre effet dans cette liqueur lorſqu'elle étoit froide. A' quoi devois-je attribuer ce *cœgulum*, ſi ce n' étoit à la terre vitrifiable que l' alkali du nitre, devenu libre par l' action du feu, avoit diſſous; laquelle dégagée par l'acide, au lieu de ſe précipiter comme beaucoup d'autres terres, reſtoit ſuſpendue dans la liqueur & l'épaiſſiſſoit ainſi? Cette conjecture ſi vraiſemblable fut changée entièrement en certitude par l' évaporation de cette leſſive, qui me laiſſa une matière tout-à-fait ſemblable à une gomme, laquelle miſe dans un creuſet & pouſſée à la fonte, me donna un verre blanc très ſolide. Je fus à la vérité fort ſurpris de voir qu'une matture qui avoit été diſſoute dans l' eau eut

pu former un verre ſolide. Il paroît donc évident que le *coagulum* qu'avoit eu M. Le Veillard venoit de ce que ſa leſſive étoit très-concentrée lorſqu' il la verſa ſur le filtre. Le même effet me ſeroit arrivé ſans-doute, ſi j' euſſe arrêté l' évaporation de ma leſſive à ce point.

Il y a lieu de croire auſſi que dans toutes ces circonſtances l' alkali ſe joint plus ou moins facilement avec les ſubſtances qui ont ſervi d' intermèdes à la ſéparation de ces acides, ſuivant la diſpoſition de ces matières. Nous avons vu qu' on ne retire point d' alkali des réſidus de la diſtillation du nitre & du ſel marin par les argilles : que devient donc cet alkali s' il ne demeure pas combiné avec la terre? Nous ſommes bien perſuadés que la décompoſition de ces ſels, ſe fait d' autant plus facilement & promptement que leurs baſes trouvent plus de facilité à s'unir à leurs intermèdes. Peut-être eſt ce par cette raiſon que les argilles décompoſent plus aiſément ces ſels que tout autre intermède de cette eſpéce, joint à leur grande ténuité. Mais ce qu' il y a de certain, c' eſt que on ne peut pas en attribuer l'unique cauſe à cela, puiſque nous avons pour exemple la décompoſition du nitre par le ſable, qui nous a préſenté l' alkali à nud, lequel vraiſemblablement n' a pu contracter d' union avec le ſable à cauſe de ſon peu de ténuité ou bien à cauſe de ſon peu de diſpoſition pour s' unir à l'alkali fixe.

L'examen du réſidu de la diſtillation du ſel marin avec le même intermède n' a préſenté rien de différent de celui du ſable, à l'exception qu'au lieu de quatre onces de ſel marin je n'en ai eu que deux onces. Ce qui fait voir qu'il s' étoit ici décompoſé une plus grande quantité de ſel marin. En cela il n'y a rien de ſurprenant en conſidérant la plus grande ténuité du ſablon.

Le réſidu de la diſtillation du nitre par le borax, le verre, & la litarge ne différoit guère de celui du ſablon; il étoit comme lui très-dur & très ſolide, & comme lui demi-vitrifié vers le bas, c'eſt à-dire, vers la partie qui touchoit le fond de la cornue. Sa leſſive évaporée juſqu' à ſiccité, ne m' a laiſſé qu' un peu d' alkali jaunâtre, & ne faiſant pas beaucoup d' impreſſion ſur la langue. Il y a donc apparence que preſque tout l' alkali, baſe du nitre, a demeuré vitrifié avec les autres matières.

Le pareil réſidu du ſel marin ma donné trois onces de ſel non décompoſé; ce qui eſt très-ſurprenant, attendu que la diſtillation par le ſablon en avoit décompoſé d'avantage, puiſque j'ai dit n' en avoir retiré que deux onces. Par là je vis que c' étoit inutilement que j'avois employé ces différentes matières; ce qui me fit croire que la trop prompte vitrification étoit un obſtacle à la décompoſition de ces ſels, qui aglomérant trop promptement les parties ſalines en ſupprime pour ainſi dire les ſurfaces, & empêche par là que leur acide en puiſſe être détaché auſſi aiſément que ſi les parties ſalines étoient libres & iſolées. En ſuivant cette idée, je me perſuadai que les intermèdes qui s'uniſſoient aux alkalis ſans les faire entrer en fuſion, étoient plus propres pour ces décompoſitions que tout autre. D' où je crus voir une nouvelle raiſon pourquoi les terres argilleuſes décompoſent ſi aiſément ces ſels, puiſqu' elles ſont refractaires par elles mêmes & qu'elles portent à une diviſion extrême ces ſels. D' après cela je m' imaginai que la chaux éteinte à l'air pourroit opérer avec une ſorte de facilité cette décompoſition: j' en fis donc l'éſſai ſur la même galère ou j'avois fait les autres, & j'eus la ſatisfaction de voir que la décompoſition avoit été menée aſſez loin. J' eus par la leſſive des réſidus l'alkali combiné avec la chaux, ce qui formoit de la piérre à cautère, qui étoit même très forte.

De tout ce que nous venons de dire, il réſulte bien clairement, à ce que je crois, qu'on ne peut attribuer la décompoſition du nitre & du ſel marin par les intermèdes terreux, à autre choſe qu'à la diviſion que leur font éprouver ces terres; & que cette décompoſition a d'autant plus lieu aiſément que l'intermède a plus de diſpoſition pour s'unir à la baſe de ces ſels ſans ſe fondre.

A Paris Décembre 1767.

AD AGROSTOGRAPHIAM
SCHEUCHZERI
Supplementum
ALBERTI HALLER.

Cum SCHEUCHZERI gramina a possessore mecum communicata, cum meis conferrem, reperi in ultimo potissimum volumine plusculas species, quae aut novae sunt, aut certe in opere SCHEUCHZERIANO, & LINNAEANO desiderantur. Eas ergo visum est, per suos characteres describere, vobisque sodales illustres has meas historias transmittere, ne memoria pulchrarum plantarum intereat.

1. ANDROPOGON spica simplici locustarum paucissimis aristatis, calyce perforato.

Gramen dactylon aegyptiacum spicis singularibus villosis aristatis. ap. TILLI *hort. Pisan. p.* 75.

Folia dura, glabra, vaginalia, spicas continentia, ad sesquilineam lata. Culmus gracilis teres iunceus, pedalis aut paulo altior. Spicae numerosae, in sinu folii alicuius latentes, inde nudae, biunciales, strictae, acutae. Scapus villosus alternis scrobiculis laevibus. Locustae biflorae. Folia calycina duo aequalia & pene similia, sibi adaptata, clausa, firma, elliptica, lanceolata, glabra. In exteriore foramen notabile sub apice adparet, qui constanter purpureus est. Inter haec foliola duae glumae florales, longae, graciles, tenerrimae, & intra eas stamina, tuba, & semen. Pleraeque locustae, muticae, dantur tamen in quaque spica aliquot flores aristati ex basi glumae interioris arista longa, pene uncialis inflexa prodit alter flos petiolatus, petiolo papposo, ceterum similis gracilior.

2. LOLIUM locuſtis ſexfloris, calyce glabro, floribus ciliatis.

Gramen bromoides maritimum annuum glabrum, minus, ſpica heteromalla, locuſtis gracilioribus, aſperis, longius ariſtatis. TILLI *p.* 176.

In Apulia haud longe Baria.

Radix fibroſa, culmi cubitales, folia vaginoſa, quae convolvi ament, aduſque ſeſquilineam lata. Haec omnia glabra. Panicula ſpicata pauciflora, neque ullum ramoſum petiolum reperi. Locuſtae grandes ſex, & ſeptiflorae. Calix floribus ſimilis & maior, uniflorus, compreſſus complicatus, ariſtatus: ariſta lineam longa, & triplo quam floribus longior. Flores alterne, diſtantes. Florum gluma interior brevior, acuminata, glabra.

3. FESTUCA panicula ſpicata, locuſtis trifloris, ariſta flore longiori.

Gramen anguſtiſolium glabrum paniculatum, panicula denſiori, & frequenter ariſtata, villoſa. SCHEUCHZERI inter plantas poſthumas ſiccas, nullo loco natali addito.

Culmi iuncei ſeſquipedales, geniculis nigris. Folia ad lineam lata. Panicula obſoleta e viridi luteſcens, contracta, pene ſpicata, ramoſa & multiflora, pene heteromalla. Calycis folia valde inaequalia, denſo mucrone, maius florali aequale, pene ariſtatum. Locuſta biflora; flores graciles ſtricti, ex ſummo dorſo in ariſtam duram & linearem continuati.

4. POA glabra panicula pauciflora, locuſtis praelongis, octifloris.

Gramen maritimum annuum minus, panicula ramoſa foliacea locuſtis ſtrigoſioribus, unciam longis. MICHEL. *Hort. Piſ. p.* 71.

Circa Terracinam, & in Inſulis prope Venetias.

Radices durae, praegrandes, longae; in imo caule ſquallentes vaginae albae, nitentes. Culmus inferius geni-

culatus, inflexus, inde rectus, gracilis, iunceus, pedalis, cubitalis. Folia glabra, lineam lata. Panicula singularis, spicata, pauciflora, ad duodecim locustas. Hae in parva planta magnae, omnino unciales, octiflorae, floribus alternis. Calix inaequalis, lanceolatus, dorso eminente, sic glumae florales exteriores; omnia viridia, oris albis & glabra.

5. POA panicula patula, verticillata, locustis teretibus sexfloris, glumis subobtusis.

Gramen orientale paniculatum portulacae semine. TOURNEFORT Coroll. *p.* 39. a MICHELIO missum.

Aira panicula oblonga secunda mutica imbricata, foliis planis. LINN. *p.* 95. non potest eadem esse.

Culmus firmus tripedalis. Folia glabra in exemplo ad lineam lata. Panicula semipedalis & ultra, recta, firma, verticillata, petiolis, patulis gracilibus. Locustae teretes, sexflorae. Calycis glumae inaequales, minor fusca, maior fusca, & ad apidem aurea, utraque ex ovato-lanceolata, sed non argute. Similes calycinae maiori glumae florales exteriores fuscae, ad apicem aureae, mediae acuminatae, imbricatae. Petioli glabri.

6. POA panicula stricta, folio calycino altero setaceo, locustis sexfloris, floralibus glumis glabris, acute mucronatis.

Gramen paniculatum, nemorosum, latifolium, glabrum, panicula nutante non aristata. MICHELI *Hort. Pis. p.* 75.

In locis siccis additur vox *alpinum.* Ad lacum agnanum.

Caulis tripedalis, folia duas & tres lineas lata, ora & nervo asperrimis. Panicula parum sparsa, pauciflora, quam AUCTOR nutare dicit, inelegans caeterum. Locusta disticha sexflora. Calicis duo folia inaequalia, alterum strictissime setaceum; flosculi etiam graciles, longi, glumae exterioris mucrone adeo longo, ut pene pro arista haberi possit, minori tamen quam asperae Festucae hetero-

mallae SCHEUZERI interior gluma etiam longa & mucronata.

7. POA foliis iunceis, locuſtis quinquefloris, petiolis villoſis dorſali linea eminente ſubaſpera.

Gramen paniculatum iuncoides alpinum, panicula purpureo, & viridi variegata, locuſtis parvis muticis. MICHELI *hor. Piſ. p.* 75.

In *Brutiis*, prope Caſtellum ad montem in colle *Cacciano*. Radix fibrillis craſſis implexis. Caules imi vaginoſi, vaginis vetuſtis in fila diſſolutis, ceterum bipedales, & ultra geniculis nigris. Folia gracilia convoluta, ut iuncea videantur. Panicula quatuor unciarum, parum ſparſa. Locuſtae quinqueflorae. Calix ſubfuſcus, glumis ovato lanceolatis, argute mucronatis, aequalibus. Flores alterni, ovato lanceolati, nitentes, in ſicca planta ex purpureo & albo varii. Petioli ſubvilloſi, qua nota ad Poas pratenſes accedit. Dorſum glumae exterioris eminente linea notatum, paulum dentata.

8. POA foliis iunceis, panicula ſtricta, locuſtis quadrifloris, calycibus flore brevioribus.

Gramen arundinaceum alpinum radice craſſiſſima, foliis rigidis ſtriatis, & aſperis, panicula fuſca & non ariſtata MICHELI *hor. Piſ. p.* 75. in herbis ſiccis *arundinaceum* legimus, in horto *paniculatum.*

In M. *nurſinis*, *etruſcis*, & *mutinenſibus.*

Culmi duri, trepidales, imi longe vaginoſi, quaſi bulboſi. Folia iuncea ſe convolventia. Panicula ſtricta, pauciflora, pene heteromalla. Locuſtae magnae, quadriflorae. Calix floribus brevior, ovato lanceolatus, carinatus, parum inaequalis. Flores cartilaginei, hinc convexi, in mucronem firmulum producti. Gluma interior cava ovato lanceolata. Haec omnia lignei coloris, & glabra. Flores maiores, quam graminibus SCHEUCHZERIANIS heteromallis, & toti mutici.

9. POA panicula ſtricta, foliis glaucis ſulcatis, locuſtis quadrifloris argute mucronatis, glaberrimis.

Gramen paniculatum, folio latiore glauco, panicula albicante pene ariſtata. MICHELI *hort. Piſ. p.* 75.

In montibus *ſalernitanis*, & *amelphitanis.*

Culmus tripedalis, foliis ſulcatis glabris, ad lineam latis, glaucis. Panicula parum lata, triuncialis, & quadriuncialis. Locuſtae paleacei coloris, ſubcartilagineae, ceterum quadriflorae. Calix inaequalis ovatolanceolatus, pene ariſtatus. Folliculi pariter peracuti utraque gluma acute mucronata, interiori tamen breviori. Nihil papposi. Ad heteromalla SCHEUCHZERI accedit, non tamen vere heteromallum.

10. POA minima, panicula patula, locuſtis quadrifloris glaberrimis.

Gramen maritimum annuum apulum minimum, elegans, capillare panicula loliacea, ramoſa, rigidiuſcula. MICHELI *hort. p.* 71.

In *Apuliae* littoribus.

Planta exigua, culmo ſemipedali, foliis unam tertiam lineae partem latis, panicula tamen laxa, ramis fere coniugatis, repetito ramoſis, patulis, rigidiuſculis. Flores omnium minimi. Calycis duae glumae, inaequales, acuminatae. Locuſta diſticha, floribus diſtinctis, quadriflora, forte & pacioribus floribus. Flores cylindrici, flaventes. Omnia glabra.

11. POA latiſolia, panicula ſtricta, locuſtis trifloris, calyce longioribus glaberrimis.

Gramen paniculatum iuncoides alpinum, panicula ex albo vireſcente & nonnihil purpuraſcente, diſtincta, locuſtis maioribus muticis. MICHEL. *hort. Piſ. p.* 75.

Radicis fibrae durae, teretes, nigrae. Caules imi bulboſi tripedales. Folia ad ſeſcuncem lata, glabra. Panicula ſtricta, pauciflora. Locuſtae triflorae. Calycis folia lan-

ceolata, inaequalia. Flores laxi, ſtriati, gluma exteriori elliptica, cava, carinata, interiori aequali plana. Ima retinet petiolum villoſum flori.

In ſiccis omnia paleacea, praeter aureum glumae exterioris apicem.

Multo maiori flore eſt, quam locuſtae paniculatarum poarum pratenſium.

12. POA locuſtis bifloris, calyce breviſſimo, glumis ovatis, obtuſe acuminatis.

Gramen paniculatum maritimum, gramini pratenſi paniculato medio C. B. *aliquatenus ſimile, locuſtis ſtrigoſioribus.* MICHELI *hort. Piſ.*

In *Iſtria* prope civitatem Inſulae, loco ſalſo.

Faſciculi foliorum durorum ſemilineam latorum, ex radice prodeuntium. Culmus rectus, firmus, pedalis, & cubitalis. Panicula ramis rigentibus rectis, binatis aut verticillatis, parum ramoſis. Locuſtae breviter petiolatae, perexiguae, ovatae, mucronatae. Calix breviſſimus, altera gluma ovata, obtuſa, altera acuminata. Flores bini calyce longiores, ad lineam longi, gluma exteriori ovata, acuminata, interiori graciliori. Haec viridia cum aliquo livore & glabra.

13. POA diantha, calycis glumis ovatis, floribus villoſis.

Gramen avenaceum annuum minimum, elegantiſſimum, panicula contracta, & veluti ſpicata, locuſtis globoſis, purpuraſcentibus muticis. MICHELI *hort. Piſ. p.* 74.

In *Ericetis*, & M. *Apennina.*

Omnino elegans.

Culmus vix ſemipedalis, folia ſetacea.

Panicula ſpicata, uncialis.

Folia calycina bina, cava, ovata, obtuſa, pallida, & ſublivida. Inter ea folia congruentia duo floſculi aequales, ovati, ſubhirſuti, flaveſcentes. Haec minima capite aciculae non maiora.

14. POA monantha, calyce ovato, cavo inaequali, flore minori, ſulcata.

Gramen avenaceum montanum anguſtifolium, glabrum glumis villoſis, calycibus nitidis purpureis, & ſplendentibus. MICHEL. *hort. Piſ. p.* 75.

In M. *Morello.*

Planta tota glabra, neque in gluma villi. Folia lineam lata, praelonga, panicula ramoſa, longa, rariuſcula. Locuſtae obeſae, nitentes, nunc albae, muticae, & uniflorae, ceterum *Graminis locuſtis rubris ſimiles*, minores, glumis calycinis compactis, non diſtichis. Ovatae ſunt, mucronatae, inaequales. Flos ſingularis, glumis ſimilibus, altera maiori, minori in maioris carina congruente, utraque lineata, & ſulcata, ut ſemen alicuius floris umbelliferi, ora ſuprema alba, & acuta.

15. POA uniflora calycis glumis ovato lanceolatis, ſublividis, ſemine nitente.

Gramen miliaceum Saxatile anguſtifolium glabrum perenne, panicula fuſca, ſemine nigro ſplendente. MICHEL. *hort. Piſ. p.* 73.

In ſaxoſis Montium *di Calci* prope *Piſam.*

Radicum fibrae teretes, craſſae. Culmi tripedales ſtriati. Folia linea paulo latiora, glabra. Panicula ſemipedalis, laxiſſima, petiolis diſtantibus, qui ſparſi, pauciflori, ad octo flores gerunt. Locuſtae uniflorae, obeſae, ovato lanceolatae ex paleaceo & livido variae. Flos unicus, exteriori gluma calycina ſimilis ovato lanceolata; ſemine nitidiſſimo, nigro, acuta, hinc convexo, inde linea diviſo.

Non multa exempla fuerunt, ut in numero florum error ſubeſſe poſſit.

16. POA monantha panicula denſa ſpicata, foliis patulis.

Gramen ſpicatum aquaticum ramoſum annuum, glabrum humiſparſum, ſpica cylindracea breviori. MICHELI *hort. Piſ. p.* 72.

In alveo, & ſalicetis *Arni* fl.

Caulis infractus pedalis, folia arundinacea, patula, lineam, & ultra lata, hirſuta. Spica uncia longior, compactiſſima, ſubcaerulea, pene paniculata, petiolis ramoſis, Gramini aquatico geniculato ſpicato ſimilis, ſed diverſa, glumis iam eminus acutioribus. Locuſta exigua, uniflora. Calix floris magnitudine, glumis binis, ovato lanceolatis, hirſutis, viridibus. Folliculus unicus glumis duabus acuminatis, cavis & intermedio ſemine ſpadiceo ovato.

17. AVENA foliis radicalibus gracillimis, caulinis latioribus, ſpica & ariſtis breviſſimis, locuſtis quadrifloris.

Gramen avenaceum, foliis inferioribus gracilibus, ſuperioribus latioribus. TOURNEF.

In herbis ſiccis. J. B.

Folia radicalia ubique gracillima, tertiam, & quartam lineae partem lata, mollia, glabra, non ſetacea; folia caulina ad lineam lata. Spica breviſſima facie graminis glumis variis. Caulis gracilis, pedalis & ſeſquipedalis. Glumae calycinae duae, muticae, ovato lanceolatae, carinatae, latae & obeſae. Locuſta brevis, lata, quadriflora. Gluma exterior latior tridentata, medio dente in ariſtam linea breviorem exeunte; interior gluma longiuſcula mucronata. Haec ex perpaucis locuſtis deſcribo.

18. AVENA foliis hirſutis, panicula ſtricta, locuſtis trifloris, gluma interiori biſida, ariſta exterioris floris longitudine.

Gramen ſpicatum maritimum ſerotinum hirſutum minus, ſpica brevi, molli & laxa, locuſtis ex albo, & viridi variegatis. MICHEL. *hort. Piſ. p.* 72. adſcripſit SCHEUCHZERUS eſſe *typhoides molle* C. B.

Piſas inter *Liburnum*, & *Liburni*.

Tenera planta pedali minor, foliis ad lineam latis, hirſutis, panicula ſtricta, quaſi ſpicata, ramoſa, ſed ramis brevibus, totis floribus tectis, nitida ceterum & virente.

Locuſtae

Locuſtae imbricatae triflorae, exiguae. Calycis folia inaequalia, alterum gracile, utraque flore breviora, viridia. Florum gluma exterior viridis apice albo trifido, cuius media ariſta flori aequalis eſt; & plerumque inflexa. Gluma minor alba, bifida.

Avenam a Bromo vix diſtingui haec planta confirmat.

19. AVENA diantha, petiolis pappoſis, gluma florali ſubhirſuta, ariſtis praelongis.

Gramen avenaceum ſive Avena ſylveſtris, locuſtis duplo minoribus, ſeminibus nonnihil hirſutis MICHEL. *Catal. plant. agr. florent.* accedit ad aegilopem avenaceum *hiſt. ſtirp. helv.* Panicula laxa, & ſparſa, petiolis tenuibus praelongis, biſloris, quadrifloris. Calycis glumae florem excedunt maximae, complicatae, virides, lineatae, apice albo. Flores alterni petiolis baſi pappoſis. Gluma exterior flava, ad nudum oculum glabra, ad lentem vitream viſa brevi villo adſperſa, mucrone praelongo, tenero, bipartita. Ariſta ex media, prima parte flaveſcente, valida, tunc geniculo facto reliqua parte gracilior, ſubhirſuta, violacea. Tota ariſta unciae longitudinem ſuperat. Gluma interior paulo brevior, flava, glabra lanceolata. Gluma floris exterior tota villoſa eſt, ea nota ab aegilope differt.

20. AVENA diantha, gluma florali exteriori apice lacera, petiolis pappoſis.

Gramen avenaceum alpinum, minimum, perenne, capillaceis foliis, caule lanuginoſo, caneſcente, panicula argentea ſplendente, glumis villoſis cum ariſtis longioribus, tortilibus, MICHEL. *Piſ. p.* 64.

In alpibus *Hetruſcis*, & in *Brutiis* ſupra Caſtrum *ad Montem* in loco dicto il *Mocco di Camizia*.

Accedit ad noſtram *avenam arundinaceam. Hiſt. ſtirp. Helvet.* ſed differt foliis. Ea neque lata ſunt, neque firma, arundinacea, ſed radicalia & caulina perанguſta, convo-

luta, caulina quidem & latiuſcula vagina nata. Panicula ſpicata, uncialis, in caule dodrantali. Locuſtae biflorae, in exemplo diſtichae. Calycis folia argentea cum flavore inaequalia, alterum minus, acute mucronatum, pene ariſtatum: maius alterum etiam acute mucronatum. Flores alterni. Gluma exterior longe lanceolata, argentea, ſublacero apice ariſta fere ſex linearum, plus duplo flore longior, initio fuſca hirſuta, tunc geniculo flexa, & ultra id geniculum alba, debilis, & levis. Gluma interior argentea, pertenera, quaſi plumoſa; petioli pappo ſericeo plumoſi. Quando ſtamina ſuperſunt addunt ad colorum varietatem, cum ſature violacea ſint.

21. AVENA diantha, calyce flore maiori, gluma florali villoſa ariſta ex baſi, elevata, bicolore.

Gramen avenaceum maritimum annuum, minus, locuſta ſparſa, paniculis ſparſis, argenteis, ariſtis erectis ad extremitatem lateſcentibus. MICHEL. *hort. Piſ. p.* 74.

Piſis & alibi in arenoſis ad mare mediterraneum.

Radiculae albae. Culmus tripedalis, geniculis nigris. Folia ex latis vaginis lineam lata, glabra, dura. Panicula valde multiflora ſparſa, *gramini iunceo radice alba* ſimilis, pedicellis perſubtilibus. Locuſta biflorae. Calycis glumae ovato lanceolatae, argenteae ſublividae, paulum inaequales, floribus maiores. Flores bini, gluma exteriori ſubflava, villoſa, apice albo tenero. Ad baſin eius glumae, ariſta nigra, recta, flori aequalis, ex ſummo & latiore apice emittit filum multo ſe ipſa tenuius, ſenſim ad modum clavae lateſcens, album, iterum floris longitudine. (Valde accedit ad iunceum radice alba, foliis vero differt minime iunceis.

22. AVENA locuſtis bifloris, floſculis ſtrictis, breviſſime inciſis.

Gramen paniculatum, arvenſe, latifolium hirſutum, annuum locuſtis tenuiſſimis viridibus, & ariſtatis. MICHEL. *hort. Piſ. p.* 75.

In *Hetruriae* agris.

Culmus tripedalis; folia glabra, ad tres lineas lata, ora retrorſum ducto digito aſperrima. Panicula ſemipedalis & ultra denſiſſima & confertiſſima. Flores minimi, locuſtae hiantes, biflorae. Calycis glumae duae inaequales, acute mucronatae, altera pergracili. Flores in locuſta duo, graciles, gluma exteriori educente in bidentatum apicem ariſtam bilinearem, debilem, incerti ductus. Haec omnia viridia cum admiſto argenteo nitore. Ab *herba venti* longe differt, quae locuſtis ſit unifloris.

23. BROMUS hirſutus locuſtis ſexfloris ſpicatis.

Gramen bromoides murorum, lanuginoſum, erectum, locuſtis amplioribus ariſtatis in panicula compacta, & propemodum ſpicata, & veluti alopecuroide diſpoſitis. MICHELI *hort. Piſan. p. 76.*

Piſae in moeniis.

Radix exilis, fibrarum principiis inciſis. Culmus cubitalis. Folia ſubhirſuta, lineam lata. Summus culmus in noſtris flexuoſus, locuſtis imis diſtinctis, ſuperne congeſtis in craſſam, & obtuſam ſpicam, compactis. Calix floribus minor altera gluma hirſuta, mucronata, pene ariſtata; altera gracili, breviori, ſtipulae ſimili. Locuſta uncialis, exteres, tota hirſuta, ceterum ſexflora. Gluma floralis exterior hirſuta, acumine in duas ſetas fiſſo, inter quas ariſta prodit, a ſeſquilinea ad tres lineas longa. Interior gluma longitudine eadem, ſed gracilior, plana, mutica inter eminentes exterioris margines adaptata.

24. BROMUS ſpicatus, locuſtis bifloris, calycis mucronibus praelongis florum ariſtis breviſſimis.

Gramen ſpicatum alpinum ſaxatile, craſſa radice, ſpica triunciali, verſicolore. MICHELI.

Caulis degenerans in radicem, rugis annularibus inſignem, longis fibris capillatam. Culmus bipedalis, gracilis, Folia ſeſquilineam lata, glabra, ora nervoque, peraſperis.

Spica gracilis ſuperne tamen confertior, coloribus nunc emarcidis, Calycis duo foliola locuſtae aequalia, longo mucrone, quaſi ariſta locuſtae biflorae. Gluma exterior ventricoſa, lineata ſub biſido apice ariſtam vix ſemilinearem emittit. Interior gracilis eſt & emarginata, & ipſa ariſtam ſubinde inter duo cornicula emittens.

25. BROMUS locuſtis bifloris, ariſta flore breviori.

Gramen bromoides annuum minus, capillaceo folio glabrum panicula contractiore, locuſtis minimis ariſtatis. MICHEL. *hort. Piſ. p. 76.*

In *Feſulano* Monte, *Liburni*, & in inſulis *Venetis.*

Radix inutilis, culmi cubitales, geniculis nigris. Folia mature emarceſcentia, ad lineam lata, glabra. Panicula erecta, ſtricta multiflora, ex viridi ſublutea. Locuſtae biflorae. Calycis duo folia valde inaequalia, alterum magnum, complicatum, florem amplexum, dorſo breviter dentato: minimum alterum & gracile. Folliculus habet glumam exteriorem gracilem, pene cylindricam, apice inciſam, ex inciſura emittentem ariſtam linea breviorem; altera gluma brevior eſt, alba, ſimplex.

26. BROMUS locuſtis in ſpica pauciſſimis, trifloris, calyci aequalibus, glumis ſubciliatis, breviſſime ariſtatis.

Gramen ſpicatum alpinum ſaxatile, craſſa radice, foliis iunceis ſpica breviſſima & verſicolore MICHEL. *hort. Piſ. p. 71.*

In M. *amalphitanis* & petris *apenninnis.*

Radix peculiaris, craſſa, rugoſa, baſi foliis & caulis teneris vaginis obducta. Folia gracilia, iuncea. Culmus nudus, pene cubitalis. Spica breviſſima locuſtarum congeſtarum quinque vel ſex. Locuſtae breves, pene ovatae, triflorae. Calycis foliola ovata lanceolata, inaequalia, locuſtae longitudine. Florum gluma exterior dorſo & lateribus ciliata, trifida, medio nervo in ariſtam brevem, linea breviorem exeunte. Gluma interior etiam acuta, mucronata.

27. ARUNDO locuſtis bifloris muticis, pappo ad baſin breviſſimo.

Gramen paniculatum autumnale minus, Arundinis folio, & facie, panicula ex viridi nigricante. MICHEL. *plant. agr. Florent. hort. Piſan. p.* 75.

In M. *Bono.*

Utique elegans planta differt ab arundine enodi. Radicis fibrae durae, & ſtolones pene bulboſi. Culmi tripedales. Folia patula etiam retroverſa, lineam & paulo ultra lata, non multum uncia longiora, crebra tamen. Panicula brevis, vix biuncialis, petiolis flexuoſis. Calix bifolius, inaequalis, argenteus, flore multo brevior, utraque gluma ovato lanceolata, mucronata, pene ariſtata. Flores bini longe elliptici, ſtricti, acute mucronati, pene nigri, ad baſin breviſſimo pappo excepti. Ita variegata fit panicula ex albo calyce & folliculis nigris.

28. ARUNDO monantha altero floſculo abortivo.

Gramen arenarium ſpicatum ſpica & ima parte caulis lanuginoſa, ſpica diviſa. MICHEL. *hort. Piſan. p.* 75.

In muris Urbis *Florentiae.*

Culmus tripedalis, firmus; foliis glabris, ad lineam latis. Panicula ſemipedalis, ramoſa, nitida, ſublutea. Calycis duae glumae inaequales, flore maiores, glabrae, & nitidae, acute mucronatae. Floris gluma utraque flava, maior tota pappo ſericeo per dorſum nitens, minor glabra. Alter floſculus imperfectus.

29. ARUNDO monantha flore hirſuto, ariſta longiſſima.

Gramen ſparteum ſaxalite anguſtiſſimis, & longiſſimis foliis panicula ſtrigoſiore, ſemine glabro, in uncialem ariſtam deſinente. MICHEL. *hort. Piſan. p.* 73.

In monte *Bono* prope Florentiam.

Caules imi bulboſi, ceterum firmi, teretes, tripedales. Folia radicalia glauca, paulo linea anguſtiora, ſaepe convoluta, dodrantalia, ad caulem perpauca. Panicula ſe-

mipedalis, ſtricta, ut flores parum a caule recedant, eique paralleli adſcendant. Locuſtae calyx biglumis, vix inaequalis, lineatus, vere ariſtatus. Nempe apex glumae cujuſque ariſtam ſemilinearem, multo graciliorem edit. Flos unicus, durus, villoſus, ellipticus, acuminatus, gracilis, ſimili ſemine factus valde adhaerente, baſi pappoſa. Ob pauca exempla interiorem glumam videre nequivi. Ariſtae omnes defractae.

30. PHALARIS calyce divaricato, plano, ovato, ciliato, gluma florali interiori bidentata.

Gramen ſpicatum maritimum tomentoſum, ſpica cylindrica craſſiore. MICHEL.

Gramen typhinum maritimum longius ſpicatum. BARRELIER. *icon.* 717.

Fibrillae radicis longae, multae & graciles. Folia hirſuta, mollia duas lineas lata. Culmi ad terram proſtrati inde erecti, pedales, ſeſquidelales. Spica varia, denſa, cylindrica, biuncialis ſpica varia locuſtae patulae, uniflorae; calycis glumae duae, ovato lanceolatae planae, aequales, longis pilis hirſutae, flore longioribus. Flores bini aequales, exteriori gluma colorata, hic ſublignea modice mucronata, linea dorſali valida, quae in breviſſimum dentem exit interirori alba, bifida paulo brevior.

Lettre de M.r Monnet à M.r de Saluces au ſujet du *Minium*.

MONSIEUR

Vous ſerez peut-être bien aiſe que je vous faſſe part de l'eſſai que j' ai fait pour faire le *Minium*. Cette préparation, qui nous eſt fournie entièrement par les Hollandois, a toujours été pour nous autres français, ſinon un miſtère, du moins une choſe aſſez problématique. Chacun en raiſonnoit à ſa façon. Les uns vouloient, d' après M. Geoffroy, que la réuſſite du *Minium* ne dépendit que d' une réverbération de la flamme qu' il falloit faire éprouver continuellement à la chaux de plomb. D' autres prétendoient y avoir réuſſi ſans cela. Cet objet étoit reſté là longtems lorsqu' il reveilla de nouveau l' attention de quelques têtes chimiques. Car quoique chez nous nous ayons des idées de tems comme de modes, néanmoins il y en a quelques-unes qui reviennent à la charge, ſurtout en chimie; ſience qui n' eſt guère au delà de l'état d' enfance, mais que quelques-uns de nos gens à ſyſtéme oſent croire fort avancée. Je m'embarquai donc dans la recherche du procédé pour faire le *Minium*. Cela ne pouvoit venir plus à propos que dans un tems où j' étois occupé au cours de chimie de Vaugirard. Nous commençames d'abord par faire un eſſai dans une coupelle fort large, où nous fîmes réverbérer la flamme. Quand le plomb fut réduit en chaux, bien loin de le voir paſſer à l'état de *Minium*, nous vîmes qu' il ſe changeoit en une eſpèce de litarge. Enfin, pour ne pas entrer dans un détail inutile, je vous dirai que nous ne pûmes en venir à bout.

Nous abandonnâmes cet essai, & nous nous mîmes à en faire un autre beaucoup plus simple & beaucoup moins pénible. Le voici: Nous plaçômes une large coupelle sur un fourneau dont le diamétre sembloit être fait exprès pour prendre justement le fond de ce vase. Nous mîmes dans cette coupelle trois livres de plomb, lequel ayant perdu sa forme métallique, y faisoit une épaisseur d'un demi pouce. Nous soutinmes un feu propre seulement à entretenir légérement le fond du vaisseau rouge. Nous remuâmes de tems en tems la matière avec une spatule de fer. Nous vîmes avec plaisir que la chaux de plomb, qui fut en très-peu de tems jaunâtre, tournoit insensiblement au rouge. Au bout de 24. heures le *Minium* parût se fixer à un rouge assez éclatant, mais, à la vérité, un peu plus pâle que celui des Hollandais. Ce fut inutilement que nous tentâmes de lui faire prendre une plus grande intensité: il resta absolument au même état.

Après cet essai nous en fîmes un autre; mais ayant voulu augmenter le dégré de chaleur, ensorte que le fond de la coupelle étoit très-rouge, nous vîmes que la chaux de plomb, bien loin de passer en l'état de *Minium*, se tournoit au même état que nous l'avoit donné le premier essai. Il y a plus: du *Minium* déja fait, exposé à un dégré de chaleur au dessus de celui que nous avions employé pour le faire, le changea en très-peu de tems en massicot.

Il paroît donc, que si on n'a pu réussir à faire du *Minium*, cela vient de l'illusion qu'on s'est faite sur le dégré de chaleur qu'on a employé trop fort & sur cette réverbération de la flamme dont on se servoit fort inutilement.

Pour tout dire; mon amour propre se flattoit de recueillir le fruit de cette manière de faire le *Minium*, lorsque M. Macquer, qui avoit vû répéter plusieurs fois ce procédé

m'écrivit

m'écrivit que Boerhaave avoit fait la même choſe que moi. Voici un extrait de la lettre de M. Macquer ſur l' objet en queſtion.

„ Je ſuis tombé ſur la chimie de Boerhaave, dans la-„ quelle j' ai trouvé un procédé qui ne diffère en rien du „ vôtre pour faire le *Minium.* Ce procédé eſt dans le tome „ ſecond page 288. de l' édition latine in 4.° à Paris chés „ Cavelier 1733. je vais vous le traduire mot-à-mot. L'au-„ teur, après avoir décrit le procédé pour faire la céruſe, „ ajoute „ *On voit par là avec quelle facilité le plomb perd ſa forme métallique & ſe change en chaux. Cela arrive de pluſieurs manières. On fait fondre du plomb bien pur dans un vaiſſeau de terre non verniſſé. Ce métal fondu eſt d'abord comme du vif argent; mais bientôt il ſe forme à ſa ſurface une pellicule terne qui eſt une eſpéce de chaux. Si on enléve cette pellicule avec un inſtrument de fer, la ſurface du plomb redevient brillante comme auparavant; mais une nouvelle pellicule s' y reforme auſſitôt, il faut l' enlever comme la première. De cette manière tout le plomb ſe convertit en cette eſpéce de chaux, qui n' eſt pas moins malfaiſante que la céruſe. Cette chaux, ou même la céruſe calcinée ou remuée long-tems ſur le feu, augmente de poids, & devient peu à peu d'un rouge éclatant; c' eſt ce qu' on nomme* Minium. *On peut en faire auſſi en calcinant de même la mine de plomb.*

„ A' ces dernières paroles, ajoute M. Macquer, vous „ devez reconnoître exactement votre procédé pour faire „ le *Minium*; ainſi voyez ce qu' il faut que je faſſe à ce „ ſujet.

Je ne crus pas devoir parler d'avantage de mon *Minium*; car on n'eut pas manqué, comme c'eſt l'uſage, de me traiter de plagiaire. Vous remarquerez que nous avons des gens dont tout le mérite conſiſte à faire ces ſortes de confrontations, & à publier enſuite qu'on n'a rien fait que

copier. A' ce ſujet je ne ſaurois m'empêcher de vous citer un exemple frappant de la bonté d'ame qu'on a pour ceux qui s' aviſent de faire des expériences. M. Beaumé, dont la réputation vous eſt connue, en travaillant ſur l'Ether, avoit reconnu que cette liqueur appliquée ſur un corps, en s'évaporant, y occaſionnoit un froid beaucoup plus conſidérable que toutes les liqueurs évaporables connues. Il eut le malheur de publier ſes expériences en même tems que M. de Cullen publia les ſiennes en Angleterre ſur le même ſujet: auſſitôt on cria au plagiaire. M. l'abbé Nollet eut beau le juſtifier dans ſes leçons publiques; il demeura pour conſtant que M. Beaumé avoit copié M. de Cullen; comme s' il n' étoit pas dans l'ordre de la nature, que deux hommes ſe rencontrent à avoir les mêmes idées & à faire la même choſe.

Vous étes trop philoſophe, Monſieur, pour n'avoir pas pitié de ces hommes à qui cet eſprit de vertige fait faire tant d' injuſtices.

Je ſuis &c.

Monnet.

MÉMOIRE

Sur la rectification, & purification de l'alkali volatil obtenu des ſubſtances animales.

PAR M.r MONNET.

On ſait que l'alkali volatil, en ſe dégageant des ſubſtances animales, n'eſt point pur, à beaucoup près. Il ſe trouve toujours uni intimément avec une matière que presque tous les Chimiſtes ont regardée comme une huile groſſière. C'eſt dequoi on ne peut pas douter en voyant ces alkalis volatils; mais ce à quoi on n'a pas fait attention eſt, que ce n'eſt pas ſeulement cette huile qui les rend impurs, il s'y trouve auſſi une matière fuligineuſe, laquelle eſt intimément unie avec cette même huile. Cette matière peut-être conſidérée comme le reſte des liens qui tenoient l'huile enchainée, laquelle a été enlevée, tant à cauſe de la grande volatilité de l'huile, que de ſon adhérence avec elle: elle contient une très-grande quantitè de cette même matière fuligineuſe, qui lui donne cette couleur jaune & cette conſiſtance épaiſſe qu'on lui connoit. C'eſt cette même matière fuligineuſe, qui eſt la cauſe auſſi de la mauvaiſe odeur qu'ont ces huiles & ces alkalis volatils. Plus on les débarraſſe de cette matière, plus on les rend volatils & agréables. Nous montrerons par la ſuite la méthode la plus prompte & la meilleure que l'on puiſſe employer pour débarraſſer ces huiles de cette matière fuligineuſe.

Pour purifier les alkalis volatils & les avoir parfaitement purs, non ſeulement il faut les dépouiller de cette même matière fuligineuſe, mais même il faut leur enlever juſqu'au dernier atome de l'huile; ce qui eſt très-difficile, comme on va le voir.

De tous les Chimiſtes qui ont tenté juſqu' ici la purification des alkalis volatils, aucun n' eſt encore parvenu à les obtenir abſolument purs. Les uns ont eſſayé de les faire ſublimer, après les avoir mêlés avec des terres abſorbantes; d'autres ont fait paſſer pluſieurs fois de l'eſprit de vin deſſus; mais ces moyens, les meilleurs qu' on ait employé juſqu' à préſent, n' ont point opéré une purification parfaite, quelque grand nombre de fois qu' ils ayent été réitérés. Ces alkalis volatils, quoique très-blancs d'abord, jauniſſoient toujours par la ſuite, en même tems qu' ils conſervoient une forte odeur d' empyreume. C' eſt cette conſidération qui nous détermina, M. Poulletier de la Salle & moi, de mettre en œuvre toutes les reſſources que la chimie nous offroit pour obtenir, s' il étoit poſſible, ces ſortes d' alkalis volatils abſolument purs & entièrement ſemblables à l' alkali volatil qu' on retire du ſel ammoniac.

Nous commençâmes d' abord par faire une diſtillation d' une très-grande quantité de corne de cerf. Après en avoir obtenu le produit, nous ſéparâmes d'abord le mieux qu' il nous fut poſſible, l' huile d'avec l'alkali volatil. Nous ne nous amusâmes pas à réctifier cet alkali volatil comme c' eſt l' uſage. Nous le fîmes diſſoudre dans ſuffiſante quantité d'eau, & nous verſâmes deſſus de l'acide vitriolique juſqu' à une parfaite ſaturation. Nous filtrâmes, & nous eûmes une liqueur ſaline extrêmement foncée en couleur. Il reſta ſur le filtre beaucoup de matière fuligineuſe. Nous fîmes évaporer juſqu'à ſiccité. Il nous reſta une matière ſaline noirâtre, ſentant extrêmement l'empyreume. Voici les expériences que nous fîmes ſur cette matière.

I.° Nous en prîmes une partie que nous triturâmes avec partie égale d'alkali fixe bien pur & bien blanc. Nous exposâmes ce mélange dans une cucurbite de verre, l'ayant ſurmontée de ſon chapiteau & luté les jointures; nous fîmes ſublimer, par un dégré de feu modéré, l'alkali

volatil. Par cette opération, nous l' obtinmes aſſez blanc, mais il ſentoit encore l' empyreume. Nous vîmes cependant avec plaiſir, que cet alkali volatil ne jauniſſoit ni ne changeoit en veilliſſant comme font les alkalis volatils purifiés ſelon la coutume ordinaire.

2.° Une autre partie de notre matière ſaline fut mêlée avec deux parties de chaux éteintes à l'air. Ce mélange mis dans une cornue, fut pouſſé à la diſtillation. Il paſſa dans le balon un eſprit volatil aſſez fort, mais il étoit un peu coloré & ſentoit l'empyreume.

3.° Ces deux eſſais ne nous ayant pas donné l' alkali volatil abſolument pur, nous nous déterminâmes à paſſer de l' eſprit de vin ſur l'autre partie de la matière ſaline qui nous reſtoit, juſqu' à ce que l' eſprit de vin ne s' y colorat plus. Pour cela, nous mîmes notre matière dans un matras; ayant verſé deſſus de l' eſprit de vin juſqu' à la hauteur de deux doigts, nous le fîmes bouillir au bain de ſable, puis nous le ſéparâmes pour en mettre de nouveau. L' eſprit de vin ſe colora dabord fortement; mais y en ayant mis une troiſième fois, il reſta clair & blanc. Cependant cette matière ſaline n' étoit pas blanche à beaucoup près. Nous la fîmes diſſoudre dans de l'eau; nous filtrâmes. La liqueur qui paſſa étoit très-claire & nullement colorée; d'où nous augurâmes que nous avions ſéparé entièrement les parties fuligineuſes & huileuſes de ce ſel. Nous fîmes évaporer cette liqueur. Nous obtinmes, par la criſtalliſation des criſtaux, de ce ſel, c'eſt-à-dire, du ſel ſécret de Glauber aſſez beau. Ayant évaporé tout ce qu'il y avoit d'humidité, nous prîmes ce ſel, que nous décomposâmes avec de l'alkali, de la même manière que nous venons de le dire plus haut. Nous obtinmes cette fois un alkali volatil abſolument pur. La portion de cet alkali qui monta en liqueur, ſe criſtalliſa dans le flacon, en beaux criſtaux tranſparens.

On voit que ce moyen d' obtenir l' alkali volatil, qui eſt un peu diſpendieux & pénible, conſiſte à enlever premiérement l' huile qui unit la matière fuligineuſe avec l'alkali volatil. D'un autre côté, cette matière n' étant pas volatile par elle même, n' a pas de diſpoſition pour s'élever dans la ſublimation de l'alkali volatil. Cependant il eſt bon de la ſéparer par la diſſolution & filtration de notre matière ſaline, comme nous l' avons fait avant la ſublimation de l' alkali volatil, autrement nous avons éprouvé que l'alkali volatil n' eſt point auſſi beau, ni auſſi pur. Il y a apparence que l' alkali volatil en enlève quelques parties, ou, ce qui paroitroit aſſez vraiſemblable, que cette même matière fuligineuſe, éprouvant l'action du feu, ſe décompoſe & fournit de nouveau de l' huile & de l' alkali volatil, qui altérent la pureté de celui-ci.

Pour parvenir à rectifier & à purifier l' huile animale, il faut la dépouiller de ſon fuligineux. La plus part des artiſtes n'ont point employé d'autre moyen, pour parvenir à rectifier leur huile & à la rendre blanche, que la diſtillation, qu' ils ont réitérée juſqu' à trente fois. Chacun ſent ſuffiſamment combien une pareille manœuvre eſt ennuyeuſe & diſpendieuſe. Cependant cette manière de purifier cette huile, a été regardée ſans examen, comme celle que l'on devoit ſuivre néceſſairement pour avoir cette huile douée de toutes les qualités qu' on y déſire. Quelques uns rebutés de ce travail ont cherché à abréger cette opération, en ſe ſervant des intermédes: ils ont employé pour cela les terres abſorbantes, mais ſans ſuccés. Pour ne pas entrer dans un détail inutile ſur ce ſujet, nous dirons qu' il n'y a que les acides, qui, mêlés avec ces huiles empyreumatiques, retiennent la matière fuligineuſe, la fixent en lui donnant plus de conſiſtance, & procurent l' huile, dés la première diſtillation, très-claire & très-limpide. Il ne s' agit pour cela que de verſer goutte à goutte ſur

cette huile, d'un acide étendu dans de l'eau jusqu'à ce qu'elle ait acquis beaucoup de consistance, la distiller ensuite à une foible chaleur, soutenir le feu toujours au même dégré. L'huile qui montera sera très-claire & très-blanche, & très-volatile. Il se peut aussi qu'on soit obligé de rectifier une autre fois cette huile, comme il m'est arrivé de le faire plusieurs fois; mais je puis assurer que par cette seconde rectification, cette huile se trouve aussi belle qu'il est possible de l'avoir.

Paris ce 15 *Avril* 1768

THERMARUM VINADIENSIUM

Encheireticae ſyntaxis ſpecimen primum

JOANNIS ANTONII MARINI.

ET aliud quidem alii aſſecuti ſunt, verum totum nullus adhuc ex prioribus. (1) Immerito autem nullus aliquis ipſorum reprehendatur, propterea quod invenire non potuerunt. Imo laudandi potius omnes, quod inveſtigare conati ſunt. Hip.

§. I.

Convallis, in qua ſcaturiunt thermarum fontes, in regione Vinadienſi eſt; Vinadium, a quo diſtat millia quatuor pedemontana Cuneenſis provincia pagus eſt, Taurinenſis nunc Diœceſis, iuxta torrentem *ſturam* poſitus. Via primum ſatis ampla per *ſturae* vallem, mox ad radicem declivis montis *olivae* circumiens arcta, ſaxoſa, & inſtabilis erat; ſed quae a provida clementiſſimi Regis auctoritate, & benignitate, ſuorum commodis, ſalutique conſulturi, nunc translata, & emendata reperitur. Semilunarem convallem extenſionis ſemimilliaris formant duo altiſſimi montes minoribus aliis interſecti convallibus. Qui boream, & aquilonem ſpectat vulgo *eſclaudas* nominatur, qui vero orientem ſolem, & auſtrum, *oliva* dicitur. Ille ſilvis, & pratis vireſcit; iſte fere nudus conſpicitur.

(1) Qui de thermis Vinadienſibus ſcripſerunt, ſunt 1. Bartholomaeus Viotti a Cliviolo anno 1552. 2. Andreas Bacci 1571. 3. Franciſcus Gallina 1572. 4. Spiritus Rainaudus 1681. 5. tandem Johannes Fantonus 1747.

II. Silvas ornant abies, larix, fraxinus, tilia, ſorbus, ceraſus, & frangula nigra. Prata luxuriant rhapontico, biſtorta, orchidum, lycnidum, & liliorum ſpeciebus variis; tum huc illucque invenias ſtirpium plurimarum, rariorumque varias, & elegantes ſpecies (2). Regio haec alpeſtris fundit ex ſe paſtus ingentibus gregibus, & exiguae boum copiae. Rupicapra, lepus candidus, & mus alpinus ſolivagus hic eſt. Volucrum genus perrarum. Aſt phaſianus, & perdix cum perpaucis aliis nidulantur. Torrens *Iſciator*, qui convallem irrigat, farione abundat. Foſſilia varia tum ad verticem, tum ad radicem montis *olivae* ſparſim inveniuntur, quae inter diſtingui merentur Pyrites ſulphureae, marcaſſitae, haematites, & ocra ferrea modo ſpato, modo quartzo contenta, quorum ſingulares ſpecies enumerare, & diſtinguere ad me non pertinet, ceteraque non perſequar.

III. „ Loci illius aërem ſatis temperatum ferunt, praeſertim „ vere, & autumno, etiamſi vallis tota ventis a meridie „ fere ſemper agitetur praecipue ſereno tempore: Ita Barthol. a Cliv. de baln. nat. virib. cap. 34., quod verum: attamen ventorum directio, ut ſolis proſpectus, variat; hinc mane decumanus, auſter meridie, libs veſpertino tempore valide ſufflant. Occaſo verum ſole placidus Favonius vix ſpirat. Nocte hydrargirus in reaumuriano thermometro plerumque ſtat ad gr. 7. ſuper *o*, mane ſudo caelo inter gr. 10., & 12., cumque pluit, vel caliginoſum eſt caelum inter gr. 7., & 8. conſtat meridie ardente ſole gr. 15. vix aſcendit haec ſubdio: domi vero temperiei gradus eſt a gr. 12. ad 15. neque unquam 17. ſuperat.

(2) Achillea foliis integris, odoratis, cuneiformibus, in apice dentatis flore ptarmicae. Carol. Allion. ſtirp. rar. ped.
Abſyntium alpinum ſpicatum foliis petiolatis biſtrifidis, & abſyntium alpinum candidum, humile foliis caulinis pinnatis Gaſp. Bau Ah.
Cardamine Caeſari folio lin.

IV. Ad montis radicem huc, illucque ſparſa inveniuntur paſtorum tuguriola trabibus fere cilindricis incardinatis, ut plurimum contexta, ſtramento, aut ligneis tabulis tecta in ſitu a nivium, ſaxorumque ruina tutiore ſita, quae tamen notabili tractu a thermis diſtant. Quare ad infirmos recipiendos commodiori, propinquiorique receptaculo opus erat. Varia priſcis olim temporibus conſtructa fuere, quorum veſtigia nec dum adhuc conſpiciuntur, quia vel ſubtus praerupto declive monte ſita a ſaxorum, niviumque ruinis everſa, vel in humiliori convalle poſita a torrentis turgeſcentis impetu divulſa fuerunt. Quae vero nunc ſagaciter aedificata domus eſt ad ipſorum fontium ſcaturiginem ſatis ampla, commoda, ſtabiliſque manet multiplicibus undique lavacris, & laconicis munita.

V. Ad angulum eminentiſſimi montis *olivae* meridiem verſus inclinantis, ubi convallis dilatari incipit ſaluberrimi fontes ſcaturiunt, quos ſic enumerare, & diſtinguere lubet (3).

Primus, qui veteris luti ciſternam format, congeries videtur plurimarum ſcatebrarum ex imo exilientium, lutaque perfodientium. Huic veteres luti nomen dedere vulgo *le fanghe.* Caloris gradus erat a 40. ad 42. (4).

Secundus ab elatiori ſaxi rima profluens paſſus triginta a primo diſtans fere ſub ſacello domeſtico divae Magdalenae dicato poſitus potionibus dumtaxat inſerviens a qui-

(3) Fontium diſtinctio, eorumque denominatio debetur eximio, ſollertique viro D. Giavelli medicinae doctori thermarum domino, & moderatori.

(4) Quae de caloris gradu tentavi experimenta, repetita fuere annis 1763., 1764., 1766., & 1768. in omnibus fontibus abſque diſcrimine, primo excepto, ubi lutorum veterum receptaculum adeſt, in quo notabiliter variabat aquarum calor pro ut maior, aut minor frigidae aquae copia thermalibus admiſcebatur; prope thermas enim naſcentes frigidiſſimi fontes, huc nondum quamdiu adfui, conſtanter omnino ſegregati fuerant, quod nunc factum; unde caloris gradus eiuſdem fere ad 50. adſcendit.

busdam diureticus appellatur, & vulgo *la Maddalena.* Caloris gradum habet a 34. ad 36.

Pone balneariam domum ad angulum eiusdem monte ipso connexum ex quamplurimis rimulis numerosi sparsim exiliunt fonticuli, quorum unus, alterve arte simul collectus in tres distinctos rivulos distinguitur.

Horum primus ordine tertius militibus lavacra praebens, ad quorum diversorium per ligneum tectum canalem perfluit aqua, caloris gradu fovetur a 44. ad 46. cuique *la militare* nomen impositum est.

Post hunc quartus rivulus lavacra superiora ministrans temperato gaudet caloris gradu a 29. ad 30. huic idcirco temperati, vulgo *la temperata* consentaneum videtur.

Quintus ad inferiora balnea diffluens, quo numerosa plebs immergitur, & calens est ad gr. 46. *la paesana* nuncupatur.

Praeter haec, novus nuperrime rivulus ex variis, minimisque temperatarum aquarum scatebris confectus est, quique lavacris superioris domus, & nobilioris recenter aedificatae replendis inservit, qui calet a gr. 32. ad 33., & *la nobile fontana* dicitur.

Numerosi praeterea surculi nullo usui inservientes aquarum aliunde passim scaturiunt, quorum nonnullorum calor exploratus erat a gr. 25. ad 27., & *le lagrime* nominantur. Quae demum lutis fovendis in superiori nova cisterna inserviunt aquae, & *le polle de' fanghi* dicuntur, eumdem fere, ac illae lutorum veterum caloris gradum habent.

VI. Perenne aequale diametro calentes omnes gradu suo vario scaturiunt thermales Vinadienses aquae in directione lineae diagonalis ascendentis, spatio passus vix centum.

Vapores hepatis sulfurei odoris ab illis perfluentibus, aut stagnantibus continuo manant, densissimi caliginoso coelo, minus sereno (5). Color thermalium a frigidarum

(5) Varietates caloris gradus adnotatae referri debent ad varium coeli statum; maior enim calor exploratur nubilo coelo, minor sereno.

aquarum colore nullo modo differt. Sapor fere nullus primum, ſed qui brevi foedatur, dum calidae potantur, ab halitu ſingulari nidoroſo ovis coctis induratis ſimillimo. Hydrometro probatae pondere grani unius, vel alterius ſuperant ceteras vicinas frigidiores. Tactu ſaponaceae perſentiuntur. Ex latice ipſarum ſponte varia ſecedunt, & primum curſu pauliſper declivi gelatinoſa cinerei coloris ſpermatis ranarum ſimillima ſubſtantia arenulis adhaerens ſegregatur, quae ſub dio conſiſtentia tenaciori, & craſſitudine aucta, colore mutato ſenſim diſtinguitur in corpus, quod vulgo *muffa* nuncupatur. Secundo, ubi ſtagnant, & praecipue in lutorum foveis terram cineream ſubpinguem deponunt. Tertio ad fontium, rivularumque margines, & ad ſaxorum contingentium latera ſal quidam, ſeu potius ſalino-formis terra ab illis in grumulos ſecernitur.

VII. Calorem diu ſuſtinet ex fontibus hauſtae, igni vero ad ebullitionem expoſitae, non eam brevioris temporis ſpatio concipere valent, quam quo frigidae communes aquae. Vaſe vitreo ferventes receptae numeroſas elaſtici aëris bullulas emittunt, ex quo fit, quod ſi calentibus adhuc ipſis praecoci vaſis obturatione coerceri experiatur, vas quandoque cum fragore diſrumpatur. Argentum tum immerſione, tum vapore primum colore aureo tingunt, mox violaceo, & tandem nigro. Moderata doſi epotae nullum in pleriſque ſenſibilem effectum praeſtant: acuta vero in nonnullos ſpeciem quamdam temulentae hilaritatis inducunt, quoſdam per alvum valenter purgant, faeceſque nigro colore tingunt, permultis diureſim copioſam movent, omnibus inſenſibilem perſpirationem augent, unde induſia uliginoſa apparent. Lac nullomodo coagulant, bilem in flocculos turbant, ſanguini humano extracto, & repenti mixtae, eum diutius fluidum ſervant, rutilioremque reddunt, cruſtam pleuriticam emolliunt, ejuſque inferius cruoroſum tomentum in liquamen fundunt, calculorum fragmenta longa

immersione solvunt. Aptissimae ad sapidi panis confectionem probantur. Evaporatione ab iis subsidet terreo-salina substantia, quae habetur ad grana quinque ex quaque aquae libra eiusdem ferme naturae, ac quae sponte ab illis perfluentibus separatur. Transvectae, clarae, limpidae, & incorruptae per annos servantur absque sedimento, flocculis, aut pellicula. Tepefactae post longum tempus nidorosum halitum rursus emittunt, saporemque foedum.

VIII. Ab affusione syrupi violarum recenter parati pulcherrimum viridem colorem ostendunt, ab eodem vetusto citrinus color apparet. A gallarum pulvere tarde rubicundae fiunt (6). Solutio saturni acida eas turbat colore fusco. A solutione mercurii sublimati corrosivi obscurantur, mox praecipitato aurantio pulvere salino-formi, vitri dilute rubri colorem mentiuntur. Ab instillata solutione argenti lactiginosae fiunt, & cinereo-violaceum sedimentum deponunt. Ab affusione olei tartari per deliquium in niveos flocculos perturbantur. Quae omnia eodem, ast minus intenso modo accidunt in iisdem transvectis caute servatis.

IX. Corpus, quod vulgo *muffa* dicitur, substantia est fungoso-gelatinosae texturae (7) coloris modo obscure viridescentis, modo cinerei, quandoque flavi, saepius, & diutius rosei (8) dimensionis variae, ut extensionis, &

(6r) Quod negatur a Fantono. Ast experimenti habiti ratio ex alterius relatu falsa esse poterat absque iniuria viri celeberrimi, quum ipse nunquam thermis adfuerit. Confer. comm. eiusd. de Ther. Vinad.

(7) Substantia haec a Botanicis regno vegetabili adscribitur, eamque referunt ad Classem XXIV Cryptogamiae algarum sist. natur. Carol. lin. n. 1067. Tremella fructificationi vix manifestae in corpore gelatinoso. Ast ad nullas praeclari auctoris species spectare videtur, nec caracteribus insignitur tremellae Thermalis clarissimi Vandelli. Coufer. Domin. Vandel. dissert. prima de thermis aponi.

(8) An colorum varietas a vario fructificationis tempore pendet? Nuper anno 1768. mense augusto omnes coloris rubescentis omnino conspiciebantur, dum anno 1766. mense Iulio fere omnes fuscae, & viridescentes apparebant. Verum color totam intimam penetrat substantiam, dum plantae vegetatio, & fructificatio solam superficiem sternere videtur. An a varia fossilium vario tempore per salia abrasione?

craſſitiei undique rivulorum imae parti adherens, ab iiſque quandoque pendula. Tepens nares ferit odore pulveris pirii accenſi; ſapor eius vix ſubſalſus, & nauſeoſus. Tactu experitur ponderoſa, lubrica, nullo modo glutinoſa, mollis verum, elaſtica, & ad diſruptionem tenax. Calorem in rivulis eundem ſuſcipit, quem habent aquae matrices. Vaſe clauſa aqua repleto incorrupta per annos, & inodora ſervatur pallido colore roſeo omnimode, & ſolo praedita, quae tandem in fimbrias ſponte ſeparatur. *Muſſae* extra aquam ardenti ſoli expoſitae brevi temporis ſpatio corrugantur, extenuantur, breviantur, & exſiccantur, colorque varius tunc mutatur in cinereo-obſcurum nonnullis tantummodo crideſcentibus ſuperſtitis maculis. Accenſae candelae admotae odorem ſpargunt illi proximum, quem dat agaricus ad eſcam paratus accenſus. Flamma caeruleo-rubra ſcintillant, leviter crepitant, donec exuſtae in cinerem nigerrimum abeunt, qui ferri magnetici probatione contenti martis ſigna praebet. Aqua communi maceratae unguinem violaceum ſupernatantem oſtendunt, augentur mole, & emolliuntur.

X. Terra, quae per thermales aquas vehitur diverſae naturae eſſe reperitur. Nam 1.°, quae inter lamellas exſiccatarum *muſſarum* invenitur levis, cinerea, & lubrica eſt, quae cum acidis effervefcit, ut ea, quae lutorum baſim format. 2.° Quae ex ſalina ſubſtantia praecipitatur fulvo colore lintea tingit, tincturam gallarum, & helitropii violaceo colore afficit, crucibulo exuſta in martis crocum convertitur. 3.° Creta fluida ghur ſimillima, vel lacti lunae betlemitico analoga identidem ex ſaxi rimis delabi cernere mihi contigit.

XI. Salino-terrae ſubſtantiae ſpontaneam ſecretionem a thermalibus Vinadii aquis triplici pariter modo conſiderare praeſtat. Nam 1.° ad latera arenacea, & ſaxoſa rivulorum albae farinae adinſtar parva copia ſeparatur, & tarde in

minimos acervulos excrefcit (9). 2.° Circum ftagnantes ipfas aquas in lutorum praecipue veteri cifterna ad faxeum marginem citrino plerumque colore praedita maiori copia fegregatur (10). 3.° ex fola aquarum vaporofa exhalatione in hypocauftis facillime, & uberrime faxorum afperis fuperficiebus adhaerefcit, & in grumulos incruftatur (11). Sapor non omnium idem; primae enim acute falfus eft; 2.ae, & 3.ae praecipue falfo-aufterus, quae ad ignem vix crepitant, nunquam diffiliunt, & in vefficulas inflantur; contra falina prima fubftantia, ut ea, quae per arte factam evaporationem habetur, falfo-nuvriatica videtur, ad ignem crepitat, & diffilit (12).

XII. Salia haec nullo modo cum acidis vegetabilium effervefcunt; fpiritui falis, nitri, & vitrioli mixta vix fenfibilem fibilum edunt. Aqua communis hifce fatura, a firupo violarum in viridem intenfe herbaceum (13) protinus

(9) Solus fecretionis fpontaneae modus ab eximio Fantono ex relatione cognitus, cui favere fecretioni putat „ alpinam illam regionem per diu frigidam, & brumalem tempeftatem vid. ibid. fol. 8. Aft omni tempeftate, & quolibet tempore falia & confparfa exiftunt.

(10) Quod nunc etiam fit in recenti lutorum fovea. Ita mihi nuperrime referebat D. Giavelli.

(11) Simillima falina fpontanea concretio ex ipfa fola aquarum evaporatione ad latera cavernae facta, per quam in imo fluit rivulus aquarum thermalium de *baguerez* recenter obfervata eft annis 1765., & 1766. ab eximio Pharmacopola Campmartin. confer. Diar. Gallic. an. 1768. menfe April.

(12) Quod difcrimen pendere videtur ex eo, quod vapor flogifto, & acido vitriolico fcateus difperiatur tum aquarum evaporatione, tum longa lixiviatione: lixivium enim primum falis fodae odorem haepatis fulphuris dabat, qui fenfim in vapores difperdebatur, & aberat in fecundo, & tertio. Ita experiebatur celeber. Gettlotkal. Journal. de Médec. &c. par M. de Vanderm. tom. X. an. 1759. fol. 42.

(13) Mutatio coloris fyrapi violarum in viridem per aquas fale faturas ab omnibus hucufque aquarum medicatarum analyfim experientibus, ut ab ipfis celeberrimis Hoffmanno, Valerio, & Shaw pro caracteriftico figno alkalefcentiae contenti falis habita eft. Aft nuperrime in dubium revocabatur ab illuftri M. Creumanno, & tandem plurimis, firmiffimifque experimentis falfum demonftrabatur ab eximio Comite de Salus in act. foc. reg. Taurin. tom. 3. pag. 153., & feq.

mu-

mutatur colorem, qui paullatim, & tarde ruber evadit. Carta caerulea in eam immersa, & exsiccata pallidior fit colore ad luteo-rubrum vergente. Ab infusione pulveris gallarum statim violacea fit, mox nigra. A solutione saturni turbatur fusco colore. A solutione mercurii sublimati corrosivi rubra efficitur mercurio praecipitato sub forma aurantii pulveris. Ab oleo tartari per deliquium in niveos flocculos perturbàtur, quod idem evenit cum argenti solutione. Soluta salia in lixivio alkalino cum ultramarino animali vulgo *bleu de prusse* hypostasim praebent caeruleo-pallidam. Sedimina omnia dant luteum colorem lintea tingentem. Ab infusione huiusce substantiae terreo-salinae dragmae unius cum semisse in spiritu vini rectificati unciis tribus color mutatur in leoninum, pelluciditas spiritus non evanescit, ast post ebullitionem lactiginosus fit. Flamma eiusdem in cocleari argenteo accensa erat primum alta, elata, & cerulea, mox in medio rubra cum succedente levissima crepitatione, & intermixta scintillatione (14). extincta sponte flamma, & quod adhuc aquosum supererat evaporatum reliquit grana duo terrae citrini coloris, saporis salso-acerbissimo.

XIII. Verum purus thermarum sal facillime haberi potest solutionis ope eiusdem substantiae terreo-salinae in aqua communi distillata, repetitae deinde filtrationis, evaporationis, & cristallizationis. Ab eiusdem enim uncia una probe exsiccata in unciis octo aquae soluta habui primo terrae arenaceae, insipidae per decantationem subsidentis, & siccatae dragmas tres; secundo a filtrationibus repetitis terrae impalpabilis luteae, sub austerae tincturam gallarum nigro colore afficientis dragmam unam cum semisse: tertio

(14) Quo experimento ex celeberrimi Maquer sententia probatur salis medii maior, aut minor solubilitas. Conf. ejusdem exp. in Miscel. Taurin. tom. 3. pag. 1. & seq.

tandem poſt evaporationem ad cuticulam ſalis puriſſimi, criſtallizati, albidi, lucentis fere dragmas tres.

XIV. Enixi ſales varias figuras oſtendunt, quarum duae evidentiores manifeſtantur. Alii enim oblongi ſunt, ſtriati, modo truncati, modo in apice priſmatici, vel cuneformes, quos inter quadrangula conſpiciuntur nonnulla. Saporem ſalſum linguae praebent non peracutum, acidulo-amariuſculum, & pauliſper frigeſcentem, ad ignem ebulliunt, inflantur, leviter ſcintillant, crepitant, & diſiliunt; aeri expoſiti luciditatem amittunt, farinaceo pulvere albiſſimo velantur, & tarde deliqueſcunt. Cum ſolutione ſyrupi violarum intenſe viridem colorem praebent, cum tinctura gallarum ruffum (15). Praeterea ex renovato experimento ſemel contigit obſervare albidas efflorescentias acinaciformes pediculis ſuis connexas ſaporis acute ſalſi, frigidiuſculi, ad ignem non crepitantes, nec diſilientes, verum ebullientes cum inflatione in veſſiculas, & levi ſcintillatione, quaeque cum ſyrupo violarum citrinum colorem praebebant.

COROLLARIUM.

Haec ſunt, quae ex iteratis obſervationibus, & experimentis de thermarum Vinadienſium natura, qualitatibus, &

(15) Suſpicatus eſt Rainaudus de praeſentia nitri, vitrioli, & aluminis in thermis Vinadienſibus: Aſt experimenta, & rationes quas profert, ut futiles rejecit Fantonus pag. 9. Comment. Confer. *Trattato de' Bagni di Vinaglio di Spirit. Rain.* 1681. *cap.* 4. *trat.* 2. *pag.* 32. Qua diverſa quantitate turgeant ſalinae huiuſce ſubſtantiae thermarum aquae ex variis fontibus hauſtae, & qua varia terrae copia mixtae, nondum in ſingulis experiri otium datum eſt. Verum ex nonnullis obſervationibus conſtare videtur terrae, & unguinis maiori copia ſcatere calidiores prae ceteris, ſalis vero quantitatem fere eamdem in omnibus adeſſe: nec reticendum praeterea me in criſtallizatione probanda uſum fuiſſe terreo-ſalina ſubſtantia ſecundae, & tertiae ſpontaneae ſecretionis, quae maiori copia, & facilius colligi poteſt.

& proprietatibus mihi constant. Plura adhuc ad illustrandam earum analysim, & ad contentorum elementorum specificam naturam, nexum, combinationem, & calculum determinandum deficere reor, quae si otium, & occasio rursum favet, renovato ad thermas itinere, attentiori, solertiorique examine excerpturum me spero.

Ex his tamen, quae prolata sunt coniectare licet thermales Vinadienses scatere primum flogistico hepatis sulfuris vapore, tum spiritu aethereo elastico, mox sale medio ex basi alkalina marini salis, & acido vitrioli multa terra solubili variae naturae, & praecipue argillosae, seleniticae, & ocraceae martialis contaminato, nitrum singulare spatosum solitarium suspicari posse, vitriolum martialis naturae reperiri.

Hinc sufficit, quod thermales istae hisce principiis divites saluberrimos in oeconomia animali morbosa valeant effectus praestare mucidos, viscidosque humores incidendo, acres condiendo, & demulcendo, solida nervoso membranaceo-musculosa blande stimulando, abstergendo, & impervios meatus reserando, & similia.

Epotae idcirco facultatem habent ventriculum, & intestina detergendi, eorumque fibras roborandi; acidum absorbendi, & immutandi; inertes salivas acuendi, sanguinis circuitum incitandi; secretiones, excretionesque urinae potissimum, & perspirationis insensibilis promovendi. Unde humorum inquilinorum dilutio, immutatio, coctio, & excretio.

Per temperatum balneum cutem abluunt, abstergunt, emolliunt; sanguinem diluunt, stagnanti limphae fluiditatem conciliant, & sudorem movent. Per hypocaustum universi corporis superficiei, & per irrigationem singulis partibus concitatiorem oscilationem, vividioremque motum impertiendo febrem concitant, per quam congestorum, viscidorumque humorum disgregatio, resolutio, aut suppu-

ratio consequitur. Tandem, quod per illutationem, aut *muffarum* fotum infirmis partibus comparatur levamen ab actione balneis, irrigationi, & vaporationi analoga pendere videtur, quae moderatur paregorica *muffarum* virtute, aut augetur lutorum firma adhaesione.

MÉMOIRE

Sur la combinaiſon du Mercure avec le tartre.

PAR M.r MONNET.

Mr. Margraf nous ayant fait connoître que le mercure précipité de l' acide nitreux où il a été diſſous, étoit ſuſceptible de ſe rediſſoudre dans l' acide du vinaigre, auſſi bien que pluſieurs autres ſubſtances métalliques traitées de même. Il étoit tout naturel, en partant de ce point, d'examiner ſi la crême de tartre, le plus foible de tous les acides, ne pourroit pas opérer la même diſſolution. C'eſt en effet de quoi j' ai eu lieu d' être ſatisfait, tant par la réuſſite de cette diſſolution, que par pluſieurs autres obſervations que j' ai eu occaſion de faire ſur cet objet. Voilà ce que je me propoſe d' expoſer dans ce mémoire.

Pour avoir un précipité de mercure pour faire mes expériences, je pris ſix onces de mercure que je mis à diſſoudre dans ſ. q. d' eau forte; lorſqu' il fut parfaitement diſſous, je verſai deſſus autant d' alkali-fixe en *deliquium* qu' il en falloit pour précipiter entièrement le mercure. Je verſai ce précipité ſur un filtre, & j' y paſſai pluſieurs fois de l' eau chaude pour l' édulcorer parfaitement. Je fis ſecher ce précipité, & il ne ſe trouva tout juſtement que du même poids du mercure que j'avois employé. Je ne fus point ſurpris de ne point trouver de l'augmentation de poids dans ce précipité, puiſque j'avois déja éprouvé qu' il étoit bien difficile d' empécher qu' il ne reſte toujours quelque peu de mercure diſſous dans l' eau des lavages, à cauſe de la difficulté d'attraper le véritable point

de ne ſaturer juſtement que l' acide qui eſt uni au mercure ; car ſi l' on outrepaſſe la doſe d'alkali, cet excédent tiendra un peu de mercure en diſſolution dans l' eau ; de même que ſi on ne met pas aſſez d' alkali, l'excédent de l' acide, comme on ſait, gardera une portion de mercure. Le déchet que j'eus, fut d'environ 2. gros, que j'obtins de mes eaux de lavages en les faiſant évaporer.

Je ne marque ici la manière dont j' ai fait ce précipité, que parcequ' il eſt eſſentiel de faire connoître la quantité de mercure qui s'eſt unie à la crême de tartre ; & comme on ne peut l' évaluer que par le précipité, il eſt néceſſaire de montrer la quantité de précipité que j' ai obtenu d' une quantité donnée de mercure.

Premier procédé. Je pris deux onces de crême de tartre bien pulvériſée que je mis dans une terrine de grés, qui contenoit environ trois pintes d' eau, je plaçai cette terrine ſur un bain de ſable, & lorſque la crême de tartre fut diſſoute, j'y mis une once de mon précipité mercuriel en remuant continuellement ; il ſe fit auſſitôt une petite ébullition, qui ſe ſoutint pendant quelque minutes avec beaucoup de bulles qui venoient ſe crever à la ſurface ; préſage de la diſſolution du mercure. La couleur briquée du précipité mercuriel diſparut, & il ſe fit un précipité blanchâtre au fond du vaiſſeau, beaucoup plus conſidérable que le volume du précipité mercuriel que j' y avois mis. Je filtrai alors la liqueur à travers le papier gris, & j' ajoutai à ce précipité, qui avoit reſté non diſſous au fond de la terrine, une autre once de crême de tartre ; je verſai deſſus autant d'eau que la première fois. Je laiſſai encore le tout le même éſpace de tems, c'eſt-à-dire, une bonne heure. Cette fois je n'eus point d' ébullition. Je filtrai, & j'ajoutai de nouvelle eau bouillante ſur ce qui étoit reſté au fond du vaſe. Je répétai pluſieurs fois la même choſe : mais il me reſta encore beaucoup de ce précipité,

qui me paroiſſoit inſoluble. Je fis évaporer enſemble toutes ces eaux ſalines au bain de ſable ; lorſque la liqueur fut évaporée d' un bon quart , il commença à paroître à la ſurface des petits criſtaux ſemblables au tartre vitriolé. Je laiſſai refroidir le vaiſſeau de lui même ſur le bain de ſable ; ces petits criſtaux s' étant multipliès, toute la ſurface de l' eau en fut couverte comme d' une pellicule. Je décantai , & enlevai ce ſel , qui étoit jaunâtre : ayant voulu l' expoſer au ſoleil pour le faire ſécher plus promptement, je fus fort ſurpris de l' y voir devenir noirâtre ; mais me rappelant que pluſieurs préparations mercurielles, telles que le mercure ſublimé doux, le précipité blanc , éprouvent le même changement de couleur étant expoſées au ſoleil ; ce fut pour moi une nouvelle confirmation de la combinaiſon du mercure avec l' acide du tartre. Je fis auſſitot une autre expérience qui me prouvat la même choſe : ce fut de frotter ce ſel ſur du cuivre, qui lui laiſſa une trace blanche : d' ailleurs ce ſel annonçoit au gout quelque choſe de mercuriel; j' achevai d' évaporer la liqueur , & il me reſta un ſel qui me parut beaucoup moins mercuriel que le premier. J' examinai enſuite ce qui avoit reſté ſur le filtre & dans le fond de la terrine , je trouvai que c' étoit également une combinaiſon du tartre avec le mercure. Les expériences que je fis pour m'en aſſurer , furent : premièrement de l' expoſer au ſoleil , il y noircit ; ſecondement d' en expoſer ſur les charbons ardens, il en partit des vapeurs qui ſentoient l' huile de tartre ; troiſiémement, de le frotter ſur du cuivre, qu' il blanchit encore mieux que celui que j' avois obtenu par la criſtalliſation. Son gout étoit auſſi plus neutre , c'eſt-à-dire , qu' on y ſentoit moins le gout aigrelet du tartre.

Je commençai dès-lors à comprendre pluſieurs vérités tres-importantes que je détaillerai par la ſuite. Premièrement, que le tartre devient d' autant plus difficile à ſe diſſoudre

qu' il ſe combine avec une plus grande quantité de mercure. Secondement, que la portion de cette combinaiſon qui approche le plus de l' excés d' acide, eſt la première qui ſe diſſout dans l'eau. Troiſièmement, qu' il eſt poſſible, en ſuivant ce principe, de changer cette combinaiſon par de ſimples lotions, qui en enlevant d'abord ſa portion la plus acide, laiſſeront en arrière le mercure avec le moins d' acide poſſible; & qui enfin le dépouilleront totalement de ſon caractère ſalin. Quatrièmement, qu' il eſt poſſible de remettre les choſes telles qu' elles étoient auparavant, en reſtituant au mercure le tartre qu' on lui a enlevé.

Avant d' en venir aux preuves de ces quatre propoſitions, je crus qu' il convenoit de m' aſſurer, avant toute choſe, de la meilleure façon de faire cette combinaiſon, que je n'appelerai plus, déſormais, que tartre mercuriel, à l' imitation de la combinaiſon du tartre avec le fer & avec l' antimoine, à qui on a donné les noms de tartre martial, & de tartre émétique.

Second procédé. Je pris deux onces de mon précipité mercuriel que je mêlai avec quatre onces de crême de tartre. Je jettai ce mélange tout à la fois dans une grande quantité d' eau bouillante; je ſoutins ce mélange quelque tems ſur le feu, en remuant continuellement: je filtrai & procedai comme ci-devant; il reſta beaucoup de précipité au fond du vaiſſeau, tout-à-fait ſemblable à celui de l'expérience précédente. Le tartre mercuriel que j'obtins cette fois-ci, ne me parut pas différer en rien de l'autre.

Je m' arrête ici pour faire remarquer, que quoique le vaiſſeau dans lequel j' avois fait cet éſſai n' eut pu tenir aſſez d' eau pour diſſoudre toute la crême de tartre, le mercure ne laiſſa pas néanmoins d' être entièrement diſſous: ce qui fait voir que la crême de tartre n' a pas beſoin d' être diſſoute pour agir ſur le précipité mercuriel. On remarque auſſi la même choſe à l' égard du fer &

du cuivre ; le tartre agit ſur ces métaux, & s'y unit ſans être diſſous.

Troiſième procédé. Enfin, après pluſieurs eſſais, je trouvai que le meilleur procédé étoit celui-ci. Prenez une once de précipité mercuriel, triturez-le avec trois onces de crême de tartre, diviſez ce mélange en quatre parts, projetez-en une ſur deux pintes d' eau bouillante dans une terrine placée au bain de ſable. Dès que l' ébullition aura paſſée, c'eſt-à-dire, après un demi quart d' heure, filtrez, & verſez ſur ce qui reſtera au fond de la terrine autant d' eau bouillante que la première fois. Après un moment, filtrez comme auparavant, & mettez une autre part du mélange dans le vaiſſeau ; verſez y de même deux pintes d'eau bouillante, & traitez là ainſi que la première, & ſucceſſivement les autres de la même manière ; mettez toutes vos liqueurs enſemble & faites les évaporer, pour en obtenir, par criſtalliſation, le tartre mercuriel. De cette manière, on aura cette combinaiſon auſſi parfaite qu' il eſt poſſible de l' avoir.

Malgré cela, il reſtera encore au fond de la terrine un peu de précipité, que j' appelerois volontiers Panacée végétal, par rapport à ſon indiſſolubilité, mais qui, je crois, n' en ſeroit pas moins bonne à être employée intérieurement.

Le tartre mercuriel préparé de cette dernière manière, a vraiment un gout mercuriel ; il noircit auſſi d' avantage au ſoleil. Je n'oublierai pas qu'un des principaux caractères de cette matière ſaline eſt de verdir le ſirop violat ; c' eſt-à dire, lorſqu'elle eſt diſſoute dans l'eau. Elle ſe décompoſe avec la plus grande facilité par l' alkali fixe, qui s' empare du tartre, & le mercure ſe précipite en blanc : je ferai encore obſerver, que lorſqu'on fait cette décompoſition au feu, ce précipité devient couleur de brique foncée.

Il ne faut pas tant de crême de tartre à la vérité pour diſſoudre une once de précipité mercuriel ; mais comme ce ſel n' eſt ſoluble qu' autant qu' il ſe trouve uni à une plus grande quantité de crême de tartre, il n' eſt guère poſſible d' en employer moins, lorqu'on veut avoir le tartre mercuriel par la criſtalliſation. Si on jugeoit à propos d'en avoir un qui fut plus chargé de mercure, deux parties de crême de tartre contre une de mercure ſuffiroit ; mais on en auroit très-peu par la criſtalliſation ; il en reſteroit trop en précipité au fond du vaiſſeau, à moins d' employer des quantités d' eau immenſes ; c' eſt ce qu'on va voir par l' expoſition que je vais faire du peu de ſolubilité de cette matière ſaline.

Je fis paſſer ſur un réſidu provenant de deux parties de crême de tartre & d' une de mercure, huit pintes d' eau bouillante l' une après l' autre. Ces huit pintes, évaporées juſqu' à ſiccité, n' ont donné que 7. gros de matière ; ce qui ne revient qu' à ſoixante-trois grains pour chaque pinte ; au lieu qu'une pinte d' eau diſſout preſque deux gros de tartre mercuriel criſtalliſé, obtenu par le procédé que je viens de propoſer : qu' elle différence.

Ce tartre mercuriel, qui avoit reſté non ſoluble au fond du vaſe, & ſur lequel j' avois fait paſſer huit pintes d'eau bouillante, ſe trouvoit bien différent de ce qu' il étoit auparavant ; de blanc qu' il étoit d' abord, il ſe trouvoit noirâtre ; il paroiſſoit moins ſalin au gout, & il ſe diſſolvoit parfaitement, & promptement dans l' acide nitreux, ce qui me le fit regarder comme n'étant uni qu' à très-peu de tartre.

D'où je conclus que j' avois enlevé à chaque fois que j' y avois verſé de l' eau, la portion de mon tartre mercuriel qui étoit la plus acide, & que je l' avois amené au point où l'on pouvoit le compoſer avec le turbith minéral. En effet, on va voir que c' eſt une propriété re-

marquable du mercure dans toutes les combinaiſons qu' il contracte avec les acides (à l'exception de l'acide marin) de ſe dépouiller de ſes acides de plus en plus par les lavages.

Pour me confirmer là-deſſus, je pris quatre onces de tartre mercuriel criſtalliſé réduit en poudre; je les mis dans une petite terrine, & je fis paſſer deſſus ſucceſſivement dix pintes d'eau bouillante, ayant eu ſoin de bien décanter l' eau à chaque fois. Il me reſta à la fin une poudre griſe noirâtre, tout à fait ſemblable à celle qui avoit reſté dans la terrine dont je viens de parler. Je fis enſuite évaporer toutes mes eaux, pour en obtenir ce qu' elles contenoient de mon tartre mercuriel. La première criſtalliſation que j' en obtins, fut une crême de tartre aſſez chargée de mercure; la ſeconde ne fut preſque que de la crême de tartre pure. Ceci ſuit l' ordre général de la criſtalliſation des ſels. Le ſel le plus difficile à ſe diſſoudre, eſt le premier à ſe criſtalliſer. Le tartre mercuriel eſt incomparablement plus difficile à ſe diſſoudre que la crême de tartre pure; car comme je l' ai déja fait voir le tartre mercuriel eſt d' autant moins ſoluble, qu' il eſt chargé d' une plus grande quantité de mercure. En cela on voit encore une parfaite reſſemblance entre le tartre mercuriel, & toutes les autres combinaiſons du mercure avec les acides. Le ſublimé corroſif ſe diſſout dans l'eau d'autant plus facilement, qu' il contient une plus grande quantité d' acide marin; mais le mercure doux, & la panacée mercurielle ſont inſolubles, parceque ces préparations contiennent trop de mercure.

Si les ſels mercuriels ſe dépouillent, ainſi que nous le voyons, de leur acides par les lavages, ils ont auſſi la propriété de ſe rétablir, lorſqu'on leur reſtitue la quantité d'acide qu'on leur a enlevé. Auſſi fis-je paſſer peu à peu une once de ce tartre mercuriel indiſſoluble à tra-

vers le filtre, en la faiſant bouillir ſucceſſivement avec des demi onces de crême de tartre & trois pintes d'eau à chaque fois. J' employai de cette manière quatre onces de crême de tartre; & le tartre mercuriel que j' en obtins, me parut tout auſſi chargé de mercure que les autres que j'avois obtenu par la criſtalliſation. Ce qui fait voir que le tartre mercuriel criſtalliſé, contient bien peu de mercure, pendant que celui qui reſte au fond du vaiſſeau, après cette combinaiſon, en eſt ſurchargé.

D'après ces propriétés du tartre mercuriel, je devois être porté naturellement à examiner, ſi dans la combinaiſon du mercure avec le vinaigre j' y trouverois les mêmes caractères de reſſemblance. En effet, me rappellant tout ce que l' expérience m'avoit appris là deſſus, je vis avec plaiſir cette analogie; c' eſt ce que je confirmai par de nouvelles expériences. Je commençai d'abord par mettre deux onces de mon précipité mercuriel en diſſolution avec une pinte & demi de bon vinaigre diſtillé dans un matras. Je fis chauffer ce mélange à un bon feu de ſable. Le précipité mercuriel ne tarda pas à être attaqué, & dans très-peu de tems, je vis ſe former à la ſurface de la liqueur une pellicule criſtalline très-conſidérable; j'y verſai une très grande quantité d'eau chaude à deſſein de la faire diſſoudre; elle diſparut effectivement; mais il ſe forma au bout de quelque tems au fond du vaſe un précipité beaucoup plus conſidérable que celui qui y étoit auparavant la diſparition de cette pellicule. Ce qui me donna lieu de croire qu' il s'étoit fait une décompoſition de ce ſel; c'eſt-à-dire, qu' il s'étoit fait une ſéparation de la portion la plus ſaline d'avec celle qui l' étoit moins; & cette dernière ne pouvant ſe tenir en diſſolution s' étoit précipitée au fond du vaſe. Ainſi, bien loin de le regarder comme un ſimple précipité mercuriel qui reſtoit toujours indiſſoluble dans cette occaſion, comme je l'avois cru

avec

avec bien d'autres, je le regardai au contraire, comme le ſel mercuriel de vinaigre avec le moins d'acide poſſible. C'eſt de quoi je me convainquis, en en faiſant la ſéparation par un filtre, ſur lequel reſta ce ſel mercuriel. Il étoit jaunâtre, au lieu que la pellicule criſtalline, qui avoit diſparu par l'addition de l'eau, étoit blanche. Je pris ce précipité reſté ſur le filtre lorſqu'il fut ſec; je le diviſai en deux parties; j'en mis une dans une grande terrine, ſur laquelle je paſſai une très-grande quantité d'eau bouillante à différentes fois. L'eau s'étant chargée de la partie la plus ſaline de ce précipité, il ne reſta en arrière qu'une poudre noirâtre, que je comparai à celle qui avoit reſté après les lavages du tartre mercuriel. Je remis l'autre partie de mon ſel mercuriel de vinaigre dans un vaſe placé au bain de ſable; j'y verſai à pluſieurs repriſes du vinaigre diſtillé. Je parvins à en diſſoudre beaucoup, je dis beaucoup, car je ne pus employer tout le vinaigre qu'auroit éxigé ſa diſſolution radicale. Après cela je fis évaporer la liqueur qui avoit paſſé au travers du filtre. Lorſque j'en eus évaporé plus de la moitié, j'en obtins une criſtalliſation en forme de feuillets talqueux jaunâtre, avec une ſurabondance de vinaigre; mais l'ayant éxpoſée à ſécher ſur du papier à filtrer, ce ſel y devint bientôt parfaitement neutre.

On voit donc ici, que tout ſe préſente de même que dans d'autres combinaiſons du mercure avec les acides; même indiſſolubilité de ce ſel à méſure qu'il contient d'avantage de mercure; même tendance à ſe décompoſer lorſqu'on y fait paſſer de l'eau. On voit encore que ſans cette connoiſſance, on riſque de travailler en aveugle ſur cette combinaiſon. Et il ne faut pas être ſurpris ſi ceux qui ont entrepris de faire cette combinaiſon, d'après M. Margraf, ont rencontré, en la faiſant, des obſtacles qui leur ont donné ce ſel ſous différentes formes & ſous différentes qualités. C'eſt ce

qui m' engage à propoſer un moyen d'avoir cette combinaiſon conſtamment de la même qualité. Cela ne conſiſte qu' à ne pas mettre de l' eau ſur cette diſſolution, ni avant, ni après qu' elle eſt faite, & à enlever la péllicule criſtalline lorſqu'elle eſt formée; car s'obſtiner à la faire diſſoudre avec de l'eau, pour la faire paſſer à travers le filtre, c' eſt vouloir la décompoſer. On doit enſuite ajouter du nouveau vinaigre ſur ce qui reſte au fond du vaiſſeau juſqu' à ce qu' on ait tout diſſous; ce qui éxige, à la vérité, une très-grande quantité de vinaigre. Le ſel qu' on obtiendra par l' évaporation de toutes ces diſſolutions raſſemblées, différera de beaucoup de celui dont je viens de parler, en ce qu' il contiendra plus uniformément de mercure, & en ce qu' il ſera plus criſtallin, & plus blanc; mais auſſi il ſera avec un excés d'acide, qui peut cependant s' en ſéparer aiſément par les papiers.

Il me convient pour compléter toutes ces analogies des différentes combinaiſons du mercure avec les acides, de faire voir que l' union de l' acide nitreux avec le mercure, préſente les mêmes phénoménes. Il eſt bien étonnant que les artiſtes qui ſont ſi familiers avec cette diſſolution depuis tant de tems n' en n'aient pas fait mention : il ſemble que nous ſoyons condamnés à ignorer perpétuellement ce qu' il y a de plus ſimple & de plus commun; cependant rien de ſi aiſé que de s'appercevoir de cette propriété dans l'union du mercure avec l' acide nitreux. Si on lave, ſoit dans l'eau chaude, ſoit dans l'eau froide des criſtaux provenant de cette diſſolution, on voit qu' ils ſe décompoſent, ils jauniſſent; la portion la plus acide ſe diſſout, pendant qu' il ſe précipite une poudre d' un jaune citron, qu'on peut appeler le turbith nitreux. Mais ſi au lieu de verſer de l' eau tout ſimplement ſur ces criſtaux, on y verſe en même tems quelque gouttes d' acide nitreux, bien loin qu' il s' en précipite quelque choſe, tout

ſe diſſout au contraire avec la plus grande facilité ; & il n'y a pas même d' autre moyen de pouvoir diſſoudre ce ſel. J'ajouterai de plus, que j' ai obtenu un beau turbith nitreux par une manière bien plus ſimple ; c' eſt en noyant dans de l' eau chaude, une diſſolution mercurielle ſaturée autant qu' il étoit poſſible de mercure, & concentrée par l' évaporation.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Après cet examen, je fis plusieurs autres expériences, à deſſein de combiner différemment le mercure avec l'acide du tartre. La première que je fis, fut de triturer très-long-tems un gros de mercure avec trois gros de crême de tartre dans un mortier de marbre. Le mercure diſparut à la vérité, mais ce n' étoit qu'une ſimple diviſion ; car en ayant fait bouillir ce mélange dans de l' eau, le mercure reſta au fond du vaſe, ſans qu' il en parut le moindre veſtige uni à cette crême de tartre.

SECONDE EXPÉRIENCE.

Je fus plus heureux dans la ſeconde expérience, en imaginant de décompoſer le ſel végétal fait avec la craye par une diſſolution mercurielle, pour unir, par la voye des doubles affinités, l'acide du tartre avec le mercure. J' avois déja éprouvé que les acides purs n'agiſſent que difficilement ſur les ſels qui ont pour acide la crême de tartre, ou du moins qu' ils n' en dégagent pas facilement la crême de tartre, comme on devroit s'y attendre : très-ſouvent les liqueurs reſtent claires & tranſparentes lorſqu' on fait ces mélanges : ainſi j' étois curieux de voir ce qu' il en arriveroit dans cette occaſion. Un autre motif ſe joignit encore à celui-là ; ce fut de vérifier en même tems

un fait très-intéressant du mémoire du célébre M. Margraf, inséré dans le XXe volume que l'Académie Royale de Berlin vient de publier. Dans ce mémoire, qui a pour titre: *Démonstration de la possibilité de tirer les sels alkalis fixes du tartre par le moyen des acides, sans employer l'action d'un feu véhément.* M. Margraf rapporte, qu'il a obtenu un vrai nitre en versant de l'acide nitreux sur le sel végétal fait avec la craye. Je pouvois donc espérer de voir ici d'une part l'acide du tartre s'unir au mercure, & de l'autre, l'acide nitreux s'unir à la base de ce sel telle qu'elle fut. Je pris, en conséquence, une certaine quantité de ce sel dissous dans l'eau; j'y versai peu à peu de la dissolution mercurielle; il s'y forma aussitot un précipité jaunâtre très considérable. Je filtrai la liqueur; je fis passer de l'eau sur le précipité resté sur le filtre, & je mis à évaporer cette liqueur sur un bain de sable. Je ne pus en obtenir des cristaux distincts, ce qui m'obligea à la faire évaporer jusqu'à siccité.

L'ayant fait, je passai de l'eau chaude sur ce résidu; je filtrai de nouveau. Il resta sur le filtre, un sel que je ne pus méconnoître pour du tartre mercuriel, aussi bien que ce qui avoit resté sur le premier filtre. Je fis ensuite évaporer la liqueur, laquelle me donna un vrai nitre, mêlé avec un autre nitre à base de craye. Ce dernier s'y décéla par l'alkali fixe, qui en précipita la terre. Voilà donc l'expérience de M. Margraf bien confirmée, en même tems que j'obtiens la combinaison du mercure avec l'acide du tartre.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Je fus conduit par là à opérer ſur la crême de tartre elle même avec la diſſolution mercurielle, ce qui, ſuivant moi, devoit en même tems jetter un grand jour ſur la queſtion, ſavoir : *ſi l'alkali fixe exiſte tout formé dans la crême de tartre, ou s' il a été produit dans l' expérience que je viens de rapporter.* Pour cet effet, je pris trois onces de crême de tartre, que je fis diſſoudre dans une ſuffiſante quantité d' eau ; je verſai deſſus peu à peu une diſſolution d' une once de mercure dans l' eſprit de nitre : il s' y fit un précipité blanc très-abondant : je filtrai après cela la liqueur, je la mis enſuite à évaporer, & j'en obtins, en premier lieu, des criſtaux qui étoient du tartre mercuriel, & à la fin un vrai nitre parfaitement criſtalliſé. Le précipité qui étoit reſté ſur le filtre, bien examiné, ſe trouvoit être également une combinaiſon de l' acide du tartre avec le mercure.

Il eſt bon d' obſerver que le ſel de nitre qu' on obtient dans cette expérience garde conſtamment un excés d' acide, qu' il n' eſt pas poſſible de lui enlever autrement qu' en le ſaturant, ſoit avec quelqu'alkali ou avec quelque terre abſorbante.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Je me déterminai enſuite à faire une autre expérience ſur le ſel de ſeignette, pour voir s' il y auroit quelque différence dans les réſultats. Pour cela, je pris ſix gros de ſel de ſeignette ; les ayant fait diſſoudre dans une ſuffiſante quantité d' eau, je verſai deſſus une diſſolution de trois gros de mercure ; j' eus un précipité tout pareil à celui que j' avois obtenu par la dernière expérience, & enſuite quelque criſtaux de tartre mercuriel, & ſur la fin du nitre quadrangulaire.

Les combinaiſons du mercure avec l'acide du tartre qui réſultent dans toutes ces expériences différent de beaucoup de celles où je n' avois employé d' autres moyens que la combinaiſon immédiate de la crême de tartre avec le précipité mercuriel. La première différence qui s' y trouve, c' eſt que le tartre mercuriel qui en réſulte eſt d' une grande blancheur, pendant qu'il eſt preſque impoſſible de conſerver l' autre blanc; il eſt toujours plus ou moins gris. La ſeconde, c' eſt qu' il ſe diſſout radicalement dans l' eau, quoique il ſoit très-difficile à ſe diſſoudre, puiſque ſix pintes d' eau n' en ont pu diſſoudre que demi once. Enfin une autre différence; c'eſt qu' il fait une impreſſion plus vive ſur la langue: il faut cependant obſerver que ce ſel jaunit, lorſque ayant été une fois diſſous dans l'eau, on en obtient des criſtaux.

Les différences que m' offrit ce ſel ne me ſurprirent point, au contraire je m'y attendois. En enviſageant dans la crême de tartre une baſe alkaline, il eſt tout-à-fait probable dans ce cas-ci, où cette baſe a été enlevée, puiſqu'elle s' eſt unie à l' acide qui tenoit le mercure en diſſolution, la combinaiſon mercurielle qui s' y eſt faite n' a du l' être que par l' acide pur de la crême de tartre. Au lieu que dans le tartre mercuriel ordinaire que j' ai décrit, toute la ſubſtance de la crême de tartre ſe trouve unie au mercure. D' après cela je fus curieux d' examiner la partie acide du tartre qui s'étoit unie dans cette occaſion-ci avec le mercure; ce qui devoit jetter un grand jour ſur l' analyſe du tartre.

J' ai dit ailleurs que le tartre mercuriel eſt décompoſé avec la plus grande facilité par l' alkali fixe: je réſolus de me ſervir de ce moyen pour reconnoître la nature de l' acide de la crême de tartre. Je pris pour cela des précipités qui s' étoient formés, tant dans le tems que j'avois décompoſé le ſel végétal & de ſeignette par la diſſolution

mercurielle, que de celui que j'avois obtenu de la crême de tartre pure ; je les mis dans une terrine avec de l'eau bouillante que j'exposai sur un bain de sable chauffé ; je versai dessus de l'alkali fixe resous en liqueur ; la couleur blanche disparut bientôt, & il s'y forma un précipité de mercure couleur de brique foncée. Quand je m'appercus qu'il y avoit tout autant d'alkali fixe qu'il en falloit pour décomposer mon sel mercuriel, je filtrai la liqueur, & je l'évaporai. J'en obtins une espèce de sel végétal, que je ne pus pas faire cristalliser: il me parut tenir le milieu entre le sel végétal ordinaire & la terre foliée de tartre. Pour acquérir quelques connoissances de plus sur la nature de l'acide qui constituoit ce sel, je résolus de le séparer de nouveau de la base que je lui avois donné par le moyen de l'huile de vitriol, & de l'enlever s'il étoit possible par la distillation. Je mis en conséquence mon sel bien desséché dans une petite cornue de verre tubulée ; j'y lutai un petit balon, & je versai par la tubulure la moitié de son poids d'huile de vitriol délayée dans un peu d'eau ; je poussai le tout à la distillation. Il monta un Flegme acidule, sentant l'odeur désagréable du tartre lorsqu'on le brule. Je saturai ce Flegme acide avec un peu d'alkali fixe ; il devint aussitôt d'une couleur jaune verdâtre. L'ayant fait évaporer dans une petite capsule de verre ; il me resta un peu de sel si désagréable au gout, qu'il me sembloit qu'on mettoit du tartre brulé sur la langue. Voilà tout ce que je puis dire à présent sur les parties constituantes du tartre.

Je passe maintenant à un autre objet, qui doit faire une suite nécessaire de ce mémoire ; c'est la combinaison du mercure avec l'acide du vinaigre. Puisque j'ai déja parlé de cette combinaison, il est juste que j'expose ici, que le même moyen dont je viens de parler pour unir l'acide du tartre avec le mercure, réussit également bien pour combiner

l'acide du vinaigre avec le mercure. Pour faire cette union, je pris six gros de terre foliée de tartre; je les fis dissoudre dans beaucoup d' eau chaude, & je versai dessus peu à peu une dissolution de trois gros de mercure; il parut aussitôt un précipité jaunâtre; je filtrai la liqueur, & j'en obtins ensuite, par l'évaporation, le plus beau sel mercuriel qu' il soit possible d' avoir. Il étoit en beaux feuillets talqueux très-blanc, mais il jaunissoit dans l' eau comme l' autre: il resta sur la fin du nitre. Voilà donc un nouveau moyen d'obtenir le sel mercuriel, qui mériteroit assurément la préférence, si la terre foliée n' étoit pas un objet un peu trop dispendieux.

Dans ce procédé, comme dans ceux que je viens d'exposer pour obtenir la combinaison du mercure avec l'acide du tartre, les doses que je prescris m' ont toujours paru les plus justes. Mais il est nécessaire d' avoir égard à la quantité d'acide que doit contenir la dissolution mercurielle: il faut qu' elle n' en contienne pas d' avantage que ce qu' il faut pour tenir le mercure en dissolution, autrement il y auroit de la confusion; car l'excédent de l'acide nitreux retiendroit une portion du mercure, & par là en priveroit d' autant l' acide du vinaigre ou l' acide du tartre.

LETTRES

De D. M. Roffredi Abbé de Casanova à M.r L. C. D. S. sur les nouvelles observations microscopiques de M.r Néedham, & ses notes sur les Recherches de M.r Spallanzani.

I. J'ai lu, Monsieur, avec toute l'attention, dont je suis capable, les *notes*, ou les *remarques*, que M. *Néedham* vient de donner au public sur les *découvertes microscopiques de M. l'Abbé Spallanzani*; & puisqu'en m'envoyant ce livre, vous m'avez chargé de vous en donner mon sentiment, je vous le dirai sans détour; car je sais bien qu'un Philosophe tel que vous, ne peut trouver rien de bon, s' il n' y apperçoit la vérité.

II. Vous n' ignorez pas, Monsieur, que lorsque M. Néedham mit au jour en 1750. ses *découvertes intéressantes sur la composition, & la décomposition des corps organisés*, il ne s' étoit proposé que de donner un petit essai „ qui ne devoit être considéré, disoit-il „ que comme une „ légère esquisse d'un ouvrage futur, (1) comme une ébauche de ce qu' il se proposoit de publier dans la suite, (2) & que pour lors il s' étoit borné à une courte exposition de ses observations, (3) se réservant d'en donner *un grand* nombre d' autres, qu' il avoit par devers lui, *dans l'essai qu'il espéroit de publier dans la suite avec plus d' exactitude* (4). Vous connoissez de même quels ont été les jugemens des savans sur les observations microscopiques qui servoient d'appui à ses découvertes intéressantes;

(1) Préface p. 10.
(2) Observ. 145.
(3) 26. p. 208.
(4) P. 240.

on a cru généralement que leur auteur s'en étoit laiſſé impoſer, plus encore par une théorie imaginée antérieurement à toutes obſervations, que par des effets, propres de leur nature, à jetter dans l'erreur un obſervateur exact; ce qui devoit naturellement porter M. Néedham à s'acquitter de ſes engagemens envers le public; d'autant plus qu'il ne pouvoit pas manquer de matériaux pour l'entretenir, puiſque dans une lettre de 1762. à M. Bonnet, il l'aſſuroit „ d'avoir ſouvent répété les mêmes expériences avec „ le même ſuccés „ (5) & lui faiſoit eſpérer des éclairciſſemens importants, & propres à donner une nouvelle force à ſes premières obſervations ſur l'origine des animalcules microſcopiques. „ Encore, diſoit-il, depuis peu „ un Profeſſeur de Reggio vient de m'écrire, qu'il a „ fait préciſément les mêmes obſervations, auxquelles il „ en a ajouté pluſieurs autres pour confirmer mes ſentimens là-deſſus. Il va les publier en forme de lettres, & „ vous les verrez bientôt „ Or, pendant que le public encore incertain de la vraie valeur de ce *grand nombre d'obſervations* que M. Néedham gardoit toujours par devers lui; pendant, qu'au lieu des lettres du Profeſſeur de Reggio, il avoit vu paroître la diſſertation du Profeſſeur de Modéne, M. l'Abbé Spallanzani, qui dans ſes *nouvelles recherches ſur les êtres microſcopiques*, loin d'appuier les anciennes obſervations de M. N. en avoit montré le foible; pendant que l'on s'intéreſſoit de plus en plus à tout ce qui pouvoit fournir des lumières pour le dénouement de cette fameuſe queſtion; enfin le ſuſdit M. Néedham, après avoir montré tant d'indifférence pour les ſouhaits du public, vient de rompre ſon profond ſilence. Il entreprend de traiter de nouveau la queſtion de l'origine des animalcules microſcopiques; il critique les obſervations de M.

(5) Bonnet conſid, Tom. II. p. 213.

l'Abbé Spallanzani, & il y oppose des raisonnemens; mais quant à ce grand nombre d'observations qu'il avoit faites depuis vingt ans, & que l'on avoit tant envie d'apprendre, il n'a pas encore jugé d'en dire le mot, & on diroit qu'il pense que les savans sont assés instruits, dès qu'il savent que tout doit être comme il l'avoit déja dit.

III. Mais si j'ai été un peu surpris de n'avoir pas trouvé dans l'ouvrage en question, les observations qui devoient naturellement y tenir la première place, je l'ai été encore plus d'y avoir rencontré tant de choses auxquelles je ne m'attendois aucunement. On savoit bien que cet auteur avoit une espéce de passion pour sa manière de penser sur les matières qui regardent la métaphysique; mais il n'avoit pas encore donné de certaines marques de mépris au désavantage de ceux qui, dans ces questions, se permettent la liberté de penser différemment, comme il vient de le faire dans son dernier ouvrage que j'ai sous les yeux. On diroit qu'il en veut à tous ou à presque tous les savans; mais c'est principalement contre les philosophes du siécle que portent ses traits les plus perçans. Ce ne sont pas des mots échappés dans la chaleur de la dispute, ou des manières équivoques de s'exprimer, mais ce sont plutôt des duretés recherchées dont il a fait choix, qui ne peuvent avoir d'autre but que celui de faire sentir aux philosophes, que tout savant qui n'est pas dans ses principes, doit, par cela-même, avoir un esprit borné & fort rempli de préjugés. Je ne me ferai pas un devoir, Monsieur, d'aller cueillir cette espéce de fleurs qui sont dispersées dans le livre de M. *Néedham*, mais je dois pourtant vous en donner quelques petits échantillons par lesquels vous puissiez juger du reste.

IV. Si vous voulez d'abord un essai de l'esprit qui regne dans cet ouvrage, je vous prie de jetter les yeux sur ce qu'il dit de Descartes à la page 206. „ Descartes

„ paroit, & pour ne pas tomber dans l'inconvénient d'une „ efpèce de génération équivoque des idées, autant que pour affermir la morale . . . il imagine la *fable* des idées „ innées qu' il repréfente *groffiérement* fous la notion de „ traces matérielles dans nos cerveaux. „ Je crois que ce doit être la première fois que l'on a rangé Defcartes parmi ces gens qui donnent dans des groffièretés.

V. On fait que l' hypothèfe des germes préexiftans a été le fyftème favori des plus grands philofophes du fiècle paffé & du courant. Je veux bien que cela ne foit pas une raifon affés forte pour nous obliger à l'admettre; mais du moins paroit il qu'elle devroit en être une pour nous engager à en ufer avec de certains égards, qu'un mérite fupérieur a toujours droit d' attendre de ceux même qui font dans des opinions différentes. M. Néedham, plus que tout autre, devoit faire attention à ce que je viens de dire; lui qui veut paffer pour difciple de Leibnitz; car pour peu qu'il ait lu de ce Philofophe, il ne devoit pas ignorer qu' il ait toujours foutenu la préexiftence des germes comme une partie effentielle à fon fyftème. Or voyons comment notre auteur s'exprime fur cette hypothéfe. „ C'eft une pure „ défaite peu digne d'un Phyficien . . . rien moins que „ fcientifique . . . & fi nos connoiffances en phyfique, à „ méfure qu'elles fe généralifent, doivent fe réfoudre en „ pareilles défaites, rien n'eft plus futile qu'une philofo- „ phie qui ne mène à rien „ (6). Mais cette hypothèfe, cette philofophie qui ne mène à rien, nous méneroit pourtant à affermir de plus en plus la démonftration du premier des principes de la réligion. Cependant, felon les principes de M. Néedham, cette manière de raifonner eft pitoyable, même à l' en croire, elle eft ridicule. Ecoutons-le „. Pour prévenir les calomnies & les *préjugés ri-*

(6) P. 139. 140.

„ *dicules* de ceux qui, ſous le prétexte de venger les droits „ de la divinité, n' ont cherché qu' â détruire notre ſy- „ ſtème ſur la génération, il eſt abſolument néceſſaire „ &c. „ (7).

VI. Notre auteur voudroit dans les Philoſophes un peu plus de retenue lorſqu' il s'agit de rejeter des deſcriptions que les voyageurs nous donnent, & qui paroiſſent fauſſes & bizarres, telle, par exemple, que celle de Guillaume Piſon, de la ſauterelle *Louva Deos* qui fixe ſes pieds en terre, y prend racine & devient une plante. (8) La maxime peut-être fort bonne; ſeulement il reſte à ſavoir ſi on l'a ſuggérée par l'amour ſeul de la vérité; ſur quoi il eſt juſte de s'en rapporter à l' auteur même, qui dans cette occaſion a bien voulu nous dévoiler l' intérieur de ſon cœur. „ Je ſuis d'autant plus porté, dit-il „ à faire cette „ remarque . . . que *je ſuis bien aiſe* d'avoir occaſion de „ relever un défaut qui revient trop ſouvent dans nos „ écrivains modernes. *Dum vitant ſtulti vitia in contraria ruunt* (9). Etre bien aiſe de relever des défauts! Cela ne paroit pas de la bonne philoſophie.

VII. Cependant je ne m' arrêterai pas ſur de pareils traits, ni ſur tant d' autres de même nature, qui ſe préſentent, à la vérité, un peu trop ſouvent dans l' ouvrage que j' examine, mais que l'on pourroit peut-être excuſer, en faiſant attention que ſon auteur y a voulu paroître comme un ſavant qui penſe avec force, & s'exprime par conſéquent avec une franchiſe pleinement philoſophique. Liſez Monſieur, & admirez le tour qu' il a donné à une petite leçon qu' il nous fait, pour nous apprendre le peu de cas qu'un vrai Philoſophe doit faire des louanges & des expreſſions obligeantes, dont on prétendroit l' honorer.

(7) P. 140. 141.
(8) P. 258. 259.
(9) P. 242.

„ Si je n' étois pas parfaitement au fait du peu de valeur „ que l' on doit attacher aux éloges trop intéreſſés des „ Philoſophes modernes, dont la foibleſſe, en ce point, „ égale pour le moins celle des littérateurs pédanteſques du „ ſeiziéme ſiécle, & dont le public eſt la dupe en tout „ temps, je devrois rougir des louanges exceſſives dont „ je me trouve accablé par M. l'Abbé Spallanzani dans tout „ le cours de cet ouvrage. Je le connois perſonnellement, „ & je le connois comme un Philoſophe intègre, très- „ eſtimable à tous égards. Je lui dois par conſéquent des „ remercimens, mais c' eſt en avouant avec franchiſe que „ le mauvais exemple de nos philoſophes l'entraine bien „ au-delà du vrai, & que ſon ſtyle en fait de louanges, „ ſent trop le vice puerile du ſiécle „ (10).

VIII. Il ne ſied pas mal à un vrai Philoſophe d' écrire avec une certaine franchiſe; il faut pourtant avouer qu'elle doit avoir des bornes, au-delà des quelles il n' eſt pas permis de paſſer ſans s' expoſer à rencontrer des Philoſophes auſſi portés à la franchiſe & qui ſe croiroient autoriſés à employer des expreſſions que nous avons cru nous devoir interdire. Je fais cette remarque parcequ' il me paroit, que, ſur cet article, M. Néedham a un peu excédé, & qu' il auroit du en quelque occaſion modérer cette vivacité d' imagination, qui ne lui a pas toujours permis d' eſtimer au juſte la véritable force des coups qu'il a prétendu porter contre la plupart des Philoſophes.

IX. Voici, Monſieur, un endroit de ſon livre que j' aurois bien voulu qu' il eut ſupprimé; d'autant plus que la penſée qui y eſt renfermée, a fort l'air d'une pure ſatyre qui ne mène à rien pour le dévelopement des matières en queſtion. „ Ceux, dit-il, qui peut-être ne con- „ noiſſent pas encore aſſez la philoſophie de Leibnitz peu-

(10) P, 139.

„ veut jetter les yeux sur les *institutions Leibnitiennes*, ou „ *précis de la Monadologie.* Je pense qu' il est impossible „ à celui qui aura la force d' esprit nécessaire pour saisir „ cette métaphysique sublime de refuser de s' y rendre. „ Je conseillerai en même temps à celui qui ne l' entendra pas de s'en tenir en tout, à la foi du Charbonnier, & de ne jamais pousser ses recherches en philosophie, en morale, ou en religion au-delà de ce qui est „ palpable, & sensible. „ (11) Voilà, Monsieur, un décret des plus tranchans. Ceux qui ne sont pas Leibnitiens, font voir par-là qu'ils n' entendent pas cette métaphysique; car il est impossible à celui qui aura la force d' esprit nécessaire pour la saisir, de refuser de s' y rendre; & ceux qui ne l'entendent pas doivent se borner à s'en tenir, en tout, à la foi du Charbonnier. Que diroit le célébre Clarke, lui, qui à la tête des Philosophes Anglois, soutenoit contre Leibnitz de ne rien comprendre à sa doctrine des Monades? (12) Encore cette saillie seroit-elle supportable, si de nos jours la métaphysique Leibnitienne eut pris le dessus, au moins si elle étoit un peu plus répandue parmi les savans de ce qu'elle ne l' est en effet: mais c' est un fait connu, qu' il est si rare de rencontrer hors de l'Allemagne un Philosophe Leibnitien que cela passe pour une espèce de phénomene. A' s' en tenir donc au Conseil que M. *Néedham* a bien voulu donner aux savans de l'Europe, il seroit fort à propos qu' ils se bornassent désormais à la foi du Charbonnier, sans jamais se mêler de pousser leurs recherches en philosophie, en morale, ou en religion au-delà de ce qui est palpable & sensible.

X. Cependant, que direz-vous, Monsieur, si je prétends vous soutenir, que malgré l'opinion de Monsieur Néedham

(11) P. 147.
(12) Recueil de lettres entre Leibnitz, & Clarke V.me lettre de Clarke.

qu' il n' y ait *de bonne métaphyſique que celle de Leibnitz*? (13) malgré ces beaux mots *d' êtres ſimples*, *êtres répréſentatifs*, *raiſon ſuffiſante*, *harmonie préétablie* dont il ſe ſert; malgré auſſi le choix qu' il a fait de la fameuſe deviſe de Leibnitz *fungar vice cotis*, pour en orner le frontiſpice de ſon dernier ouvrage; ſi je prétends, dis je, vous ſoutenir que M. *Néedham* n' eſt rien moins que Leibnitien? que les principes de ſa philoſophie ſont preſque toujours en oppoſition avec ceux du Philoſophe de l'Allemagne? Il ſe pourroit bien que du premier abord vous priſſiez mon aſſertion comme quelque choſe qui ſentiroit un peu le paradoxe, d'autant plus que M. *Néedham* aſſure formellement d'avoir *établi ſes principes métaphyſiques ſur les premiers élémens de la matière* d'après Leibnitz (14), mais quand je ne voudrois pas me ſervir d'une réponſe fort naturelle, qui eſt de dire qu' il s'agit d' un point, que l'on ne doit pas décider par autorité, il m'en reſteroit toujours une très-forte & très-admiſſible; & c'eſt M. *Néedham* lui-même qui peut me la fournir dans ſon ouvrage des obſervations microſcopiques auquel il nous renvoit dans ce même endroit. Liſez, Monſieur, le paſſage qui ſuit, & enſuite vous me ferez l'honneur de me dire ſi vous jugez que M. *Néedham* ait toujours penſé d' avoir puiſé ſa métaphyſique dans celle de Leibnitz. „ Ceux qui „ n'ont pas une *connoiſſance exacte & diſtincte* de ce que „ Platon, Cudworth, Greu, Mallebranche, *Leibnitz*, Bercklei, & Pope ont écrit, particulièrement ſur cette „ partie de la philoſophie, où les puiſſances phyſiques les „ plus élevées commencent à s' allier avec les dernières „ cauſes métaphyſiques, diront indifféremment, ſelon que „ les penſées de quelques uns de ces ſavans ſeront alors

(13) Notes ſur les Decouv. microſcop. p. 146.
(14) Nouvelles recherches. phyſ. & métaph. ſur la nature v. p. 35.

„ pré-

„ préſentés à leur eſprit, que je n' ai fait que renouveler les idées de tel ou de tel Philoſophe, qui n' ont jamais été généralement reçues, & qui ſont maintenant prêſqu'obliées. Mais . . . il n' y a pas deux de ces auteurs qui s'accordent parfaitement, & la pluſpart d' entre eux établiſſent des principes directement contradictoires à tout le reſte. *Il eſt vrai que mon ſiſtème paroit avoir, & a en effet quelque choſe de ceux de tous ces Philoſophes, mais cependant il en eſt fort différent* . . . . Cette legère reſſemblance dans les idées qu'il paroit y avoir entre eux & moi, n' eſt pas plus grande que celle qu' ils ont les uns avec les autres „ (15).

XI. C' eſt l' exacte vérité qui eſt peinte dans le paſſage que je viens de produire, & je n' inſiſterois pas d' avantage ſur ce point ſi je ne voyois qu'en entrant là-deſſus dans quelques details propres à faire comprendre l' oppoſition qui ſe rencontre entre la métaphyſique de Leibnitz, & celle de M. Néedham, je pourrai donner en même tems des éclairciſſemens ſur les vrais principes de celui-ci; principes qui ſont detaillés dans ſon livre des *nouvelles obſervations ſur la génération, la compoſition & la décompoſition des ſubſtances animales, & végétales* qu'on a imprimé à Paris en 1750., & au quel il nous renvoit toujours tant pour ce qui regarde ſa métaphyſique, que pour ce qui ſe rapporte à ſes obſervations microſcopiques. A la vérité M. l'Abbé de *Lignac* a employé la *cinquième partie* de ſes lettres à un Ameriquain à l'expoſition, & à la réfutation des principes métaphyſiques de notre auteur; mais il eſt aiſé de comprendre, dès le commencement même de ſon ouvrage que l'on ne doit pas s'attendre d' y trouver la matière miſe dans un certain jour, car il débute par dire „ ne vous flattez pas de comprendre le ſyſtème que je

(15) Nouvelles obſerv. microſcop. p. 260. 263.

„ vais vous expoſer ; je me propoſe uniquement de vous „ faire ſentir qu' il eſt d' une obſcurité innacceſſible. „ Il dit encore dans le corps de l'ouvrage, „ ne cherchons „ point à entendre M. Néedham, ce ſeroit entreprendre „ l' impoſſible ; mais tachons de decouvrir par quels ſen- „ tiers, ou par quels égaremens il eſt arrivé à une phi- „ loſophie ſi extraordinaire. „ (16) C'étoit préciſement ce qu' il falloit faire, mais c' eſt ce que M. de *Lignac* n' a point fait.

XII. Je commence maintenant mon examen par remarquer qu'à la rigueur il ne ſeroit pas même néceſſaire de connoître à fond les deux ſiſtèmes, celui de M. Leibnitz & celui de M. Néedham pour ſe convaincre de la différence eſſentielle qui doit y avoir de l'un à l'autre. Dès que l'on ſait que les principes fondamentaux d'un ſyſtème diſent l'*oui*, là ou ceux de l'autre diſent préciſement le *non*, pourra-t-il y avoir de doute ſur l'oppoſition des ſyſtèmes ? Il faut expliquer la nature *intelligiblement* ; il n' y a point de communication d'action entre *ſubſtance* & *ſubſtance* ; voilà les deux pôles ſur leſquels roule la machine philoſophique de M. Leibnitz, & il n' y aura qu'a y ajouter l' influence du principe de la *raiſon ſuffiſante* ; pour y donner le branle. On peut expliquer la nature par des *inintelligibles* : on doit ſuppoſer un *influence d'action* de *ſubſtance* à *ſubſtance* : on peut philoſopher ſans donner lieu au principe de la *raiſon ſuffiſante* ; ce ſont les maximes de cette métaphyſique qu' il a plû à M. Néedham d'appeller Leibnitienne. Mais il faut que je m' explique.

XIII. Quand on dit qu' il faut expliquer la nature intelligiblement, cela ſignifie, d'après Deſcartes, qu'en philoſophie il n' y a pas de bons raiſonnemens, ſi les idées

(16) Lettre XII. p. 60.

que l'on combine, ne ſont pas claires, & diſtinctes; mais comme il paroit que ce principe conçu ſous cette notion renferme un ſens équivoque, il faudra le développer un peu mieux. Il eſt impoſſible qu' une intelligence finie, & bornée puiſſe ſe former une idée diſtincte de ce qui a un rapport immédiat à la nature d' un être infini, & ſans bornes; mais il eſt très poſſible que quelque intelligence, quoique bornée, comprenne ou la nature, ou les propriètes d'un être fini, & limité, tel qu'eſt en effet tout le ſenſible qui nous environne. „ La conception des créatures „ dit M. Leibnitz „ n' eſt pas la meſure du pouvoir „ de Dieu, mais leur aptitude ou force de con- „ cevoir, eſt la meſure du pouvoir de la nature; tout „ ce qui eſt conforme à l'ordre naturel, pouvant être „ conçu ou entendu par quelque créature. „ (17) Il ſuit de là que pour expliquer *intelligiblement* une propriété, une qualité de quelque ſubſtance, il faut les faire dériver de ſa nature, comme des modifications explicables, c'eſt-à dire poſſible d' être conçues & expliquées au moins par quelque eſprit à qui Dieu donneroit une ouverture ſuffiſante. On peut donc comprendre ſous quelle eſpéce d'inintelligibilité je range les principes métaphyſiques de M. *Néedham*; il faut ſeulement un exemple pour rendre la choſe plus ſenſible. Il prétend qu' il y a dans la nature des êtres qu' il appelle des Agens moteurs; ils ſont incapables de ſe donner du mouvement, mais ils ſe meuvent & ſont moteurs lorſqu' ils ſe rencontrent dans un certain rapport de coéxiſtence avec quelques êtres d' une nature différente. Voilà ce qui s' appelle chez Leibnitz, expliquer les choſes *inintelligiblement*: la poſition d'un être à l' égard de l' autre ne change rien dans l' intérieur de

(17) Nouveaux eſſais ſur l'entendement humain = Amſterdam 1765. pag. 20.

chacun de ces deux êtres, & il n'eſt pas poſſible que l'on conçoive la production d'un effet ſans qu'il n'y ait préalablement un changement dans l'être qui en eſt la cauſe; c'eſt donner aux êtres des propriètés qu'on ne ſauroit concevoir qui puiſſent dériver de leur eſſence, c'eſt expliquer la nature *inintelligiblement*, & on à coutume d'appeller un auteur *inintelligible*, quand il explique les choſes *inintelligiblement*.

XIV. C'eſt en prenant le mot dans ce ſens métaphyſique, que j'ai prétendu dire que la philoſophie de M. Néedham heurte de front le principe fondamental de celle de Leibnitz qui eſt, d'expliquer la nature *inintelligiblement*, mais chez les Logiciens ce mot a une autre ſignification, qui paroit être celle que tant de critiques y ont donnée lorſqu'ils ont accuſé les livres de M. Néedham d'une obſcurité impénetrable. J'avoüe que d'entreprendre d'examiner ici la queſtion, ſi ces critiques ont porté, ou non, un jugement ſans connoiſſance de cauſe, c'eſt un véritable hors d'œure qui rompt l'enchainement de mes remarques, mais puiſque j'y ai été amené par la matière meme que je traite, vous me permettrez bien, Monſieur, d'en dire quelque choſe que vous ne regarderez s'il vous plait, que comme une eſpéce d'épiſode.

XV. Ce qui fait le plus ſouvent qu'un livre eſt obſcur, c'eſt que ſon auteur ſe ſert de termes dans un ſens indeterminé, & ne prend aucun ſoin de s'en former, & d'en donner des notions diſtinctes. *Vulgo autem ſcripta omnis generis obſcuritate laborant.* dit M. Wolff, *quod terminis utantur auctores non ſatis explicatis, nec ipſimet eandem prorſus notionem eidem termino iungant.* (18) Voila le principe qui doit décider de cette eſpéce d'obſcurité logique que l'on a tant imputée aux livres de M. Néedham.

(18) Wolff logica p. 820.

Maintenant Monſieur je ſoumets à votre examen le paſſage ſuivant que je prens de ſon dernier ouvrage ; à la verité il eſt un peu trop long, mais il paroit qu' il eſt caractériſtique, & il faut que je vous le donne en ſon entier. „ A' proportion que la philoſophie pénetre plus „ avant dans la conſtitution de la nature, elle apperçoit „ plus diſtinctement que dans l' homme tout ſçavoir pris „ diſtributivement, ou même collectivement, eſt toujours „ rélatif. La chaîne de ce ſçavoir, telle que nous l' apperçevons au dedans de nous-mêmes, eſt compoſée de „ rélations diverſes dans une ligne non interrompue ; „ comme il eſt toujours formé par comparaiſon, il eſt „ toujours dans chaque partie alternativement poſitif, & „ negatif. Semblable au ſiſtème de l' univers, ſon objet „ immédiat, il a commencé par la non exiſtence, le „ chaos & les ténebres. Sa nature eſt conforme à la conſtitution de cet univers, dont il eſt le repréſentatif, & „ l' univers dans ſon exiſtence totale eſt auſſi toujours rélatif par rapport à la divinité, ſa cauſe première, & „ rélatif auſſi dans toute la gradation de ſes parties, „ leſquelles comparées entre elles, ſont à leur tour, comme le ſçavoir, alternativement négatives & poſitives: „ tout dans l' univers eſt action & réaction, ce qui ne „ peut ſubſiſter qu'entre des êtres poſitifs, & négatifs; la „ lumière même nous eſt tranſmiſe, comme nous l'apprend le Chevalier *Newton* par des accés conſtans de „ vibrations douces . . . . Non ſeulement la matière brute, „ & la matière exaltée, ſont l' une à l' autre négatives „ & poſitives, ſans quoi il n' y auroit ni action ni réaction, mais auſſi dans l' échelle de l' exaltation de la „ matière, les diverſes parties ſont l'une à l'autre négatives, & poſitives, d' ou la vitalité ſe répand dans „ chaque portion ſenſible. La régle en eſt ſi exacte que „ le plus puiſſant agent matériel, le pouvoir électrique-

„ même ſe diſtingue dans ſes diverſes portions, ſes qua-
„ lités & ſes quantités, en poſitif, & négatif; il eſt con-
„ ſtitué jusqu' à l'échelle des couleurs viſibles, de façon
„ que les quantités graduées de la lumière deviennent
„ l' une pour l' autre, ombre & lumière, & ſont encore
„ bien au-delà de l' obſervation, & de la portée des meil-
„ leurs inſtruments optiques. Enfin l' agent ſenſitif étant au
„ vital, & le principe intélligent étant au ſenſitif dans
„ cette réciprocité de rélation mutuelle, ou cette *cauſa-*
„ *lité* de poſitif & de négatif; non ſeulement la vitalité
„ eſt repandue dans la matière organiſée, mais dans les
„ claſſes intermèdiaires, elle eſt douée de ſenſation par
„ l'addition d'un principe immateriel, & dans l' homme,
„ la ſenſation eſt animée d' intelligence par l'addition d'un
„ agent ſpirituel. „ (19) L' embarras que tous ces *poſitifs*, *& negatifs* cauſeroient pour l' intelligence de ce long paſſage, eſt levé en partie quelques pages après (20) car on peut y voir que l'auteur a voulu dire que dans la nature il y a partout du plus & du moins & que ce qui commence à être n' étoit que négatif avant qu' il commença à être. Cela poſé, Monſieur, je voudrois bien vous prier de me dire ſi ce *poſitif & négatif* eſt toujours pris dans le même ſens, & s' il ſignifie toujours la même choſe alors auſſi que l'on dit: l' *agent ſenſitif étant au vital, & le principe intélligent étant au ſenſitif dans cette cauſalité de poſitif & de négatif.* J' aurai occaſion dans la ſuite de faire encore quelque remarque ſur ce texte, juſtement par rapport à la différente ſignification qu' on y donne au mot, *négatif.* Je reprend mon ſujet.

XVI. Le ſecond principe dont j'ai parlé ci-deſſus, eſt qu' *une influence réelle, ou tranſmiſſion de quelque eſpéce,*

(19) Nouv. Recherches p, 17. 17.
(20) P. 23.

ou qualité entre des ſubſtances, eſt inintelligible, & par conſéquent inadmiſſible. De-là dérivent les trois ſiſtèmes métaphyſiques, le Cartéſien, l' Idéaliſte, & le Leibnitien; car ſi l'on rejette toute action; on ſera *Idéaliſte*; ſi pour expliquer la nature on prétend que l'action des ſubſtances eſt réellement inexplicable par leur nature, mais que c'eſt Dieu-même qui eſt la cauſe immédiate de toute action, on ſera Cartéſien; mais ſi d'une part on veut qu' il ne ſoit pas raiſonable de ſuppoſer que Dieu à tout moment donne à l' univers un ordre, qui n' eſt pas explicable par la nature des choſes, & que d' autre part on prétende que l' action des ſubſtances ſoit explicable quoiqu' il n' y ait pas entre elles une influence réelle, ou tranſmiſſion de qualité, pour lors il me paroit évident qu' il n' y aura plus de ſiſtème poſſible que celui de M. Leibnitz. Dans ces ſuppoſitions chaque ſubſtance ſera active, mais aucune n'agira ſur l'autre, & la dépendance que la nature nous offre par tout de l' action d'une ſubſtance ſur l' autre ne ſera qu' idéale, & elle le ſera en ce que Dieu fera coéxiſter ces ſubſtances dans un tel ordre que quoique chaque ſubſtance agiſſe continuellement par la force qu' il lui à donnée ſans en recevoir de déhors, il paroit pourtant qu' elle agiſſe par une force étrangère. Si on voudra enſuite determiner la nature de cette force propre aux ſubſtances qui compoſent le monde matériel, il paroit que l'on doit tomber inévitablement dans le ſiſtème des ſubſtances répréſentatives d'où l'un après l'autre découleront les dogmes de la philoſophie Leibnitienne, pourvu qu'entre les principes qui doivent ſervir à les prouver, on donne accés à celui de la *raiſon ſuffiſante* pris dans toute cette extenſion, que M. Leibnitz lui a donneè. C' eſt pour cette connexion & dépendence de principes qui fait, ſans contredit, l' un des plus grands mérites de cette philoſophie, que M. Leibnitz. dans une lettre au père *Des-Boſſes* lui diſoit „ tels

„ font mes principes qu' à peine peut-on les féparer l' un „ de l' autre, qu' on en connoiffe bien un, on les connoit „ tous: *qui unum bene novit omnia novit.* „ (21)

XVII. Apparemment que M. *Leibnitz* n' avoit point le don de prophétie, lui qui n' a pas prévu qu'un tems viendroit où un favant fe diroit Leibnitien fans fe croire obligé de philofopher *intelligiblement*, fans jamais faire place dans fes raifonnemens au principe de la *raifon fuffifante*, & fans même douter de l' influence réelle des fubftances. Et en effet il n'eft pas néceffaire d'entrer bien-avant dans tous les détours de la métaphyfique de M. *Néedham* pour connoitre, à n'en pouvoir douter, qu'elle pofe uniquement fur la fuppofition d'une influence réelle, & d'une communication de qualités de fubftance à fubftance. S' il ne s'agiffoit donc uniquement que de prouver, que parmi les favans il doit y en avoir qui, n'étant point Leibnitiens ne fuivent pourtant pas le confeil de M. *Néedham* de s'en tenir en tout à la foi du Charbonnier, je pourrois fort bien me paffer d'approfondir d'avantage fes opinions & de les comparer à celles de M. *Leibnitz*; mais puifque je me fuis propofé principalement de vous donner, Monfieur, quelques remarques fur le fond de fa métaphyfique, il faut bien que je rempliffe mes engagemens.

XVIII. Cependant, Monfieur, il eft bon que je commence par me donner au-près de vous un peu de relief, en vous priant de faire attention à la difficulté, & au danger de l'entreprife de me hazarder à donner un ordre aux penfées métaphyfiques de M. *Néedham.* Je puis en cela m'appuyer fur l'autorité de M. l'Abbé *Regley* éditeur du dernier ouvrage de nôtre Philofophe, qui dans fon *difcours préliminaire.* (22) Nous donne fur ce point fon

(21) Leib. Opera Tom. II. p. 291.
(22) P. LI.

fen-

ſentiment, qui eſt celui qui ſuit „ M. *Néedham* n'a imaginé le ſiſtème qu' il nous donne qu' en fouillant dans „ toutes les profondeurs de la phiſique, & même de la „ métaphyſique la plus abſtraite; c'eſt peut-être cette métaphyſique qui effarouche, ou qui rend les avenues de „ la choſe plus difficiles. „ Il eſt vrai pourtant que M. Néedham eſt ſur ce point-là d'une tout autre opinion: il penche à croire que la difficulté de percer bien avant dans la profondeur de ſes penſées métaphyſiques doit venir du trop grand éclat de la lumière qu'elles jettent, & qui doit faire bien du dégat dans des vües faites comme les nôtres. Ecoutons-le un moment „ s' il a plu à M. Clement auteur d' une certaine prétendue *Année litteraire* de ſortir „ des bornes de ſon titre pour s' élancer dans les régions „ de la philoſophie, & d' appeller métaphyſique inintelligible ce qu' il n'entend pas, & même *alchimie métaphyſique*, par une figure inconnüe aux orateurs, ce que j'ai „ écrit dans le temps; ſa critique peut ſervir à prouver „ que ces choſes *jettoient une lumière trop éclatante* & „ *trop vive qui offuſquoit ſa foible vue*, mais elle n' ôte „ point pour cela leur prix aux yeux du vrai Philoſophe „ & du Naturaliſte éclairé. Ce que les petits eſprits inventent tous les jours pour maſquer leur ignorance, ne „ fait rien à la choſe. „ (23) Cependant cette lumière, malgré ſon grand éclat ne devoit pas encore avoir brillé aux yeux de M. Néedham dans le temps qu' il écrivoit ſon ouvrage des obſervations microſcopiques, puiſqu'on peut y lire ce qui ſuit. „ Pour le préſent je n'ai qu'une choſe „ à faire remarquer au lecteur & une grace à lui demander, „ qu'en conſidération de l'obſcurité repandue ſur le ſujet „ que j' ai peut-être, trop témérairement entrepris d'examiner, il ne pourra guères me refuſer . . . . la grace

(23) Notes, ou Remarques &c. p. 253. 256.

„ que j' ai à lui demander eſt de ſuſpendre ſon jugement „ ſur ces reflexions juſqu' à ce qu' il les ait lües entière- „ ment ; peut-être même ſeroit-il beſoin d' une ſeconde „ lecture à cauſe de la multiplicité des idées que j' ai été „ obligé de jetter ſur le papier, en ſi peu de tems, & „ de renfermer en quelques pages, *ce qui ne peut manquer à les rendre obſcures.* „ (24) Pour moi je tiens que comme il y a un art. pour bien diſcerner les objets, & que cet art eſt de donner du jour à ce qui eſt obſcur, de devoiler ce qui nous eſt caché ſous des enveloppes, & d' écarter les rayons malfaiſans lorſqu' ils nous empéchent de nous ſervir avantageuſement de nôtre vue ; ainſi je penſe que le même art peut bien encore nous aider pour nous décider ſi un objet eſt réellement, ou n'eſt pas diſcernable. C'eſt à peu-près ce que j' ai fait pour mettre à ma portée *cette nouvelle métaphyſique* que M. Néedham nous dit d'avoir établie ; (25) maintenant il ne s' agit, Monſieur, que de vous donner le réſultat de mes recherches.

XIX. *L'action, & la réaction n'ont lieu* qu'entre des êtres de différens ordres, & même oppoſés, (26) voilà la propoſition fondamentale ſur laquelle roule toute la métaphyſique de M. *Néedham* ; propoſition qu' il doit avoir regardée comme un vrai axiome, car on a beau en chercher la preuve, on ne la trouve nulle part ; ſeulement on s'apperçoit par la ſuite de ce qu' il dit dans ſon ouvrage, que *l'action étant oppoſée à la réaction*, il ne ſe peut que les êtres qui agiſſent, & ceux qui réagiſſent, ne ſoient auſſi entre eux de différens ordres, & même oppoſés.

(24) Nouv. obſerv. p. 258. 259.
(25) Remarques a p. 160.
(26) Nouv. obſerv. p. 329.

Or cette propoſition n' eſt rien moins qu' une axiome ; à lui prêter un ſens favorable elle eſt évidemment fauſſe, mais elle eſt encore quelque choſe de pis ſi on la prend à la rigueur de ſon expreſſion. La force ou la puiſſance d' agir, & la force ou la puiſſance de réagir peuvent être des attributs, ou ſi l' on veut, des propriétés eſſentielles de quelques êtres, mais l'*action*, & la *réaction* ne ſeront jamais que des modes, des modifications, ou des accidens de quelques êtres ; & tout Etudiant en philoſophie ſait que de l' oppoſition du mode à l'oppoſition des êtres modifiés la conſéquence eſt nulle ; même ſans être philoſophe tout homme connoit parfaitement bien que malgré l'oppoſition qu' il y a entre *l'action* d'aimer, & l' *action* de haïr, c' eſt pourtant toujours un ſeul être, & non pas deux êtres oppoſés, qui dans le même homme a tantôt de l'amour, & tantôt de la haine; mais je veux bien me perſuader que celui-là n' eſt pas le ſens que M. *Néedham* a voulu donner à ſon axiome, & que par l'*action* il a entendu parler de la puiſſance d'agir, & par la *réaction* de la puiſſance de réagir, & ſon raiſonnement portera ſur ce principe, que les êtres dont les propriétés eſſentielles ſont oppoſées, ou d'un ordre différent, doivent être auſſi oppoſées, ou d'un ordre différent. Mais dans ce cas il auroit fallu prouver que la puiſſance d' agir eſt oppoſée à la puiſſance de réagir ; or il eſt évident que cela n'eſt pas. La puiſſance d'agir eſt une puiſſance de faire changer d'état à un autre être, & la puiſſance de réagir ne dit auſſi ni plus, ni moins qu'une puiſſance de faire changer d'état à un autre être, & toute la différence n' eſt que dans l'ordre de ſucceſſion reciproque de l'*action*, & de la *paſſion*. L' être qui agit, commence par faire changer d' état à un être qu'on appelle *paſſif* & enſuite il en change lui-même par l' action de cet être paſſif ; & celui-cy après avoir changé d' état par l' action du premier, agit à ſon tour ſur celui-

là, & en change l'état. Donc dans l'action, & la réaction l'être qui agit eſt *actif*, & enſuite *paſſif*, & l'être qui réagit eſt paſſif, & enſuite actif. D'où tirerons nous donc la conſéquence de la néceſſité d'une oppoſition de nature entre ces deux êtres? Icy, Monſieur, je vous prie de remarquer la ſingularité de la manière de penſer en philoſophie de M. Néedham: les plus grands Philoſophes ont toujours regardé comme inconcevable la poſſibilité de l'action réciproque entre des ſubſtances d'une nature différente; & voilà que ſelon la métaphyſique de nôtre Philoſophe, ce n'eſt qu'entre des ſubſtances de différent ordre, & d'une nature oppoſée, que l'on peut concevoir la poſſibilité d'actions réciproques.

XX. On comprend aiſément qu'un Philoſophe accoutumé à généraliſer ſes idées, & à voir la nature en grand, tirera un bon parti de l'axiome que je viens d'examiner; auſſi eſt ce ſur ce fondement que M. *Néedham* éléve ſon édifice des principes métaphyſiques des premiers élémens de la matière, qu'il a, nous dit-il, établis d'après Leibnitz. (27) La nature n'offre à nos regards que du *mouvement*, & de la *réſiſtance* au mouvement, c'eſt-à-dire de l'action, & de la réaction; or „ l'action, & la réaction n'ont lieu qu'entre des êtres de différens ordres, „ & même oppoſés: ces agens extérieurs ſont par conſéquent dans leur origine & de leur propre nature non „ ſeulement numériquement, mais ſpécifiquement oppoſés. „ (28) Mais comme le mouvement ſuppoſe un agent moteur, & la réſiſtance un agent réſiſtant, il s'enſuivra que la nature entière ne ſera qu'un compoſé d'agens moteurs, & d'agens réſiſtans qui „ différeront eſſentiellement les „ uns des autres, & ſeront d'une nature entièrement op-

(27) Nouvelles recher. ſur la nature p. 35.
(28) Obſerv. nouv. p. 329.

„ posée. „ (29) La matière n'est donc qu'un composé d'agens d'une nature spécifiquement opposée. „ Mais si la „ matière est essentiellement composée, la seule manière „ de nous exprimer intelligiblement, & conformément à „ la verité est de la resoudre en *principes simples*: ces „ principes ne sont pas de la matière, parcequ'il ne sont „ pas eux-mêmes composés, ils ne sont pas non plus „ étendus ni divisibles parcequ'ils n'ont point de parties. „ (30) Si la spontaneité, la sensation, la pensée ne sont, „ de l'aveu même de tous les Philosophes raisonnables, „ qu'un résultat d'actions simples, pourquoi la résistance, „ & l'activité motrice ne le seroient elles pas aussi? „ Pourquoi un agent simple seroit-il dans ces cas un être „ possible & non pas dans les autres. (31) La matière est „ donc un composé dans lequel un nombre d'agens sim- „ ples se combinent ensemble en unissant leurs différentes „ forces non seulement pour coexister, mais pour agir „ conjointement „ (32).

XXI. Si l'on fait quelque réflexion sur cet enchaînement de propositions qui montrent la nature des élemens de la métaphysique de M. Néedham, il est aisé de s'appercevoir qu'il y a là mêlés deux genres de principes, dont l'un ne dépend pas de l'autre. Il n'est pas prouvé, même il y a apparence qu'il n'est pas possible que l'on prouve, que de ce que l'action est opposée à la réaction, ou de ce que la matière est un composé d'êtres de différens ordres, il doive s'ensuivre que les premiers élémens de la matière soient des êtres simples & inétendus; & il n'est pas prouvé non plus que des êtres sim-

(29) P. 375.
(30) P. 335.
(31) P. 269.
(32) P. 454.

ples & inétendus ne puiſſent ſe combiner, ou s'unir ſans préſuppoſer que ces élémens ſoient juſtement de deux eſpéces oppoſées. Il y a eu des Philoſophes qui ſe ſont imaginé que les corps étoient compoſés de deux ſubſtances différentes, mais pour cela ils n'ont pas jugé que leurs élémens devoient être inétendus & ſimples; d'autre part M. *Leibnitz* étoit pour la ſimplicité des premiers élémens, mais il raiſonnoit aſſés conſéquement pour n'en avoir pas inferé une oppoſition de nature. M. *Néedham* a donc voulu réunir des choſes, peut-être un peu diſparates, & de cet enſemble il en eſt ſorti une métaphyſique ſi ſingulière, ſi oppoſée à de certaines loix que l'on a coutume d'obſerver dans les raiſonnemens, qu'il n'eſt pas ſurprenant qu'on l'ait tout-à-fait négligée.

XXII. Puiſque les agens réſiſtans, & les agens moteurs entrent dans la compoſition de la matière, il faut bien ſavoir ce que c'eſt dans ce ſyſtème que la réſiſtance. Elle eſt donc ſelon M. *Néedham* „ cette puiſſance primitive „ que nous appercevons ſi ſenſiblement dans toutes les „ combinaiſons maſſives de la nature, la puiſſance de „ réſiſter directement à la force motrice; la force d'*Iner-* „ *tie* (33). Cette definition n'eſt pas trop inſtructive; on nous dit que la réſiſtance eſt une *puiſſance de réſiſter.* A' la verité, Monſieur, nôtre auteur en donne une autre que je ne dois pas oublier de vous préſenter. „ La ré- „ ſiſtance doit être regardée comme une force poſitive „ ſubſiſtante dans de certains principes actifs dont toute „ l'activité ſoit cette *puiſſance eſſentielle à leur nature qui* „ *détruiſe tout mouvement, lors qu'ils prédominent, mais qu'ils ont ſurmontés lorſque l'agent moteur vient à l'emporter à ſon tour* „ (34). Il me paroit que cette eſpéce de définition n'eſt pas moins ſingulière que la première; on

(33) Obſerv. nouv. p. 275.
(34) P. 439.

y voit que la resistance est une puissance qui ou, détruit le mouvement, ou ne le détruit pas. La resistance qui détruit le mouvement, n'est pas la résistance prise en général, mais elle en est seulement une espéce, & si M. *Néedham* eut bien voulu faire attention à la nature de la résistance prise généralement, il n'auroit pas donné lieu à des mal-entendus qui influent prodigieusement sur tout son sistème. On appelle donc résistance „ *ce qui contient la raison pourquoi un changement n'ait pas lieu, quoiqu'il existe une force suffisante pour le produire.* On voit par-là que la résistance ne dit rien autre qu' une puissance qui empêche l' effet d'une force, & par conséquent la résistance au mouvement n' est que la puissance qui empêche l' effet de la force motrice. Or tout le monde connoit que ce ne sont pas seulement les *combinaisons massives* qui empêchent l' effet de la force motrice, mais qu'aussi les forces mouvantes peuvent, quant à leurs effets s'entredétruire, ou se modifier d'une infinité de manière par leurs actions reciproques, c'est-à-dire par l' action, & la résistance. D' ailleurs si les agens moteurs peuvent donner du mouvement à la matière, que M. Néedham appelle *brute*, il faut bien qu' ils soient résistans; au moins cette illation est-elle dans les principes de la métaphysique d' après lesquels M. Néedham a établi la sienne „ votre élément „ disoit M. Leibnitz dans la seconde de ses lettres à Hartsoeker „ Votre élément doit être résistant, puisqu' il peut pousser les atomes. „ De-là on doit inférer que puisque le principe de résistance convient également à ce qui a du mouvement, & à ce qui n' en a pas, la résistance ne sauroit être une je ne sai quelle substance qui ait son existence à part, comme un être distingué de la substance motrice. Je dois aussi remarquer que comme les propriètes d' un être découlent de sa nature, & que toutes ses puissances tant actives, que passives en sont des propriètes, ces puissances doivent aussi

découler de la nature de l'être. Or l'élément résistant de M. *Néedham* a la puissance passive de recevoir du mouvement, puisqu'il veut bien qu'il en reçoive en effet; comment voudrat-il donc que la force de résistance qui fait la nature de l'élément résistant, soit le déterminant & de sa puissance active par laquelle le mouvement est détruit & de sa puissance passive par laquelle le mouvement est reçu?

XXIII. La force d'*Inertie* que M. *Néedham* dit être la même chose que la résistance, l'est en effet, pourvu que l'on entende par résistance cette propriété commune à tout être matériel de ne jamais changer d'état par l'action d'un autre être, sans réagir sur celui-ci, mais si l'on prend la résistance dans le sens, que lui même y a donné & que je viens d'exposer, il est manifeste que la force d'Inertie signifie tout autre chose dans les sistèmes de philosophie que l'on connoit, de ce qu'elle désigne dans la métaphysique de M. *Néedham*, qui est, sur ce point l'antipode de la philosophie Leibnitienne. *Vis inertiæ*, dit M. Hanovius dans la continuation du systéme Wolfien, *vis inertiæ est vis motrix, diverso autem respectu eadem est vis activa, & passiva; vis movens, & motui resistens* (35).

XXIV. Il y a bien encore une autre difficulté à pouvoir comprendre ce que nôtre Philosophe entend précisement par résistance, ou force d'Inertie: il faudroit savoir ce qu'il entend par *mouvement*, car sa force d'Inertie est un être dont toute la nature est une puissance de détruire le mouvement. Personne ne demande l'explication du mot *Mouvement* quand il est manifeste qu'on le prend dans le sens que tout le monde lui donne; mais si un Philosophe prétend que la matière n'est qu'un phénomène, il devroit

(35) Jo. I. §§. 8.

en

en dire autant du mouvement, & pour lors comme il n'y auroit plus de transport réel de la substance d'un lieu à l'autre, ni plus d'espace, ou de lieu distinct des substances coéxistantes, il seroit dans le cas de devoir expliquer clairement ses sentimens, à moins qu'il n'aime pas d'être entendu. Or c'est un fait que M. *Néedham* n'a pas voulu que l'on sache ce que c'est que le mouvement dans son systême, & il nous a seulement appris: „ que „ l'idée directe de résistance, ou d'activité motrice n'est „ guére plus à notre égard qu'une idée purement néga„ tive de son alternative: qu'il paroit que tel est l'ordre „ actuel de nos connoissances, que nous ne pouvons con„ cevoir l'agent résistant comme résistant sans l'agent „ moteur, ni l'agent moteur comme moteur sans le rési„ stant: (36) que tout ce qui est positif dans l'idée de „ résistance, ou de mouvement, c'est l'action spécifique „ productrice de ces effets: (37) que le mouvement, quoi„ que physiquement & dans son origine, soit une „ action absolue directement opposée à celle de résistance, „ n'est à notre égard, qu'un mode relatif d'activité (38).

XXV. Il est donc plus que probable, qu'il doit y avoir quelque raison un peu cachée qui a obligé M. *Néedham* à prendre ce ton mysterieux, d'autant plus que dans toute philosophie, dans la Leibnitienne, aussi bien que dans toute-autre, on ne néglige pas de définir & le *mouvement*, & la *force motrice*. Le mouvement „ dit l'Auteur à qui M. *Néedham* nous renvoye pour apprendre la philosophie Leibnitienne „ n'est que le changement successif „ de lieu: le lieu n'est que l'ordre des coéxistans: le „ mouvement n'est donc dans tout corps, qu'un change-

(36) Nov. observ. p. 340.
(37) P. 341.
(38) Ob. p. 477.

„ ment, ou un nouveau rapport de coéxiſtance avec les „ autres corps. „ (39) Et ſi le mouvement eſt dans cette philoſophie quelque choſe d' explicable, on doit bien s'attendre à y voir auſſi la *force motrice* définie. *Vis motrix*, ſelon Wolff, *conſiſtit in continuo conatu mutandi locum*, (40) & ſelon M. Hanovius: (41) „ ce qu' il y a de diſtinct dans la *force motrice* ce n' eſt qu' un continuel effort pour changer de lieu, ou de relation dans ſa ſituation. „ Jettez, Monſieur, un coup d' œil ſur les définitions que je viens de rapporter, & bientôt vous ſaiſirez le mot de l' énigme, & vous découvrirez la ſource de cet embarras d'où M. *Néedham* n'a pu ſe tirer, qu'en expliquant le mouvement, ou plutôt en nous le déguiſant ſous le voile *d' idées poſitives*, *& négatives*, *purement négatives*, *ou négatives de ſon alternative.* Il imagine un ſyſtème qui eſt inintelligible, ſi l'on ne ſait pas ce que l' auteur entend par le *mouvement*; car ſans celà on ne peut comprendre ce que c' eſt que l'agent moteur, & l' agent réſiſtant; & d' autre part il établit des principes qui le mettent dans l' impoſſibilité d' en donner une définition, pas-même ſimplement nominale. Il eſt impoſſible de concevoir le mouvement, & (les définitions que l'on en donne dans tout ſyſtème de philoſophie, le prouvent aſſez) ſans préſuppoſer l' exiſtence de la matière, & de l' étendue; mais M. *Néedham* prétend former la matière & l' étendue en préſuppoſant le mouvement: le moyen alors de définir le mouvement? Il a donc fallu en venir à des mots myſtérieux; mais en bonne philoſophie les mots ne diſent rien qu' entant qu'on leur donne un ſens fixe, clair, & diſtinct; après tout, il ſera toujours vrai de dire

(39) Monadologie p. 125.
(40) Coſmologia §. 149.
(41) Phyſica dogmat. §. 7.

que *l'agent moteur* eſt un être qui a de la *force motrice*; *que la force motrice* eſt une force qui produit du mouvement; & que le *mouvement* eſt un changement ſucceſſif de lieu; ſauf à expliquer ce changement, ou d'un tranſport réel, ou de quelqu'autre manière qui puiſſe s'accommoder au ſyſtème Leibnitien.

XXVI. Il faut encore nous arrêter un moment pour approfondir toute la nature des agens moteurs, & réſiſtans, telle que M. *Néedham* la leur accorde. Les agens moteurs, malgré leur force motrice, n' ont point de mouvement, & ne peuvent ſe le communiquer l' un à l' autre, mais cela arrive s' ils ſe trouvent en compagnie des agens réſiſtans. „ La force réſiſtante ſans l' agent moteur reſte ſans action, & l' activité motrice n' a aucun „ effet ſans la réſiſtance. (42) La force par laquelle ils „ agiſſent l' un ſur l'autre, eſt innée à chacun d'eux, mais, „ pour qu' ils l' exercent, il faut un ſujet convenable, & „ par leur nature ils ſont ſeuls l' un à l' égard de l' autre „ ce ſujet convenable. „ (43) Comme il eſt permis aux Philoſophes de donner aux ſubſtances telles propriétes qui peuvent le mieux s' accorder aux ſyſtèmes qu'ils ont imaginés, on pourroit fort bien paſſer à M. *Néedham* ſon raiſonnement, pourvu que l' on ne vienne pas à l' examiner de près: car ſi l' on y fait attention, & qu'on l'approfondiſſe un peu, il ne ſera pas difficile de s'appercevoir que ſes principes ſont tout-à-fait Antileibnitiens, & de plus on aura bien de la peine à s' empêcher de les juger fort èxtraordinaires. Un agent moteur, c'eſt-à-dire un être qui par ſa nature a une force motrice, n' a pas de mouvement, & ne peut, ni en communiquer, ni en prendre des autres agens moteurs? Cela, ſans-doute, n'eſt

(42) Nouv. obſer. p. 341.
(43) Il. p. 414.

pas Leibnitien, car M. Leibnitz parlant de la force motrice; nous dit ,, chez moi la force eſt toujours accom- ,, pagnée d' un mouvement effectif ,, (44) & M. Wolff explique diſtinctement le rapport qui doit y avoir entre la force, & ſon effet diſant. *Poſtea vi ponitur actio . . . Apparet adeo vim ita concipi debere, ut ex ea actio ſequi intelligatur; quam primum in agente ipſa ponitur. Itaque quamprimum in mobili ponitur vis motrix, in eodem concipitur actio motrix, unde pendet translatio per ſpatium* (45).

XXVII. Ce que je viens de citer fait aſſéz connoître ſi ces principes de la métaphyſique de M. *Néedham* ſont établis d' après ceux de *Leibnitz*; voyons à préſent, s' ils ne reſſentent pas trop le paradoxe. On nous dit que l'activité motrice, ſans la réſiſtance n' a aucun effet, mais que ſi l' on veut ſavoir quel effet elle produit lorſqu' elle eſt oppoſée à un agent contraire, on répondra, que c'eſt le mouvement: (46) de plus, on nous dit que la réſiſtance eſt une puiſſance propre à certains principes qui par leur nature detruiſent tout mouvement, quoiqu' ils n' y parviennent pas toujours. (47) Je ne ſaurois réfléchir ſur cette idée ſans me rappeller un trait de M. *Aymen* dans ſon premier Mémoire ſur les *maladies des bleds*, où, à propos de la découverte des fameuſes anguilles de M. *Néedham* il dit ,, cet auteur, d' ailleurs ſi célébre, mais ,, trop amateur du merveilleux. (48) En effet les merveilles ſont ici prodiguées & entaſſées les unes ſur les autres; on y voit des ſubſtances dont les forces n'ont point d'effets, que, lorsqu'elles ſe rencontrent avec d' autres ſubſtances dont la nature eſt préciſément une puiſſance pour détruire ce même effet: pour donner naiſſance au mou-

(44) Lettre à M. Des-Maizeaux Tom. II. p. 60.
(45) Ontologia §. 723.
(46) Néedh. obſer. nouv. p. 343.
(47) 126. p. 439.
(48) Mém. de l'Acad. R. des ſc. partie étrang. Tom. IV. p. 374.

vement il eſt d'une néceſſité abſolue de ſuppoſer un être qui par ſa nature le détruiſe : l'agent moteur, malgré ſa force motrice, ne peut avoir du mouvement, & toutefois il peut ſe le donner, lorſqu'il eſt en oppoſition avec un être qui le détruit : le même agent réſiſtant qui, parlà qu'il eſt réſiſtant, contient dans ſon eſſence la raiſon pourquoi le mouvement eſt détruit, contient auſſi la raiſon pourquoi le mouvement eſt produit. Si tout celà n'eſt pas un peu paradoxe, au moins avouerez vous, Monſieur, qu'il eſt fort merveilleux, & peut-être qu'il vous paroîtra auſſi un peu *inintelligible*, ſoit que vous preniez ce mot dans le ſens de Leibnitz, & ſoit que vous le preniez dans celui que les Logiciens lui donnent.

XXVIII. Du reſte il n'eſt pas beſoin, Monſieur, que je vous faſſe remarquer, que ces principes de M. Néedham ſuppoſent une communication de ſubſtances à ſubſtances : car l'élément réſiſtant ne pourroit jamais avoir du mouvement, s'il ne recevoit quelque choſe qu'il n'avoit pas avant l'action de l'agent moteur. Ce principe, comme je l'ai déjà fait obſerver, eſt l'antipode de la philoſophie Leibnitienne qui ne s'accommodera pas non plus de l'explication qu'il a donnée du mouvement dans les maſſes matérielles, lorſqu'il a dit. „ Toutes les fois que quelque „ quantité de ce compoſé que nous appellons matière eſt „ en mouvement, le mouvement doit être eſtimé comme „ parfaitement coétendu avec la matière, car il anime „ chaque partie „ (49). Je ne ferai pas de remarques particulières ſur la doctrine contenue dans ce paſſage, ſeulement je vous prie de la comparer à celle de Wolff, que voici. *Quæſo nimirum, quæ nam tibi eſt vis motricis idea, quam per extenſum diffundi affirmas, dum mobile in idem impingit? Quam nam diffuſionis iſtius ideam habes?* . . . .

(49) Neech. Nouv. obſer. p. 449.

Adverterunt difficultates Idealiſtæ, qui nodum Gordium non ſolventes, ſed ſecantes exiſtentiam realem corporum negarunt. Et ſane omni ævo difficultates inextricabiles viſæ ſunt, quæ ex communicatione motus emergunt, ubi eam pro transfuſione vis motricis ex uno ſubiecto in alterum imaginaris . . . . . Quamobrem apparet, quod invitis principiis rationis aſſumatur vim motricem tum demum in corpore naſci, quando ad motum impellitur. (50)

XXIX. Avant que de paſſer outre il faut que je me propoſe une difficulté qui n'a vraiment d'autre fondement, qu'un pur équivoque, mais qui feroit que la plus grande partie de ce que j' ai dit n' auroit plus de ſens, ſi elle étoit appuyée ſur quelque choſe de réel. Voici, Monſieur, de quoi il s'agit. M. l'Abbé *Regley* éditeur du dernier ouvrage de M. *Néedham* dans ſon diſcours préliminaire, préſente les principes de ſon auteur bien différemment de ce que j' ai fait „ il y a „ dit-il ſuivant M. „ Néedham, deux eſpèces d' être ſimples, l' un eſt un „ être mouvant, l' autre un être réſiſtant . . . . Il eſt „ porté à croire que l' être réſiſtant, ou, ſi l' on veut, „ la réſiſtance n' eſt autre choſe, qu'une *moindre activité* „ une eſpèce de *négation*, mais qu' il n' y a là-dedans „ *rien de poſitif* proprement dit. „ (51) Mais il eſt évident, que M. Régley ſéduit par les expréſſions équivoques & incertaines de ſon auteur, n' en a pas ſaiſi le ſens qui ne pourroit ſubſiſter, tel que l' éditeur a voulu nous le préſenter, ſans transformer le livre des *Obſervations nouvelles ſur la génération* en un pur galimathias. M. Néedham ne dit pas, que la réſiſtance n' a rien de poſitif, mais au contraire il ſoutient, que „ la réſiſtance doit être „ regardée comme une *force poſitive* (52)„ de plus il nous

(50) Horæ ſucceſſive Magdeburg. an. 1730. de notione corporis.
(51) P. xlviii.
(52) Nov. obſer. p. 439.

dit, que „ l' agent réſiſtant & le moteur différent *eſſen-* „ *tiellement* l' un de l' autre, & ſont d'une nature entiè- „ rement oppoſée „ (53); or différer eſſentiellement & être d' une nature entièrement oppoſée ne ſignifie pas avoir ſimplement *une moindre* activité. Mais par-deſſus tout cela je dois remarquer, que M. Néedham, de crainte que l'on ne donnât ce mauvais tour à ſa doctrine, a voulu en avertir formellement ſes lecteurs. „ La forte habitude „ dit-il „ que nous avons contractée dans les écoles d'aſſocier les „ deux idées de mouvement & d' activité de telle ma- „ nière, que nous ne concevons aucune eſpèce d'activité „ inférieure, que le *plus petit dégré* de mouvement rend „ difficile à concevoir la réſiſtance poſitive, comme une „ *puiſſance active innée.* „ (54) Tous ces *poſitifs*, & *négatifs* entaſſés dans le texte que j' ai produit au §. XIV. & qui ne ſignifient pas toujours la même choſe, doivent avoir occaſionné à l' éditeur cette fauſſe interprétation du ſens que M. Néedham donne à ſon principe de réſiſtance; & celà-même prouve, que notre Philoſophe n'eſt pas toujours aſſez intelligible.

XXX. Je paſſe à préſent à la ſeconde branche du ſyſtème de M. *Néedham*, à ſes élémens ſimples & inétendus, les agens réſiſtans, & moteurs, entant que, par leur action, & réaction réciproque, ils forment ce compoſé ſenſible que nous appellons matière. Ici je dois, avant tout, remarquer la néceſſité qu' il y a de diſtinguer la matière & l' étendue entant qu'elles ſont quelque choſe de réel exiſtant hors de nous, de la même matière, & de l' étendue conſidérée ſeulement par rapport à nos idées; ſans cette attention on court riſque de confondre des choſes bien diſparates, & l'on pourroit paroître Leibnitien, lorſ-

(53) Id. p. 375.
(54) Id. p. 436.

que vraiment on eſt dans des principes fort oppoſés à ceux qui ſont propres à cette philoſophie: je m'explique là-deſſus en peu de mots. M. Leibnitz tache d'établir la nature des premiers principes conſtitutifs de la matière; il les donne tels, qu'il n'eſt plus poſſible d'expliquer par eux l'étendue & les autres qualités primaires de la matière, ſuppoſé que ces qualités ſoient en elles-mêmes conformes aux idées excitées en nous par leurs actions ſur les organes de notre corps; de-là il eſt en droit de tirer cette conſéquence, que nos idées ne nous repréſentent pas les qualités primaires de la matière telles qu'elles ſont en elles-mêmes, & qu'il ne faut pas „ chercher une plus „ grande réalité dans les choſes ſenſibles hors de nous, „ que celle de phénomènes réglés: „ (55) or il eſt clair que l'énoncé dans la dernière propoſition eſt bien une ſuite du ſyſtème de Leibnitz, mais qu'il n'en eſt pas le principe. J'ai dû faire cette remarque pour en inférer, que l'opinion de ceux d'entre les Philoſophes qui ne veulent pas que l'on juge de la réalité des qualités primaires de la matière par la nature des idées que nous en avons, ne peut pas vraiment ſe bien ſoutenir ſans ſuppoſer les principes de la philoſophie Leibnitienne, mais que ce ſont ces principes, & non pas cette opinion iſolée que l'on a coûtume d'appeller la Métaphyſique de Leibnitz.

XXXI. Auſſi eſt-il vrai, que M. Néedham ne ſe donne pour Leibnitien, que parcequ'il eſt d'avis que ces principes ſur l'eſſence & la nature de la matière ſont les mêmes, que ceux de Leibnitz. Que l'on examine bien „ nous dit-il „ ce ſyſtème, on lui trouvera de la conformité avec „ la bonne métaphyſique, j'entends celle de Leibnitz qui „ traite l'eſſence primitive de la matière, & la nature

(55) Leibnitz Lett. T. II. p. 79.

de

„ de ces principes ; „ (56) & dans un autre endroit de ſon dernier ouvrage il appelle ſon ſyſtème „ les principes „ métaphiſiques que nous avons établis ſur les premiers „ élemens de la matière d' après Leibnitz. „ (57) C' eſt pourquoi il ſeroit bon de commencer par expoſer les vrais principes de la matière dans le ſyſtème de *Leibnitz*, pour les comparer enſuite à ceux qui ſont propres au ſyſtème de M. Néedham ; mais Monſieur, je n' ignore pas que vous connoiſſez aſſez bien les premiers, pour que je ne doive pas entrer dans ce détail, il me ſuffira de vous rappeller, que la différence des états intérieurs dans chaque Monade ou être ſimple, entant qu' il en reſulte un rapport fixe de l'un à l' autre, & une exigeance de coéxiſter ſelon ce rapport, eſt la véritable clef du ſyſtème Leibnitien.

XXXII. Toute-fois cette clef n'eſt pas celle qu'il nous faut, pour pénétrer dans les myſtères de celui de M. Néedham, mais il faut ſe tenir ferme à ce principe que la matière eſt compoſée de deux eſpéces d' êtres ſimples d' une nature ſpécifiquement oppoſée, dont les uns produiſent le mouvement quand ils ſont en compagnie de ceux qui le détruiſent ; de-là on aura la facilité de pouvoir comprendre comment des êtres ſimples peuvent former une étendue & comment cette étendue ſera ſolide, mobile, impénétrable, diviſible. Commençons par l' étendue.

XXXIII. M. *Néedham* veut que l' étendue conſidérée comme étendue ſoit un *genre* qui ſe diviſe en deux eſpéces : vraiment il auroit fallu définir cette étendue conſidérée comme *genre*, mais il ne l' a point fait, & il me ſemble qu' il a fort bien fait de ne pas la définir, car, ſans-doute, il n' auroit pu s' en tirer au contentement

(56) Néedh. Remarques p. 146.
(57) Nouv. Recherch. p. 35.

des Logiciens, qui prétendent que la définition du *genre* doit être applicable aux *eſpéces* ſubordonnées; or le moyen d'en trouver une applicable aux deux eſpéces d'étendue, telles qu'il nous les a donné? Savoir l'*étendue qui eſt un pur rien*, & l'étendue qui eſt une *combinaiſon d'êtres actifs*? Cette diviſion de l'étendue en deux eſpéces différentes mérite d'être approfondie, & il faut, Monſieur, que je vous la préſente dans les propres termes de l'auteur: je ſuis fort tenté de croire que c'eſt de-là que l'on doit partir pour avoir le dénoüement de la piéce méthaphiſique de M. *Néedham.* Voici donc ce „ qu'il dit. „ Il y a une étendue ſans ſolidité, que nous „ attribuons au pur eſpace, *du même genre préciſement* „ que la pure étendue dans la matière, ſi nous faiſons „ abſtraction de la ſolidité. Il ſemble qu'on conſidére tou- „ jours cette étendue, ſoit d'eſpace ou de matière com- „ me une vraie qualité phiſique également poſitive dans „ les deux cas, quoiqu'en effet l'une ne ſoit qu'un *vuide* „ *in-actif* à notre égard, un *pur rien*, & l'autre une „ combinaiſon d'êtres *actifs.* „ (58) Je commencerai par dire un mot de cette étendue qui eſt quelque choſe, & je paſſerai enſuite à l'étendue qui eſt un pur rien.

XXXIV. „ L'étendue „ ſelon notre auteur „ conſidérée „ comme étendue n'eſt rien de plus phiſiquement qu'une cer- „ taine quantité déterminée d'action extérieure. „ (59) Cette définition qui paroit d'abord dire quelque choſe, ne dit pourtant rien autre ſi non que l'*étendue conſidérée phiſiquement eſt quelque choſe qui préſuppoſe l'idée de l'étendue.* Pour voir ſi je dis vrai, il n'y a qu'à ôter de la définition ces deux mots, *action extérieure*, & y mettre à leur place ce que

(58) Néed. nouv. obſer. p. 457.
(59) P. 466.

dans la métaphiſique de M. *Néedham* ſignifient ces mots, & alors on aura la définition qui ſuit : *l'étendue n'eſt rien de plus phiſiquement qu'une certaine quantité de mouvement*; or il n'eſt pas poſſible, dans aucun ſyſtème que ce ſoit, d' expliquer ce que c' eſt qu'un mouvement extérieur ſans préſuppoſer l'idée de l' étendue ; car le mouvement préſuppoſe au moins la poſſibilité d' une ligne droite qui doit marquer la direction dans laquelle le mouvement eſt poſſible ; donc on ne peut expliquer l' étendue par le mouvement ſans faire comprendre que l' on eſt abſolument hors du cas de pouvoir expliquer nos principes.

XXXV. Conſidérons maintenant cette eſpéce d'étendue qu'on nous dit n' être qu'*un pur rien* ; peut-être que nous trouverons que ce *pur rien* eſt la piéce fondamentale du ſyſtème de M. *Néedham.* Pour vous dire, ſans détour ma penſée, Monſieur, il me paroît que notre Philoſophe, malgré ſa réſolution de faire main-baſſe ſur la métaphiſique généralement reçue, & ſur la Cartéſienne principalement n'en a cependant pas eu toujours aſſés pour ſe débaraſſer de certains principes qu' il avoit puiſés dans les claſſes ; & il en eſt arrivé que ſon ſyſtème, qui ne parle que des êtres ſimples & inétendus, eſt pourtant ſi intimément mélé à la ſuppoſition d'une étendue, qui exiſte indépendemment des êtres ſimples, qu' il ſe trouve par-là au deſſus de la portée de l' intelligence humaine. M. N. nous apprend donc ici que quoique l' étendue n' ait d' autre réalité que celle des actions des élémens ſimples, il y a cependant une autre étendue, c' eſt à-dire celle du pur vuide ; & comme cela eſt une contradiction de principes trop manifeſte, il prétend d' adoucir la choſe en ſoutenant que ce vuide eſt *un pur rien* Ce n' eſt pas ſeulement dans le paſſage que j' ai produit ci-deſſus §. XXXII. que l' on voit que M. Néedham eſt pour le vuide, mais cela paroît encore par d' autres endroits, comme dans celui qui ſuit.

„ Descartes paroît, & fait consister l' essence de la matière dans l' étendue ; l' espace & le corps deviennent „ une seule & même chose, l' Univers dans son abon-„ dance languit, & toute la nature perd son activité „ dans un plein universel, infini. „ (60) Ce texte n'a pas besoin de Commentaire pour apprendre que le vuide y est regardé comme nécessaire au mouvement. Il nous dit ailleurs que la *sphère* qu' occupe actuellement notre sistème se trouve d'une *juste étendue* par le moyen des agens résistans qui modérent l' activité des agens moteurs, ou de la force expansive ; mais, dit-il „ si la force expan-„ sive agissoit seule & librement sans éprouver aucune „ puissance antagoniste, la matière seroit réduite en un „ instant à ses premiers principes, & dispersée par con-„ séquent sans aucune liaison dans *une sphère* immense. „ (61) On voit ici une sphère d'une juste étendue devenir par l' inaction des agens résistans, une sphère immense, & conséquement s' aggrandir infiniment par l' addition d'un rien c'est-à-dire, d'un pur espace vuide ; & comme dans cette sphère immense il n' y aura plus d' action & de réaction, car on suppose qu' il n'y ait plus de résistance, il n'y aura non plus de cette espéce d' étendue qu'on nous a dit devoir être quelque chose & nous aurons pourtant une étendue immense sans rien d'étendu. Je dirai ici d'après Leibnitz, qui dans ses écrits contre Clarke a tant combattu de pareilles idées, que „ l'éten-„ due doit être l' affection d' un étendu ; mais si cet es-„ pace est vuide, il sera un attribut sans sujet, une éten-„ due d'aucun étendu . . . . Ce sont *Idola Tribus*, Chimè-„ res toutes pures, & imaginations superficielles. „ (62)

(60) Nouv. obs. p. 457.
(61) Id p. 1:1.
(62) Leibnitz quatrième lettre. Tom. II. p. 129. 130.

„ Tous ceux qui ſont pour le vuide ſe laiſſent plus me-
„ ner par l' imagination que par la raiſon. Quand j'étois
„ jeune garçon, je donnai auſſi dans le vuide & dans
„ les atômes; mais la raiſon me ramena. „ (63).

XXXVI. Il eſt néceſſaire que je produiſe encore un paſſage, qui prouve, à ce qu'il me paroit, que la ſimplicité des élémens inétendus de M. Néedham n' eſt que dans les mots, & nullement dans les idées. S' étant propoſé de prouver que les élémens ſimples ou les agens qui compoſent la matière doivent être d' une nature oppoſée; il prétend que ſi cela n' étoit pas, „ chaque agent exé-
„ cuteroit ſes actions à part dans ſa *petite ſphère* ſans
„ en affecter aucune autre (64). Il me ſemble qu' *exécuter ſes actions* veut dire agir, & agir ſans affecter d' autres êtres, ſignifie agir intérieurement, & agir intérieurement c' eſt *changer d' état dans ſon intérieur*; donc un être ſimple ne peut agir *dans ſa petite ſphére* ſans que ſon intérieur occupe cette petite ſphére; il ſera pourtant un être ſimple, & inétendu dont l' intérieur ſe repandra dans une petite ſphère. La conſéquence que je tire de tout ce que j'ai dit ſur l' étendue par rapport au ſyſtème de M. Neédham, eſt, que ſi l'on conçoit une grande étendue & qu'on l'appelle *un pur rien* ſi on y place des êtres que l'on appellera ſimples, mais qui doivent avoir une petite ſphère d'activité qui réponde à une partie de cette étendue qui eſt un pur rien, on aura toute la facilité imaginable pour expliquer l' origine de l' étendue, & les premiers principes de la matière.

XXXVII. Il me paroît donc que je ſuis un peu fondé à dire que toute la conformité qui ſe trouve entre les principes établis par M. *Néedham*, & ceux de M. *Leibnitz*

(63) Id. p. 133.
(64) Néedh. Nouv. obſ. p. 329.

n'eſt nullement dans les idées, mais dans les mots ſeulement. Un exemple ſuffira pour tout. „ Que l'on examine „ bien ce ſyſtème „ c' eſt du ſien que M. *Néedham* prétend parler „ on lui trouvera de la conformité avec la „ bonne métaphiſique; j' entends celle de *Leibnitz* qui „ traite l' eſſence primitive de la matière, & la nature „ de ſes principes. Selon ce Philoſophe ces principes „ ſimples, & inétendus, comme cauſes, ſont actifs par „ eſſence, & produiſent par leur action, & réaction com„ binées les phénoménes de l' étendue ſolide, du mouve„ ment, de la figure, & de la diviſibilité. „ (65) Commentons un peu ce texte *ſelon ce Philoſophe ces principes ſimples, & inétendus &c.* Ces principes ſimples, & inétendus le ſont dans le ſyſtème de *Leibnitz* tout-autrement que dans celui de M. Néedham; ils ne ſuppoſent pas l' idée de mouvement, ils n'ont pas de petite ſphère d'activité, ils ne laiſſent pas d'eſpace vuide entre les deux, & ne peuvent pas paſſer à occuper une ſphère immenſe après en avoir occupée une plus petite. *Sont actifs par eſſence.* Mais leurs actions n'eſt pas une force motrice, & une réſiſtance; elle n' eſt pas extérieure, mais ſeulement intérieure; & leur activité n'eſt qu'une force pour paſſer de l'un à l'autre état repréſentatif de l' univers: ſelon la métaphiſique de M. *Néedham* l'activité eſt un effort d' un être ſimple pour en pouſſer un autre qui de ſon côté fait un effort pour détruire l'action du premier. *Et produiſent par leur action, & réaction combinées les phénoménes de l'étendue ſolide, du mouvement &c.* Pour gloſſer ce texte il faut commencer par le rectifier, car s'agiſſant ici *de l' eſſence primitive de la matière, & de la nature de ſes principes*, il ne doit pas être queſtion de phénoméne. On entend communement par *phénoméne* un effet ſenſible dont on n'a

(65) Remarques p. 146.

qu' une perception confuse; & dans ce sens si l' on dit que la matière est un phénoméne c'est que l' on suppose qu'en nous, sa perception est confuse, mais tout phénoméne suppose quelque réalité, & il s'agit d'assigner la nature de ces réalités, quand on se propose d'expliquer l'essence primitive d'une chose. Je retrancherai donc du texte ce mot de *phénoméne*, & je lirai simplement, *& produisent par leur action, & réaction combinée l' étendue solide, le mouvement &c.* Ce qui représente un sens réellement conforme aux principes de M. Néedham qui pense que la matière est un résultat d' action, & de réaction conçues à sa manière, mais nullement conformes à la métaphisique de M. *Leibnitz* qui a précisement rejetté cette idée dans une lettre contre Vagnerius; (66) & quant au mouvement il n' est non plus dans le systême de *Leibnitz*, une suite d' action, & de réaction, mais, pour me servir de ses paroles mêmes „ Ce qu' il y a *de réel*, est la force ou „ la puissance, c' est-à-dire, ce qu' il y a dans l'état pré- „ sent qui porte avec lui un changement pour l'avenir. „ Le reste n'en est que phénoméne, & rapport. (67) Toute fois, quand on regarde les phénoménes du côté de nos perceptions, il est vrai alors, & il l' est dans tout systême, qu' ils dépendent de l'action, & de la réaction, c'est-à-dire, de l'action des objets extérieurs sur les organes de nos sens, & de la réaction de ces organes.

XXXVIII. Il faut encore que je dise deux mots de la divisibilité de la matière, & de son impénetrabilité; à voir d'une part les témoignages d' estime que M. Néedham a rendu au mérite distingué de Leibnitz, & d'autre part à réfléchir sur les expressions peu mesurées dont il s' est servi pour ravaler l'opinion de la divisibilité de la

(66) Oper. Tom. II. p. 226.
(67) Journ. des Savans op. Tom. II. p. 79.

matière on diroit que ſur ce point il doit être fort Leibnitien, mais il n' eſt rien moins que cela. Voici l'arrêt prononcé par notre auteur. „ L' être matériel, ſelon „ le *ſentiment commun* qu'on prétend même porter jusqu' à „ la démonſtration eſt non ſeulement composé d' infiniment petits, en quelque ſens, par une gradation non „ interrompue, mais d'une infinité d'infiniment petits. *Credat judæus appella.* C'eſt ici un abime où la vérité ſe „ perd, & s'annéantit; c' eſt non ſeulement un myſtère, „ mais une contradiction ouverte qui choque le ſens com- „ mun. „ (68) Or Monſieur, de tous, ou de preſque tous les ouvrages philoſophiques de M. Leibnitz ouvrés celui qu'il vous plaira, & je vous répond que vous y trouverés, que ce ſentiment, qui *choque le ſens commun*, eſt précisément celui de Leibnitz; mais pour vous épargner cette peine je rapporterai ici deux ou trois paſſages choiſis entre un grand nombre d'autres. *Sententiam noſtram de perpetua diviſibilitate probatione deſtitutam* cenſet reſponſio (du Médecin Sthal) *Quaſi non pro ea extent libri pleni demonſtrationibus.* (69) *Contendit reſponſio actualem cuiuslibet partis ſubdiviſionem eſſe ſuper omnem conceptibilitatem, quia ſcilicet conceptum cum imaginatione confundit* (70). *Cæterum hæc diviſio non tantum in Geometria, ſed etiam in Phyſica locum habet . . . Qui hæc non animadvertit, parum aſſurgit ad incredibilem naturæ majeſtatem.* (71) „ Je ſuis tellement pour l'infini actuel „ qu'au lieu d'admettre que la nature l' abhorre, comme „ l'on dit vulgairement, je tiens qu' elle l'affecte par tout „ pour mieux marquer les perfections de ſon auteur. „ (72) Du reſte s' il penſe que par cette doctrine on veuille don-

(68) Remarques &c. p. 156.
(69) Reſponſ. ad Sthal. obſerv. p. 151.
(70) Ib.
(71) Animadv. ad Sthal. Phyſica p. 140.
(72) Journ. des Savans op. Tom. II. p. 243.

donner à entendre, qu'un corps fini, & borné contienne un *infini absolu*, & que cet infini puisse résulter par l'addition de parties, ou de nombres, il a raison de la regarder comme contradictoire; mais aussi n' est ce pas cela que l' on prétend soutenir, lorsqu'on dit que la matière est composée d' une infinité d' infiniment petits.

XXXIX. Pour ce qui est de l' *impénétrabilité*, M. *Néedham* est dans les principes de Leibnitz, tout comme il l' est dans tout le reste; on doit donc savoir que „ l' impénétrabilité qu'on attribue communement, quoique sans „ y avoir fait assez de reflexion, à la matière, ne lui „ appartient pas, mais seulement aux êtres simples, les „ premiers principes de la matière. (73) L'impénétrabilité „ est un résultat d' action, & de réaction considérée gé- „ néralement entre des êtres opposés de quelque espéce „ qu' ils soient. „ (74) Des gens qui voudroient faire un peu les difficiles pourroient répondre à M. Néedham que puisque dans ses principes les agens moteurs n' ont point entre eux-mêmes ni d'action, ni de réaction, & qu' il en est tout de même des agens résistans, il faudroit admettre cette impénétrabilité comme quelque chose qui n' a lieu que dans le cas de l' opposition de ces deux espéces d'êtres c' est-à-dire, pour me servir d' une expression de *Leibnitz* comme un petit être subsistant, qui peut entrer, & sor tir comme les pigeons d' un colombier. Il continue à ext poser sa doctrine sur l' impénétrabilité, disant „ je suis for „ surpris qu'on ait toujours associé deux idées aussi con- „ tradictoires, que l' impénétrabilité & la divisibilité infi- „ nie. (75) Sur cela M. Leibnitz a bien voulu se donner la peine de lui répondre d' avance. *Innuitur soliditatem impenetrabilem cum divisibilitate in infinitum stare non posse.*

(73) Néedh. Nouv. obser. p. 455.
(74) Ib. p. 336.
(43) Ib. p. 452.

Sed non video quid divisibilitas faciat, aut noceat, cum de impenetrabilitate agitur. Sive divisibile sit corpus, sive indivisibile, aliud in suum locum non admittet, nisi inde excedat (76)

XL. J' en ai dit assez, Monsieur, pour vous mettre au fait des piéces qui peuvent servir à résoudre la question, s' il est plus naturel de penser que les principes Métaphysiques de M. Néedham soient établis d' après Leibnitz, comme il semble qu'il le pense lui même à présent (77), ou bien s' il paroît qu' il ait rencontré plus juste quand il a écrit que ces deux systèmes étoient fort différens n' ayant entre eux qu' une légère ressemblance (78). Cependant j' ignore si lorsqu' il a plu à M. Néedham de nous renvoyer à la Métaphysique de Leibnitz, il a entendu parler seulement de cette partie qui ne va pas au delà de la considération des principes constitutifs de la matière, ou bien si par déférence au sentiment de son Philosophe, qui regardoit les parties de sa Métaphysique comme étroitement liées l' une à l' autre: *Qui unum bene novit, omnia novit*, il ait voulu nous les proposer, toutes également, comme des uniques sources où l' on doive puiser les élémens de ce qu' il appelle *la bonne Métaphysique.* Je ne serois pas dans l' incertitude sur ce point si je n' appercevois dans la façon de s' exprimer de notre Savant un certain propos déterminé de s'en rapprocher en toute occasion, par l' énonciation, de cette manière de phrases propres uniquement de la philosophie Leibnitienne; mais d'autre part il est évident, à n' en pouvoir douter, que l'opposition entre les idées des deux Métaphysiciens est complette en tout, & par tout. Je ne déciderai donc rien sur la question, si M. Néedham permette, on ne permet-

(76) Leib. Physica pag. 141.
(77) Néed. nouv.^r recherches Physic, pag. 35.
(78) Nouv. observ. pag. 263.

te pas à ceux qui ſur certains points capitaux ne ſont pas Leibnitiens, de pouſſer leurs recherches au delà du ſenſible, & je me bournerai ſeulement à vous prouver, Monſieur, qu' il devroit avoir un peu d'intérêt à ſe décider ſur cette queſtion, pour l' affirmative.

XLI. Comme dans la Métaphyſique de notre Philoſophe „ rien n' eſt plus certain que cette eſpèce d' axiome, *ni-„ hil eſt in intellectu, quod prius non fuerit in ſenſu* (79) „ il ne doit pas être ſuprenant, vû ſa franchiſe philoſophique, qu' il ſe ſoit ſervi d' expreſſions un peu fortes pour marquer le peu de cas qu' il fait de ceux d' entre les Philoſophes qui méconnoiſſent des axiomes d' une telle évidence. „ „ Deſcartes paroît „ nous dit-il „ & pour ne pas tomber „ dans l' inconvenient d' une eſpèce de génération équivo-„ que des idées, autant que pour affermir la morale.... „ il imagine *la fable* des idées innées qu'il repréſente *groſ-„ ſièrement* ſous les notions de traces matérielles dans nos „ cerveaux (80). „ Celà, dis-je, n'eſt pas trop ſurprenant, mais il l' eſt pourtant un peu qu' il ait ignoré que le ſyſtème Leibnitien ne peut ſe paſſer de la ſuppoſition des idées innées. M. Leibnitz a parlé de cette queſtion dans pluſieurs endroits de ſes ouvrages; il l'a même traitée diffuſément dans ſes *Nouveaux eſſais ſur l' étendement humain*, mais je borne ici, Monſieur, à vous en préſenter un ſeul paſſage. „ Peut-on nier, qu' il y ait beaucoup d' inné en „ notre eſprit, puiſque nous ſommes innés à nous-mêmes „ pour ainſi dire? & qu' il y ait en nous; être, unité, „ ſubſtance, durée, changement, action, perception, plai-„ ſir, & mille autres objets de nos idées intellectuelles? „ Ces objets étant immédiats, & toujours préſents à notre „ entendement, puourquoi s' étonner que nous diſions que „ ces idées nous ſont innées avec tout ce qui en dépend?

(79) Nouv. obſerv. pag. 485.
(80) Remarque au pag. 206.

„ Je me ſuis ſervi auſſi de la *comparaiſon* d'une pierre de „ *marbre, qui a des veines*, plutôt que d'une pierre de „ marbre tout unie, ou des tablettes vuides, c'eſt-à-dire „ de ce qui s'appelle *tabula raſa* chez les Philoſophes ; „ car ſi l'ame reſſembloit à ces tablettes vuides, les véri- „ tés ſeroient en nous comme la figure d'Hercule eſt dans „ un marbre quand le marbre eſt tout-à-fait indifférent à „ recevoir ou cette figure, ou quelqu'autre. Mais s'il y „ avoit des veines dans la pierre, qui marquaſſent la figu- „ re d'Hercule préférablement à d'autres figures, cette „ pierre y ſeroit plus déterminée, & Hercule y ſeroit com- „ me inné en quelque façon, quoiqu'il fallut du travail „ pour découvrir ces veines, & pour les netoyer par la „ poliſſure en retranchant ce qui les empêche de paroître „ (81) on voit par ce texte que M. Leibnitz a donné dans des groſſiertés encore plus maſſives de celles de Deſcartes, car vous comprenez bien, Monſieur, que des traces dans nos cerveux ſont quelque choſe de plus fin que des veines dans un marbre.

XLI. Puiſque M. Néedham ſe tient à ſon axiome que, *nihil eſt in intellectu, quod prius non fuerit in ſenſu*, il eſt aiſé à imaginer qu'il n'eſt pas dans le ſyſtème de *l'Harmonie préétablie*; mais de ſavoir quel eſt préciſément le ſien ſur l'origine de nos idées, c'eſt ce que l'on ne peut pas dire au juſte, car il en a donné deux, l'un contraire à l'autre. Si l'on veut s'en tenir à ce qu'il en a écrit dans ſon ouvrage du 1750. il me ſemble qu'on doit dire qu'il eſt de l'opinion du Docteur Clarke qui penſoit que les images des objets ſont portées par les organes des ſens dans le *ſenſorium*, où l'ame les apperçoit comme dans un miroir; mais ſi l'on s'en rapporte à ce qu'il nous a dit dans ſon dernier ouvrage, on devroit penſer qu'il eſt pour

(81) Avant propoſ. p. 7.

l' influence très-physique du corps sur l'ame. Là il nous a dit „ que les actions extérieures engendrent nécessaire- „ ment des impressions intérieures . . . qui produisent des „ différences idéales entre objet & objet . . . . différences „ qui comme effets, & comme rapports, affectent l' ame „ elle-même qui dans son *sensorium* voit comme dans un „ *miroir* tout ce qui se passe hors d'elle (82) „; mais dans son nouveau livre il veut „ que cette exaltation graduée, „ cette activité progressive dont la matière est douée, prin- „ cipes de toutes les métamorphoses physiques, ou chimi- „ ques . . . . en *agissant sur l'ame par des impressions sen- „ sibles*, l' excite à penser, & lui en fournisse la matière „ (83). Or il est vrai qu' outre que ces deux sentimens ont été expressément combattus par *Leibnitz* dans ses écrits contre M. Clarke, ils sont de plus inalliables avec les principes Métaphysiques de notre Philosophe. Dans la première de ce deux opinions, l' ame n' appercevra rien dans son miroir, que ce qu' il y a, & suivant le systéme de M. Néedham il ne peut y avoir que de l' action & de la réaction, c' est-à-dire, du mouvement, & de la résistance au mouvement; or à la verité ce n' est pas cela qu'elle voit lorsqu' elle s' apperçoit de ce qui se passe hors d'elle. Mais si l'on vouloit s' en tenir au second sentiment, & dire que la *matière exaltée agit sur l'ame par des impressions sensibles*, c' est-à-dire par le mouvement, alors on doit se rappeller que dans les principes de notre Métaphysicien, cette espèce d' action ne peut avoir lieu que sur un *Etre résistant*, sur un être qui par sa nature détruit le mouvement, & par conséquent l'ame devroit être quelque chose d' analogue à la matière brute & résistante; & je suis sur que M. Néedham n' avouera pas cela: je ne m' arrête pas sur ces expressions *d' être représentatifs*, & *d'effets représen-*

(82) Nouv. observ. pag. 251.
(83) Remarques &c. p. 232.

tatifs dont il s' est aussi servi quelque fois, car il est trop clair que ces phrases Leibnitiennes ont dans cette Métaphysique un tout autre sens.

XLIII. Pour achever mon paralléle, il me reste encore à parler du principe de la *raison suffisante*, de celui des *indiscernables*, de la loi de la *continuité*, & de la nature de la *reproduction* végétable & animale; mais pour ce qui est des deux premiers points ce seroit en pure perte que je voudrois, Monsieur, vous en entretenir, comme si je prétendois vous prouver que M. *Néedham* n'est pas pour *l' harmonie préétablie*: ce sont des choses qui sautent aux yeux, & qui n' ont pas besoin de preuves. On en peut dire de même du systéme de la reproduction: si l' on n'a pas lûs tous les ouvrages de Leibnitz, au moins tout le monde connoît-il sa Théodicée, & sait par conséquent qu'il y soutient la préexistence des germes; mais il en parle encore plus précisément dans différens endroits de ses autres ouvrages il ne me reste donc qu' à faire quelques observations sur la loi de la *continuité*.

XLIV. M. l'Abbé de Lignac a fort bien remarqué l'influence qu' a sur-tout le systéme de M. Néedham la prévention, où il est, pour une certaine *échelle* d' Etres, exactement graduée. „ Il forme „ dit-il „ une échelle d'êtres „ dont il est extrémement préoccupé; c' est cette échelle „ qui l' a probablement engagé dans la route obscure qu'il „ a suivi „. (84) Cela est encore plus sensible dans son dernier livre, où il n' est pas possible que l'on ne s'apperçoive que c' est cette échelle qui décide de tout. Les sentimens qu' il en a, sont si compliqués & si variables, qu'il n' est pas trop facile de les bien démêler & de les présenter au net sans se jetter dans de longues recherches, ce qui ne m' est pas permis de faire à présent, d'autant plus,

(84) Lettres à un Améric. l. XII, pag. 118.

Monſieur que ma lettre eſt déjà aſſez longue, & que même ſans entrer ſur ce point-là dans des diſcuſſions de quelque étendue, je ne manque point de matériaux pour vous en écrire une ſeconde je ne ferai donc qu'effleurer la matière & je me bornerai à des remarques les plus courtes qu' il me ſera poſſible de donner.

On connoiſſoit dans la Philoſophie-Scholaſtique une loi de la nature qui portoit, que *Natura abhorret a ſaltu*, loi que M. Leibnitz a expliqué diſtinctement par celle qu' il appelle la loi de la *continuité*.

„ Rien ne ſe fait tout d' un coup „ dit-il „ & c' eſt „ une de mes plus grandes maximes & des plus vérifiées „ que la nature ne fait jamais des ſauts „ (85). C' eſt donc en conſéquence de cette loi, que les changemens dans la nature n'arrivent pas tout d' un coup, & que rien ne va d' un dégré ſenſible à l' autre, ſans paſſer par tous les dégrés intermédiaires poſſibles: un corps qui eſt en mouvement n' a pas paſſé du repos à ſon plus haut dégré de viteſſe, ni une eau froide n'eſt pas devenue chaude tout d' un coup, mais par une parfaite graduation. Ce n' eſt pas vraiment dans ce ſens, que M. Néedham a conſidéré la graduation dans l' ordre des changemens qui arrivent dans la nature, lorſqu' il nous a tant parlé d' *exaltation graduée*, *d' échelle complette*, *exactement graduée & variée à chaque pas*; mais il entend parler de la totalité des ſubſtances, & il eſt d' opinion que ces êtres, ou conſidérés comme ſimples, ou comme compoſés, forment toujours une échelle, ſelon lui, graduée.

XLVI. Voici, Monſieur, ſon raiſonnement pour la graduation des être ſimples. „ Si la ſpontanéité, la ſenſation, „ la penſée ne ſont qu' un réſultat d'actions ſimples, pour„ quoi la réſiſtance & l'activité motrice ne le feroient-elles

(85) Nouveaux eſſais &c. p. 11.

„ pas auſſi ? . . . Pourquoi l'échelle de ces êtres ne feroit-„ elle pas complette & étendue à toute eſpèce d' actions, „ aux inférieures, auſſi bien qu' aux ſupérieures ? „ (86) Et pour ce qui eſt de la compoſition qui réſulte de la combinaiſon de ces êtres ſimples, l' échelle ſera compoſée de la façon qui ſuit : „ à une extrémité de cette échelle „ ſera le plus haut point de l' activité motrice, & à l'au-„ tre la réſiſtance ſon antagoniſte (87). Ces agens ou prin-„ cipes contraires ſont combinés enſemble par toute la na-„ ture en toute proportion imaginable, pour produire des „ différences ſpécifiques entre les parties intégrantes de „ ſubſtance à ſubſtance, d' élement à élement depuis les „ groſſiers, & les plus peſans, juſqu' au plus légers, & „ plus mobiles. Par conſéquent enfin toute la nature eſt „ variée, non ſeulement dans une échelle d' agens ſimples „ ou de premiers principes, mais auſſi dans une échelle „ de combinaiſons qui relatives l' une à l' autre, ſont ou „ réſiſtantes ou motrices pénétrables, ou pénétrantes en „ toute proportion imaginable, ou quantité de réſiſtance, „ ou d' activité motrice, & paſſent ſucceſſivement d' un „ état à un autre : elles aſſimilent, ou ſont aſſimilées, el-„ les ſont attractives ou répulſives, & produiſent les ſym-„ pathies, ou les antipathies phyſiques „ (88).

XLVII. Ce ſeul début, Monſieur, vous fait aſſez comprendre que je ne dois pas m' enfoncer dans ce labyrinte, crainte de ne m' en pouvoir tirer qu' avec bien de la peine ; il vaut donc mieux ſe mettre un peu au large, ſans s' engager dans le fort des détours dont la piéce eſt embarraſſée. Il me ſemble donc qu' avant tout il ſeroit à propos de ſavoir, ſi ce ſyſtéme, tel qu' il a été combiné par M. Néedham, eſt ſeulement imaginaire, ou bien ſi on

(86) Néedh. obſerv. p. 344.
(87) P. 342. 343.
(88) P. 342, 343.

nous

nous l'a donné comme quelque chose de conséquent à des principes surs & évidens. A' la vérité il n'est pas trop facile de déterrer ce principe dans les écrits de notre Auteur; il y est pourtant, & il faut l'aller chercher à la dernière feuille de son livre de 1750., ou à la page 508. il dit, „ que Dieu, comme dit l'Ecriture, est le Dieu „ de l'ordre, & la Philosophie nous apprend qu'il est le „ Dieu de l'harmonie. „ De ce principe doit s'ensuivre, qu'il y aura dans cet univers de l'ordre, & de l'harmonie; reste à savoir, si cet ordre & cette harmonie sont précisément ce qu'il a plus à M. *Néedham* d'y mettre pour former cette échelle graduée qui varie à chaque pas par des nuances les plus délicates. Voyons si cela est.

XLVIII. *Dieu est le Dieu de l'ordre & de l'harmonie*; donc si l'être qui *sent*, & celui qui *pense* sont des êtres simples, il faut aussi que l'être qui détruit le mouvement, & celui qui le produit soient des êtres simples, autrement il n'y aura plus d'harmonie ou d'échelle complette: cette conséquence, à la vérité ne me frappe pas beaucoup. D'ailleurs il me paroît que je serois fort embarrassé à monter par cette échelle, y ayant de trop grands sauts à faire pour passer d'un échelon à l'autre, car ce qui *sent*, ne me paroît pas moins éloigné de ce qui se *meut*, que ce qui produit le mouvement le doit être de ce qui le détruit. Ce raisonnement, s'il étoit recevable, prouveroit pour les Monades de Leibnitz, & le passage seroit des substances qui ont de la sensation, c'est-à-dire, des perceptions claires, aux substances qui par leur nature n'ont que des perceptions obscures. Cependant je ne dissimulerai pas que M. Néedham n'a pas manqué de soins pour reussir à mettre tout en ordre, & rendre son échelle praticable le plus qu'il se pouvoit. Le premier expédient a été d'avoir recours à des mots, & par-là le mouvement, qui dans la façon de penser commune ne différe que par la di-

ction, & les dégrés de célérité, est devenu une *force expansive, une exaltation graduée, & une vitalité qui pervade tout le regne végétal en l' exaltant sans discontinuation*; mais comme cette ressource n'étoit pas encore tout ce qu'il lui falloit pour perfectioner dans toutes ses parties la grande échelle de l' existance, il a voulu y suppléer, permettez-moi, Monsieur, d' appeller les choses par leur nom, il a voulu dis-je y suppléer par une espèce de jeu de Marionettes ou, si vous voulez, par des petits tours de singes. Il a donc supposé que les animalcules microscopiques, les polypes, les vers de terre, & quelques autres de ces êtres que l' on appelle communement des animaux n' ont aucun principe de sensation, & ne sont rien autre que des êtres vitaux, ou des êtres dans lesquels le mouvement étant beaucoup exalté, opére sur des organes encore délicats, & plus exquis que ceux que nous avons; & en partant de-là il accomplit la *grande échelle de l' existance* avec la plus grande facilité du monde. On peut donc „ comprendre comment un être simplement vital peut paroître „ sensitif, & *jouer le role* d' un animal dans son économie, „ & même, jusqu' à un certain point dans sa connoissance = La vitalité qui pervade tout le regne végétal en „ l' exaltant sans discontinuation, se *termine par ce moyen* „ d' une manière sensible, aux êtres, où la sensation la „ plus exquise, avec toutes ses counoissances particulières „ & purement sensitives, *quoique singe de la raison* jusqu'à „ un certain point, finit où l' entendement s' éléve & répend ses premiers rayons; „ si le Dieu de l' ordre, & de l' harmonie eut destiné dans la profondeur de ses conseils, & de ses décrets de faire éclater l' immensité de sa gloire par la création d' une échelle d' êtres dont la graduation fut imperceptible, peut-on douter un moment qu' elle ne dût se trouver plutôt dans les réalités que dans les apparences?

XLIX. L' opinion ſur cette échelle exactement graduée, telle que l'on prétend de l'établir, vient originairement de la combinaiſon de deux principes de la Philoſophie de Leibnitz, dont l' un eſt la loi de *continuité*, & l' autre le ſyſtème du monde meilleur qui eſclud ce que l'on appelle le vuide des formes *vacuum formarum*. Si l' on regarde la choſe d' après les principes de Leibnitz, elle n' eſt pas telle que des gens ont coûtume de la repréſenter ou de la défigurer. Dans ces principes on ſuppoſe que Dieu n' a créé l' Univers qu' en vûe d' une fin générale qu' il s' eſt propoſée: que le décret de Dieu regarde la totalité des choſes en tant qu' elles ſe rapportent à cette fin générale; que tous les êtres ſimultanés pris, ſoit collectivement, ſoit diſtributivement, & ſucceſſivement ne ſont compris dans les décrets de Dieu poſitifs, ou permiſſifs qu' en tant qu' ils ſe rapportent, comme fin ſubordonnées à la fin générale & directe: que Dieu en créant l' univers doit y avoir mis tous les êtres, toutes les réalités, & toutes les perfections, non pas poſſibles, mais compoſſibles à la fin générale, & aux fins ſubordonnées qui ſont l'objet du décret Divin. „ Je crois „ dit Leibnitz „ qu' il y a néceſſaire- „ ment des eſpèces qui n' ont jamais été, & ne ſeront „ jamais, n' étant pas compoſſibles avec cette ſuite des „ créatures que Dieu a choiſie, mais je crois que toutes les choſes, que la parfaite harmonie de l' univers pouvoit y recevoir, y ſont (89) „ or il paroit que pour le fond, M. Néedham ſoit à peu-près dans les mêmes principes, mais il eſt ſi occupé de la formation de ſon échelle, que l'on diroit qu' elle eſt chez-lui le principe, au lieu qu' elle n' en devroit être qu' une conſéquence. Il veut que les animaux communs ayent une ame ſenſitive; cette ame eſt donc dans ſon ſyſtème une réalité poſſible: il veut que les

(89) Nouv. eſſais ſur l' entend. p. 267.

vers de terre les polypes, les étoiles de mer, les animalcules microſcopiques ſoient fournis d' organes encore plus exquis que ceux que nous avons, mais il ne veut pas qu' ils ayent une principe de ſenſation; pourquoi cette réalité poſſible n' aura-t-elle pas lieu puiſque le ſujet en eſt capable? D' ailleurs je ne conçois pas trop des moyens pour allier les principes, que je viens de rapporter avec la doctrine de M. Néedham, où il dit, que „ l'anéantiſ-„ ſement d' un grain de ſable, d' une montagne ſur la „ terre, d'une eſpèce d' animaux, ou de plantes, ou mê-„ me d' une planette, ne peut affecter le tout que fort lé-„ gérement, & ſans aucune conſéquence „ (90). Enfin Monſieur, je tiens que la graduation de cette échelle peut bien former un objet digne de l' attention d' un obſervateur, mais qu' il n' eſt pas raiſonnable d' en faire un principe, d' où l' on parte pour façonner la nature à ſa fantaiſie.

Vous trouverés apparemment, Monſieur, que je tarde bien à executer ce que vous m' avés têmoigné déſirer ſur l' ouvrage de M. Néedham, vous ne me demandiés pas des remarques ſur la Métaphyſique; j'eſpère de vous ſatisfaire dans une ſeconde lettre, & que vous approuverés allors ce que j' ai obſervé dans celle-ci; m' ayant paru difficile de ne pas m' occuper à diſcuter cette Métaphyſique qui paroit faire dans l'intention de l'Auteur, la principale partie de ſes ouvrages. „ En attendant que je puiſſe m'acquitter de ma parole aggrées les aſſurances des ſentiments diſtingués avec leſquels j' ai l'honneur d' être

Du Monaſtère de Caſanova ce 13. Décembre 1769.

(90) Néed. nouv. recherc. ſur la nat. p. 59.

JOANNIS PETRI MARIAE
DANA

Descriptio, & usus Agarici, seu Boleti pellicei.

Dudum haesi utrum inter Lichenes membranaceos, an inter Fungos pelliceos, vel alibi reponerem parasiticam plantam, de qua hic agere constitui, quod non satis cognita, & descripta videatur, neque eam apud Clarissimum LINNAEUM descriptam invenerim. Quamquam enim ad ipsius *Boleti* genus reduci patiatur; (nisi praestet ad *Poria*, vel *Solenia* Clarissimi HILLII amandare) incertae tamen foret speciei. Celeber. HALLERUS dubitationis signo apposito (*historiae n.* 2290 *edit.* 2) inter *Polyporos* sub nomine *Agarici coriacei fagini haematoidis Gagnebin* hanc fortasse speciem intelligit, quae inter Agaricos LINNAEI locari nequit; quamque aestimandum videtur, ideo HALLERUM non descripsisse accuratius, ut ceteras consuevit, quod pauca de ea ab amicis cognoverit, aut quod specimina imperfecta ad ipsum adducta sint, quin suis ipse oculis in loco natali eamdem cernere potuerit. Doctissimus hic VIR ex opinione D. GAGNEBIN cognomini Agarico Querno BREYNII (1), & GARIDELII similem esse refert. Nos vero licet Clarissimum GARIDELIUM (2) de nostra specie egisse ex iis, quae scribit, clare intelligamus; non perinde tamen certo statuere possumus speciem BREYNII eamdem esse, ac nostra. Ex descriptione, quam fuse subjungimus, sat facile erit utriusque differentiam comparare. Alios auctores, qui recte hanc speciem descripserint, aut pinxerint, non invenimus.

(1) In Ephem. Germ. an. 4 & 5 obs. 150 descripto.
(2) Hist. Aix. pag. 10.

Pellem ovinam rite praeparatam magis vel minus crassam, firmam, & albidam omnino ita imitatur quibusdam frustis semipalmaris vel palmaris latitudinis, ut alterum ab altero aegre distinguas, si praesertim margines, ubi exterius stirpi adhaerebat, & aëri libero patebat, rescindantur.

At in loco suo natali eum perpendens, nempe inter fissuras vetustissimarum, & marcescentium Laricum, quas occupare solet, vidi juxta earumdem longitudinem plane extendi, & ab uno ad aliud stratum veluti propagari, ac continuari; planum utique esse, ut Lichenes quidam, licet alicubi multiformis revera videatur: nempe in fatiscente vetusta Larice majores, minoresve relinquuntur inter abscedentia strata fissurae, ac intercapedines, inter quas fungosa *Boleti* illius materia se insinuat, accommodatque sese, relicto veluti modulo inter ea strata; vacua illa exactissime occupat tam plana ea majora, & ampliora, arboris superficiei parallela, quam alia transversa a superficie ad centrum tendentia, quae minora observantur. Nullas interim neque in externa superficie sive limbo, ubi aëri exponitur, neque in reliquis interioribus, ubi ligno adhaeret, peltas, laminas floriferas, aut alterius figurae flores ostendit. Ligno objectae ipsius superficies pellicula juxta unam saepius directionem tenuissime striata, ceu cuticula obteguntur. Eae striae nihil aliud sunt nisi fibrarum lignosarum impressiones; propterea prout magis vel minus exstant, modo profundos sulcos, modo elevata linearia juga producunt, quae prominentiae, si in modulo lignoso effoeto desint, levis inde, & plana omnino efficitur fungi superficies, in qua etiam per acutissimam lentem difficile possunt ulli pori deprehendi. Hinc pro majore vel minore crassitie, & consistentia modo pelliculam, modo membranam, saepius albidam pellem ad chirotecas praesertim conficiendas praeparatam imitatur; interdum etiam corii magis minusve crassi, diversimode striati, & rugosi crassitiem, & consistentiam obtinet.

Ad pellem vero villosa mollitie, consistentia, & tenacitate ita accedit, ut chirotecae, immo & braccae ex consutis ipsius fungi latioribus frustis parari queant; quin etiam a nonnullis rusticis alpicolis revera paratas fuisse audiverim, quae a *pelliceis* primo aspectu vix dissimiles apparebunt, praesertim iis, quarum candidus color jam sit leviter coinquinatus. Interna hujusce fungi substantia fungosa vere, & veluti stupea materia componitur, quae cum nulla substantia melius, quam cum vulgari fomite comparabitur; quamvis ab ipsa differat, non modo ob candidum colorem, sed ideo quoque, quod pro esca igni paranda fomitis vulgaris vices agere nequeat. Ligneis stratis ex altera parte adhaerens, si forte soli, aëri aperto, & pluviae diutius exposita permanserit, mollem, flexilemque suam inde naturam amittit, indurescit, siccaturque in fragilem, nec difficile pulverandam membranam, quae sponte sua in fragmenta discinditur. Ceterum si in iis locis praesertim exploretur, ubi in duas veluti partes tenuioribus interstitiis replendis magis accommodatas dividitur, tenuissima, interdum pellucens, mollissima, ac morbidissima est, & ibi a se invicem diductis memoratis laminis, conspicienda praebet tenuissima, candidissima, ac veluti gossipina brevia fila, quibus totam plantam componi facile conjicias. Hanc conjecturam firmare, & ipsum harum partium situm patefacere visa est maceratio diuturna in lixivio alkalino; tum ipsa combustio hujusce fungi prius per acidum nitrosum madefacti, aut per acidum vitriolicum superaffusum denigrati, dein loti, siccati, ac inflammati. Scheleton enim a combustione relictum regularem quamdam structuram ostendit, potissimum si ad lentem spectetur. Sic namque componi apparet ex longitudinalibus veluti tubis, seu filis majusculis, ad quorum utrinque latus distiche disponuntur breviora quaedam, & tenuiora fila, longitudine inter se aequalia; ex

quibus ſimili ordine utrinque diſcedunt alia breviſſima, ac minima, in ſphaerulas aſperatas, ceu totidem aſpergillos, deſinentia. Quid acida, quid ignis conferat ad pulcherrimam hanc ſtructuram producendam non video: hinc facilius crederem ad eamdem extricandam, ac aperiendam ex interpoſitarum partium deſtructione potius inſervire.

Sapor ipſius leviſſime amaricans, ſubſtipticus eſt: in ore facile molleſcit, ut pellis ovina, & inde ſimiliter extenſibilitatem acquirit; a ſaliva tamen non ex integro ſolvitur, ſed humectatus pallidum colorem aſſequitur, ac pellucidus evadit.

Hujus fungi materiam incolae vulgo ajunt, nil aliud eſſe, niſi concretum effoetae terebinthinae reſiduum inter vetuſtorum emarceſcentium laricum fiſſuras a putredine, & aetate ipſa genitum. Verum quanto in errore verſentur non modo conjicere licet ex differentia, quae inter inflammabilitatem hujus fungi, & terebinthinae intercedit, & ex odore, quem vix ullum, aut potius alium, debilem, non facile nominandum ſpirat, tum etiam ex ſapore, quo fere deſtituitur; ſed ex eo etiam, quod proportione, & natura a terebinthinae principiis abunde diverſa ſint illius elementa, & praeſertim id conſtat ex iis, quae de regulari fungi ſtructura diximus. Idipſum ex utriuſque analyſi colligi etiam poteſt, ac intelligi ab experimentis, quorum quaedam a me inſtituta ſubnectam non modo, ut de hucuſque allatis judicium facilius ferri poſſit, ſed etiam, ut ad alias hujus vires indagandas tum oeconomicas, tum medicatas aditus pateſiat. Analyſis Chymica eſt ex diligenti encheireſi accurate inſtituta, me rogante, a Perilluſtri Domino GRAFFIONO in militaribus cohortibus REI TORMENTARIAE Succenturione Chymici Regii laboratorii, & Muſaei Metallurgici Directore. Indidit Clariſſimus VIR parvae, mundae retortae vitreae hujus fungi exſiccati, & conciſi drachmas

quinque, ſcrupulos duos, grana quatuor ponderis medicinalis. Vitreo excipulo rite agglutinato, ſuppoſitoque s. a. igne reverberii aſcendere vidit: 1° cum pauco phlegmate oleum clarum ſubflavum, tenue, foetidulo peculiari odore imbutum ad petrolei, vel ſuccini, vel terebinthinae odorem accedente, vaporemque tenuiſſimum, qui eodem tempore per conclave late diffuſus percipiebatur. Aucto igne empyreumaticum ſimile oleum paullo minus clarum adhuc prolectum eſt. Denique ex continuata vehementis ignis actione empyreumaticum aliud oleum craſſius, tenacius, excipulo adhaerens, dilute fuſcum, ſimili intenſiorique odore praeditum aſcendit. Oleum a ſubjecto phlegmate ſeparatum per infundibulum ponderis fuit drachmarum duarum, ſcrupulorum duorum & granorum undecim. Phlegma ſubaciduli ſaporis erat, ponderis drachmae unius, & granorum quindecim. Caput mortuum in fundo retortae relictum nigerrimum erat ſquammis veluti talcoſis micans, (harum vix aliquot ramenta magnes attrahebat) pondere drachmae unius cum ſcrupulo uno, & granis ſex, quod calcinatum maximam ſui ponderis partem amiſit, & colorem acquiſivit albeſcentem. Hoc in ſufficienti quantitate aquae ſtillatitiae elixiviatum, & filtratum reliquit ſupra filtrum terreſtrem ferruginei coloris materiam, cujus adhuc portio levis magneti adhaeſit. Aqua illius lixivii filtrati evaporata ad ſiccitatem vix ullius ſalinae contentae materiae ſigna dedit; ſed tenuiſſimae, inodorae, candidae, abſorbentis, inſipidae terrae portionem reliquit, pondere granorum octo, quae cum acidis ſpiritibus aceti, vitrioli &c. efferbuit.

Ad ſanguinem in quocumque caſu ſiſtendum commendant, frequentiſſimeque in uſu habent quidam alpicolae Vinadienſes, apud quos adeo antiquus hic uſus eſt, ut hunc fungum etiam ipſo per traditionem a majoribus tranſmiſſo, nomine *ſtagna ſang*, indigitare ſoleant. Adhibent nempe vel parti, unde ſanguis fluit, immediate applicitum, vel

intus susceptum in dysenteria (3), & mensium fluxu nimio, quibus in casibus, & praesertim etiam in haemorroidibus nimium fluentibus sub specie pessarii, vel suppositorii utiliter applicant; in vulneribus crassiora frustula parti adligando sanguinem compescunt, quae vulnera, si leviora fuerint, citissime sanant. Utuntur praeterea loco pellis adcerata sustinenda, & partibus applicanda. Familiarissimus autem usus ejusdem fit ad emplastrum de pice Burgundica recipiendum, quo communiter utuntur adversus dolores quoscumque reumaticos, praesertim vero lumbares. Etiam per se dolentibus similiter partibus fungus pelliceus applicatus valde utilis censetur, quod tamen fortasse non aliter praestat, quam a cute aëris injuriam prohibendo, atque eamdem fovendo, & perspirationem adaugendo. Ad Ophthalmiam saliva ipsa emollitum oculis applicant, quam inde brevi discuti observant.

Atque haec quidem erit dixisse satis de viribus ad ipsam fungi substantiam pertinentibus, quas indicavi potius, ut ad alias fiat transitus, quas hucusque ignoramus. Etenim, ut verum fatear, Chymica producta obtenta ex ipso per distillationem multo plura videntur promittere, si in alios usus vocentur. Oleum nempe illud essentiale tam clarum, levius, & tenuius, quam obscurius aliud, & flavidum odore suo non ingrato, sed admodum penetrante, & petroleum, ac spiritum succini, & terebinthinae aemulante, praesertim rectificatum, non modo supra nervos olfactorios agendo, sed supra alias quoque partes vires exerere posse videtur medicatas nervinas, solventes, penetrantes, discutientes, & cum sulphure junctum traumaticas, de hac tamen, aliisque, quoniam experimenta, hucusque desunt, nihil dicam. Unice addam, quod semel expertus fui, rheu-

(3) Teste D. Javelli Medico Vinadiensi sollertissimo Academ. Monspessulanae correspondenti.

maticum ex suscepto frigore recenter contractum dolorem, facta unica vespertina illitione illius olei tenuioris supra locum affectum, intra noctem evanuisse: pulveri Nicotianae parva quantitate additum, praesertim si prius rectificatum fuerit cum ossibus calcinatis, odorem non ingratum, & veluti succinatum ipsi communicasse, & in Cephalalgia utiliter naribus assumtùm fuisse. Idem oleum rectificatum cum additis floribus Acaciae seu Mimosae plenae L. & sufficienti aquae quantitate odorem empyreumaticum fere amittit, & citrinum colorem adquirit, & minima quantitas ipsius sufficit tribuendo odori forti, & nervis amico Nicotianae pulveratae, cujus usus aliquis esse potest in spasmodicis affectionibus. Verumtamen de hisce, aliisque viribus huic fungo tributis aliae observationes ulterius instituendae melius nos poterunt edocere, eo vel magis, quod sufficiens quantitas ad experimenta capienda facile obtineri possit ex Alpibus Balneorum Vinadiensium, aliisque vicinis, ubi sponte pronascitur, atque luxuriat.

OBSERVATIONS CHIMIQUES

PAR M.r LE COMTE DE SALUCES.

Sur l' Ens Veneris *de Boyle*

I.

La Médecine a été long tems esclave des remèdes chimiques : leur activité a souvent causé des cures surprenantes, & ces faits extraordinaires ont tellement excité l'enthousiasme naturel à l' homme, principalement dans ces siécles d' ignorance, qu'on n'a pas eû le tems d'appercevoir les cruels effets, ni de réfléchir sur les suites funestes de ces prétendues panacées. Pour le bonheur de l'humanité, des Observateurs judicieux, des Médecins savans & honnétes firent enfin tomber le voile d'une ignorante témérité, & tentérent de retenir dans les bornes de la prudence l'usage jusqu'alors immodéré de ces remèdes, & après en avoir proscrit un grand nombre, ils s'attacherent à déterminer les méthodes les plus sures pour la préparation de ceux, dont ils avoient connu la bonté, & l'efficacité par les effets constans que produisoit leur administration dans certains cas.

I I.

Un des remèdes qui a toujours fait le sujet de très-grandes contestations entre les Médecins, même de notre tems est celui que Boyle donne pour spécifique dans le rachitis, & qu'on connoit sous le nom d'*Ens primum*

Veneris, ou ſimplement d'*Ens Veneris*. Pluſieurs Médecins ſe ſont élevés contre ce remède, tant vanté par ce célébre Anglais, à cauſe des effets malfaiſans du cuivre qui en rend ſelon eux l'adminiſtration dangereuſe; d'autres ont adopté le nom du remède, & en ont changé la préparation; quelqu'un enfin a cru trancher la difficulté en décidant que ſi le colcothar eſt tellement dépouillé de principes métalliques, qu'il ſoit réduit à une terre vierge, il n'ajoute rien à la vertu qu'à le ſel armoniac par lui même.

I I I.

Le doute de Boyle ſur la ſublimation de quelque portion du colcothar dans l'opération (*a*) & le parti que Boherawe, Batheus, & bien d'autres Médecins chimiſtes ont pris de ſubſtituer le vitriol martial à celui de cuivre, m'ont engagé à examiner un objet auſſi important pour l'humanité.

I V.

L'énoncé de l'opération telle que la preſcrit l'Auteur ne laiſſe aucun lieu de ſoupçonner qu'il n'ait crû d'employer du vitriol de cuivre; voici ſes propres termes *recipe igitur hungarici, vel huius defectu dantiſcani, aut cuiuſcumque boni vitrioli venerei quantitatem arbitrariam, hanc calcinatam, vehementi igne ad obſcuram uſque rubedinem dulcifica aquae calentis affuſione frequente, donec aqua affuſa nullam prorſus ſaporis immutationem recipiat. Colcothar hoc exquiſite dulcificatum, probeque exſiccatum, diligentiſſime cum*

(*a*) Undecimo, partim ignavia ipſa vel fixitas colcotharis, & cupri in eo contenti, partim, quod ſalis armoniaci bis vel ter per ſe ſublimati flóres frequunter ſatis flavi, enti veneris pallidiori haud diſſimiles aſcendant, ſcrupulum nobis aliquando injecit, utrum ens veneris noſtrum quicquam cuprei vel colcotharini contineat nec ne? Boyle exercit. de util. phil. add. part. 2. §. 14. pag. 387.

ſalis ammoniaci optimi pondere anatico commiſceatur : mixturae huius in retorta vitrea , vel ſummo qui per arenam excitari poteſt caloris gradu , vel aperto etiam igne , tantum quantum ad ſummitatem cervicis retortae exaltari poteſt , ſublimetur ; qua ſublimatione peracta , e retorta diffracta (capite mortuo ſepoſito) ſublimatum omne eximatur , rurſumque exactiſſime commiſceatur , quo particulae ſalis ammoniaci forſan ſeorſim ſublimatae colcothari denuo incorporentur : reſublima mixturam hanc per ſe , ut prius in retorta vitrea: quod ſi volueris liceat ſecundum hoc ſublimatum reiterata vice ſublimare. Quo autem proceſſum integrum perfectius intelligas ad notas ſequentes attendas.

V.

§. 4 *Primo vitriolum cupro abundans ſemper communi vitriolo anglicano praetulimus , ex quo operarios in cupri fodina Detfordiae , prout ipſi ibidem locorum mihi narrarunt, ad augendam vitrioli quantitatem multum ferri cupro addere percepi.* (*b*)

V I.

Il eſt donc évident qu' il eſt ici queſtion de vitriol de cuivre exempt de tout mélange de fer; il s'agit maintenant de voir ce qu' il a fait, malgré ſes précautions.

V I I.

Pour ne pas trainer en longueur par des reflexions qui ne ſeroient plus d' aucune utilité ici, quoique ce ſoient celles qui m'ont conduit à trouver que ce célébre Phiſicien quelque bonne volonté qu'il eut d'employer du meil-

(*b*) Boyle exerc. de util. phil., ut ſup. pag. 383. & 384. voyés auſſi exerc. v. §. 14. pag. 234.

leur vitriol de cuivre n' a cependant toujours fait uſage que d'un vitriol martial, qui à la verité n'en étoit pas tout-à-fait exempt, nous allons déterminer l' eſpèce de vitriol dont il ſe ſervoit; il me ſuffit pour cela de rapporter ce qu' il dit dans un autre endroit de quelqu'un de ſes ouvrages (*c*). *Medicamentum tamen illud quod alibi ens primum veneris voco factum ex valide calcinato, beneque edulcorato vitrioli dantiſcani colcothare, elevatumque ope ſalis armoniaci in ſubrubreum ſublimatum.*

VIII.

Ce texte, ainſi que bien d'autres, qu'on peut recueillir dans les différens ouvrages de cet Auteur ſuffit pour nous aſſurer qu' il s' eſt toujours ſervi du vitriol de Dantzick, & pour décider de ſa nature je me contenterai de rapporter ce que M. Valmont de Bomare en dit dans ſa mineralogie pag. 304. obſ. (d) à l'article *vitriol verd*, voici la maniére dont il s' exprime.

IX.

„ Comme ce vitriol ne participe que du fer, il con-
„ ſerve aiſément ſa couleur.

X.

Tout ce-ci poſé, je ſuis d'autant plus porté à croire que Boyle a été induit en erreur, qu'en examinant les preuves qu' il apporte lui même pour décider de la bonté, & de la nature de ſon vitriol, je ne trouve qu'une ex-

(c) Simplicium medicamentorum utilitas, & uſus §. VII. pag. 57. edit. colon. allob. 1686.

périence très-équivoque, & par laquelle il ne peut tout au plus prouver que ſon vitriol contenoit du cuivre; on en jugera par le texte même. *Si fruſtum ſumas vitrioli Dantiſcani bonae notae ulliuſve alterius vitrioli, in quo venus praedominatur, idque ſputo, vel aqua pura humefactum, cultro probe ad cotem polito, ullive alii nitenti fruſto ferri vel chalibis, affrices mox (ut antehac tradidimus,) chalibem colore ſubrubro, colori cupri gemino, inficiet*, Boyle de color. exper. xlvii. pag. 138. ed. Genev. 1680. nous remarquerons ſeulement en paſſant que l'expérience rapportée par M. Boyle eſt préciſément la même qui eſt en uſage pour découvrir ſi les vitriols de Mars tiennent du cuivre, comme nous le trouvons dans M. de Bomare.

X I.

Il eſt inutile de s'arrêter plus long tems ſur cet objet, tout le monde ſait aſſés qu'il n'y a point de vitriol dans le commerce, qui ſoit exactement pur, & pour cette raiſon les maîtres de l'art ſuggérent différentes opérations pour le purifier, au reſte il me paroit aſſés prouvé par ce que nous avons cité de M. de Bomare, que le vitriol en queſtion eſt un vitriol ferrugineux ou martial, & d'ailleurs on peut reconnoitre ſenſiblement les caractères du vitriol cuivreux par la couleur des fleurs ammoniacales, car quelque ſoin que l'on ſe donne, ces fleurs ſeront toujours d'une couleur verte tant qu'il reſtera des parties métalliques dans le vitriol qu'on aura employé, & pour lors il eſt inconteſtable que ce remède devra être regardé comme un poiſon, & lorſque ces fleurs ne ſeront pas teintes en verd, on ne ſauroit douter qu'il ne ſoit arrivé dans ce cas, ce que M. Baron remarque très-judicieuſement dans les notes ſur Lémeri p. 399. „ ſavoir que l'alkali volatil du „ ſel armoniac n'agit point ſur cette chaux (c'eſt-à dire ſur

„ le colcothar cuivreux) & qu'il agit d'autant moins qu'il ne ſe rencontre aucun intermède capable de le dégager de ſon acide, c'eſt pourquoi le ſel armoniac ſe ſublime tel qu'on l'a employé &c., ce qui me porte à conclure, que le ſavant Anglais s'eſt trompé, en ce qu'il a crû de très-bonne foi, que le vitriol de Dantzick étoit entièrement cuivreux, & par-là même préferable à celui de Detfort en Angleterre, & qu'il a nommé *Ens Veneris*, ce qui n'eſt véritablement qu'un *Ens Martis*; ainſi il n'y a pas de doute qu'on doit abſolument rejetter, avec les meilleurs Auteurs, ce remède préparé avec le cuivre; des expériences réitérées nous ayant convaincu du danger que l'on court par l'uſage intérieur de ce minéral, & de n'employer que du colcothar Martial, ou un autre ſaffran de mars bien préparé, comme cela eſt aſſés facile. Enfin nous finirons cet article par une queſtion, dont la ſolution eſt entiérement du reſſort de la Médecine, ſavoir s'il ne ſeroit pas plus utile d'employer la limaille de fer ou d'acier au lieu d'un ſaffran ou du colcothar?

Sur le blanchiſſage

DES SOIES.

XII.

Cette préparation eſt fort ſimple, il ne s'agit que de faire cuire les Soies dans une eau de ſavon plus ou moins forte, ſuivant la teinture qu'on ſe propoſe de leur donner. Si l'on conſidére néanmoins la quantité de ſavon qui eſt néceſſaire pour les mettre en état de paſſer enſuite à la teinture, & ſi l'on réflechit que l'*expérience a fait reconnoître* (c'eſt M. Macquer qui parle) *que les Soies décreuſées par le ſavon ont pluſieurs défauts & ſingulièrement moins de lu-*

ſtre que celles de la Chine qu'on dit l'être ſans ſavon on conviendra que cet objet mérite quelque attention : quoique je n'aye pas été à même de continuer les expériences que j'avois entrepris à ce ſujet, je ne laiſſerai pas ignorer cependant le rěſultat des obſervations que j'ai pû faire, eſpérant qu'elles ne ſeront pas tout-à-fait infructueuſes.

XIII.

Quelque ſoit la nature du vernis dont la Soie eſt enduite, ce qui ne fait pas l'objet de ces recherches, je me permettrai ſeulement de faire remarquer que les acides altérés, même par des matières graſſes, bien loin de lui enlever ce vernis, le lui redonnent, lors même qu'elles ont été blanchies & que ſi l'on fait entrer de l'acide vitriolique dans le bain ſavonneux il n'eſt même plus poſſible de les faire repaſſer au blanc : je ne dois pas non plus négliger de faire obſerver que les alkalis fixes, ne produiſent pas un grand effet, lorſqu'on les employe en bien petite doſe, où qu'ils énervent beaucoup les Soies, s' ils ne les décompoſent pas entièrement, lorſque la leſſive eſt un peu plus forte; d'où il ſuit qu' il ne ſeroit, peut-être pas d'une économie, bien entendue que de les expoſer à un pareil riſque, je n'inſiſterai pas davantage ſur ma propoſition & je me bornerai encore à remarquer que les matières abſorbantes, telles que les os calcinés, les yeux d'écreviſſes &c. ne font preſque point d'effet ſur les Soies pour les mettre en blanc.

X I V.

Un ſavon liquide où il entroit beaucoup moins d'huile qu'on n'en met ordinairement dans les fabriques, au rapport de M. Géofroi, mais autant qu' il en falloit pour émouſſer l'acreté de l'alkali fixe ſans être aiguiſé par la

chaux a très-bien répondu à mon attente, & rempli toutes les indications que je m'étois proposées ; car outre que les Soies furent très bien décreusées & conservérent plus de lustre qu'elles n'ont ordinairement, on voit sensiblement que je profitai beaucoup du côté de la dépense.

X V.

Les sentimens sont partagés sur les Soies de la Chine, les uns pensent qu'on les décreuse sans cependant employer du savon ; les autres croyent qu'elles sont naturellement blanches: dans cette incertitude j'osai former le soupçon que cette nation si économe & si industrieuse ne fit que dans une seule opération le filage, & le dégomage : l'expérience vint à l'appui de mon idée, car en me servant d'une eau légérement savonneuse je reussis à filer quelques cocons jaunes & verds en soie blanche du plus beau lustre, j'observai même qu' il n'est pas nécessaire que le bouillon soit aussi chaud que l'est ordinairement l'eau dans le bassines, ce qui fait un nouvel objet d'épargne.

X V I.

Il résulte de tout ce que je viens de dire ; 1° Qu'en substituant une matière savonneuse au savon manufacturé on obtient un avantage considérable du côté de la dépense, d'autant plus que j'ai éprouvé qu'on peut très-bien se servir de cendres lessivées, & filtrées par le papier posé sur une piéce de laine encadrée, & dont on émousse l'acreté par une plus ou moins grande quantité d' huile suivant que la lessive est plus ou moins forte : d' où il résulte l'avantage de conserver plus de lustre aux Soies; 2° Qu'en décreusant les Soies à la bassine, outre qu'on gagne une opération, le filage étant uniforme, la force du fil ne l'est pas

moins

moins, car toutes ſes parties ſont également expoſées à l'action du menſtrue, ce qui ne ſauroit arriver en décreuſant les Soies par échevaux, & d'ailleurs le déchet de deux opérations ne peut à moins d'être beaucoup plus conſidérable que celui d'une ſeule.

X V I I.

L'uſage d'un ſavon extemporané pour décreuſer les Soies à la baſſine, me fît naître l' idée de tenter la formation d'un ſavon ſolide ſans le ſecours du feu; Shaw en dit un mot dans ſes leçons, & nous voyons dans les matières médicales qu'on en prépare pour l'uſage médecinal. Il eſt d'ailleurs aſſez ſimple de penſer que le ſavon ſolide n'eſt qu'une combinaiſon d' huile à un alkali la plus concentrée poſſible pour prendre cette forme, & que le ſavon liquide eſt cette combinaiſon avec ſurabondance d'eau; tout ce qui facilitera donc l'évaporation de la partie acqueuſe donnera plus ou moins promptement la ſolution du probléme: en fouettant comme on fait pour le beurre un mélange bien conditionné d' huile, & d'alkali minéral rendu cauſtique par la chaux, on parvient à manufacturer du ſavon ſolide, on ſent aſſez qu'une machine muë par l'eau ſeroit encore d'un grand avantage.

X V I I I.

Il ne me reſte qu' à ſouhaiter que ces foibles eſſais puiſſent tourner à l' utilité du public.

Turin ce 20 Décembre 1767

De la teinture en noir

SUR LA SOIE.

XIX.

Il y a tout lieu de croire „ dit Monſieur Macquer que
„ dans le grand nombre des drogues qu'on employe pour
„ le noir il y en a beaucoup d'inutiles, ce qu'il y a
„ de plus eſſentiel à obſerver ſur la teinture noire, c'eſt
„ qu'en général elle altère & énerve beaucoup les étof-
„ fes, en ſorte, que celles qui ſont teintes en noir ſont
„ toujours beaucoup plutôt uſées, toutes choſes égales d'ail-
„ leurs que celles qui ſont teintes en d'autres couleurs;
„ c'eſt principalement à l'acide vitriolique de la coupe-
„ roſe, lequel n'eſt qu'imparfaitement ſaturé par le fer
„ qu'on doit attribuer cet inconvénient: comme le fer
„ uni à tout autre acide, & même aux acides végétaux
„ eſt capable de produire du noir, il y a tout lieu de
„ croire qu'en ſubſtituant d'autres combinaiſons de ce mé-
„ tal à la couperoſe en pourroit remédier à cet incon-
„ vénient.

XX.

Pour découvrir les défauts de cette teinture il me paroit qu'il faut avant toutes choſes analiſer les méthodes reçues dans les attelliers les plus recommandés, car il n'y a pas apparence, quelqu'ait été l'ignorance des Teinturiers ſur le principe colorant dans la teinture en queſtion, qu'ils ſe ſoyent déterminés à ajouter des nouvelles drogues juſqu'à en porter le nombre ſi loin, que, parcequ'ils auront reconnu l'imperfection de leur méthode plus ſimple, or il eſt queſtion de voir ſi cette imperfection dépend *du nombre, de la qualité, ou de la manière d'employer ces drogues.*

XXI.

Ce n'eſt que par la comparaiſon entre ces méthodes, & l'analyſe de chacune d'elles qu'on peut démêler leurs défauts pour ſervir enſuite de guide dans les tentatives qu'on peut faire, en rapprochant alors pluſieurs connoiſſances que nous devons aux Chimiſtes modernes: je ne rapporterai que les drogues, ſans parler de leur poids qu' autant qu' ils pourront avoir cauſé ou contribué au préjudice de cette teinture: car on pourra toujours le trouver dans l'excellent ouvrage de la teinture en ſoie par Monſieur Macquer, d'où je tire ceci; au reſte je dois avertir davance que je ſuppoſe que les ſoies ne ſe trouvent pas d'une mauvaiſe condition, car ſi toutes choſes égales la teinture noire endommage plus les étoffes que les autres teintures; il eſt évident que cet inconvénient augmentera dautant plus que la matière, ſur laquelle on voudra l'appliquer ſera moins bonne.

XXII.

Cette reflexion ne me paroit pas ſans fondement, car je ne ſâche pas que les écarlates, ni les ſoies teintes en cramoiſi ſouffrent ce reproche, & perſonne n' ignore aujourd' hui que c'eſt avec l'eau régale qui tient de l'étain en diſſolution qu'on en exalte la couleur, ce qui s'appelle *compoſition*, on pourroit dire, il eſt vrai, que dans ces couleurs l'eau forte ſe combine avec le tartare blanc, mais quoique après la combinaiſon faite on ne doive plus craindre l'action de l'acide ſur l'étoffe comme dans le noir, il eſt probable qu'elle continue à ſe faire ſentir par la raiſon qu'en donne Monſieur Macquer; il eſt cependant naturel de penſer que dans le tems de la combinaiſon, l'acide de l'eau régale agira ſur l'étoffe, de même que celui de vi-

triol dans la teinture noire, & c'eſt principalement à l'occaſion qu' il arrive ces décompoſitions, comme nous le verrons, qu'on doit craindre d'énerver ou de bruler les étoffes, quoique je ne me diſſimule pas, je le repete, que l'abondance des ſubſtances ſalines dont on fait uſage pour le noir, & qui ſont très-faciles à être décompoſées ſoit une raiſon qui rend les étoffes d'autant moins durables qu'elles retiennent dans ſes pores des cauſes permanentes de deſtruction.

XXIII.

En rappellant ici la combinaiſon qui doit arriver de l'acide de la *compoſition* avec la baſe du criſtal de tartre, de manière que l'acide végétal ſe trouve libre, il me paroit qu'on peut voir d'où vient la belle couleur de l'écarlate ſur les laines, & du crémoiſi ſur les Soies, les acides végétaux ayant la propriété d'exalter la couleur naturelle des teintures rouges, & principalement de la cochenille: il reſteroit à examiner pourquoi en décompoſant le tartre par d'autres acides ou par des alkalis, & enfin pourquoi en ſubſtituant une autre baſe que l'étain à l'eau régale on ne réuſſiſſe pas de même; cela mérite trop d'attention pour que je néglige de le ſuivre, lorſque je ſerai aſſuré que M. Macquer n'en a point fait l'objet de ſes recherches dans la découverte d'une couleur d'écarlate ſur les étoffes en Soie, qu' il vient de donner à l'Académie des Sciences de Paris.

Description des drogues, ou de la méthode de plusieurs teinturiers de Paris.

X X I V.

Noix de galle noire pilée, du cumin, de sumac, d'écorces de grenades, de colloquinte, d'agaric, de coques de levant, de Nerprun, de psilium, du bois de campéche, de la gomme arabique, d'écume de sucre candi, de la cassonade, de limaille de fer, du Réalgar, de l'orpiment pilé, de l'arsenic blanc, de couperose verte; de sublimé corrosif, de sel ammoniac, de sel gemme, de cristal minéral, de litarge d'or, d'antimoine pilé, de plumbago, de verd de gris, le tout dans du vinaigre selon l'art.

Méthode des Génois.

X X V.

Noix de galle, gomme de sénégal, vitriol Romain, & limaille de fer dans l'eau. (*a*)

(*a*) Comme les artistes pourroient être bien-aise de savoir les procédés de Génes, & de Tours, je les transcrirai ici d'après M Macquer, *art de la teint. en Soie.*

Noir de Génes pour les velours.

On fait bouillir la Soie pendant quatre heures avec le quart de son poids de savon blanc de Marseille, on la lave à fond, dans une chaudiére de cinq-cents peintes d'eau: faites bouillir sept livres de galle; laissez déposer la galle, tirez l'eau à clair, & ayant jetté le marc remettez l'eau de galle dans la même chaudière, plongez y à demi une cuiller percé à purée, dans laquelle vous mettrez sept livres de gomme de Sénégal, sept livres de vitriol Romain ou couperose, & sept livres de la plus belle limaille de fer. Le bain ayant dissout ces drogues, laissez éteindre le feu, & fermenter ce bain pendant huit jours; ensuite faites-le chauffer, & quant il sera prêt à boüillir, mettéz de nouveau, suspendue dans la même chaudière, la

Méthode des Tours.

XXVI.

Galle d'Alep, vitriol d'Angleterre, limaille de fer, gomme du pays.

XXVII.

En examinant ces trois procédés que nous pouvons réduire à deux, nous devons naturellement être frappés de la simplicité de l'un, & du nombre prodigieux des drogues de l'autre ; il ne paroîtra pas à la pluralité que le noir de Génes, & de Tours, supposé qu'on ne les nomme pas, puisse jamais être aussi beau, ni comparable avec celui où il entre tant de drogues : à parler cependant avec sincérité, ce noir si simple, est, & passe pour des plus beaux, d'où viendra donc cette énorme différence ? En refléchissant

même passoire ; & ayant fait six paquets composés de la sixième partie de la quantité de gomme, couperose, & limaille destinée à ce bain de noir, selon la quantité de Soie, à raison d'une livre de chacun de ces ingrédiens pour dix livres de Soie, faites fondre dans la passoire cette sixième partie du total. Le feu étant ôté, & ayant fait jetter dix pintes d'eau froide sur le bain qui doit rester chaud à y pouvoir tenir la main, faite mettre la Soie sur des lisoirs ; plongez-là dans le bain, & l'y tenez pendant dix minutes ou environ. Lisez les écheveaux quatre fois, après quoi tordez-les à la cheville sur la chaudière.

Passez sur le même bain de nouvelle Soie sans rien ajouter, la traitez de même, commencez d'abord par la trame, ensuite passez le poil, enfin, le bain étant beaucoup refroidi, passez y la chaîne qu'on ne veut teindre ordinairement qu'en gris noir.

Toute la Soie ayant passé dans ce premier bain rechauffez-le, & y remettez la passoire, avec un autre sixième partie de gomme, vitriol, & limaille de fer, quand le bain sera rafraichi, comme ci-dessus, passez y la Soie comme au premier bain, observant cette fois-ici de passer le poil le premier, ensuite la trame, & toujours la chaîne la dernière ; faites ce manége six fois. Tant que la Soie étoit mouillée, son noir charmoit, même comparé avec celui de tours. p. 176.

ſur les qualités des drogues, & ſur la manière de les employer, il m'a paru d'en entrevoir la cauſe.

XXVIII.

Il me faut remarquer en premier lieu la préférence que le teinturier Génois donne à la galle légère de la Romagne, & de la Sicile, pendant qu'en France on fait uſage, pour engaller pour le pied de noir de galle noire, & péſante en trop grande quantité par rapport à la Soie; ce qui a été relevé par les Génois au ſujet de la teinture de Tours, qu'on a enſuite rectifiée: or il eſt naturel de penſer que ces habiles artiſtes ſeront également attentifs, & ſcrupuleux dans le choix des noix de galle.

Noir de Tours.

Pour cent livres de Soie, on fait boüillir pendant une heure vingt livres de noix de galle d'Alep en poudre dans ſuffiſante quantité d'eaux. On laiſſe enſuite repoſer le bain juſqu'à ce que la galle ſoit précipitée au fond de la chaudiére, d'où on la retire. Après quoi on y met deux livres & demie de vitriol d'Angleterre, & douze livres de limaille de fer, vingt livres de gomme du pays, c'eſt-à dire, du *prunier cerifier &c.* qu'on met dans une eſpèce de chaudron à deux anſes, troué de toutes parts. On ſuſpend le chaudron avec des bâtons dans la chaudière, de manière qu'il n'aille pas au fond. On laiſſe diſſoudre la gomme pendant un heure, en la remuant légérement de tems en tems avec un bâton. Si l'heure paſſée, il reſte encore de la gomme dans le chaudron, c'eſt une marque que le bain qui eſt de deux muids en a pris autant qu'il faut. Si au contraire toute la gomme eſt diſſoute on peut en remettre trois ou quatre livres. On laiſſe ce chaudron continuellement ſuſpendu dans la chaudière, d'où on ne l'ôte que pour teindre, & on le remet enſuite. Pendant toutes ces préparations la chaudière doit être tenue chaude, mais ſans boüillir. L'engallage de la Soie ſe fait avec un tiers de galle d'Alep. On y laiſſe la Soie d'abord pendant ſix heures, puis pendant douze, le reſte ſelon l'art. *ibid. p.* 78

X X I X.

J'obſerve enſuite que les Génois n'ajoutent rien à la décoction, ou bain de galle, au lieu que les François y font entrer le cumin, le ſumac &c.: mais eſt-il bien prouvé que toutes ces drogues poſſédent à un dégrés auſſi éminent la ſtipticité, & la propriété de précipiter le fer comme la noix de galle ainſi que l'a démontré M. Léméry ? Le fait ne ſemble pas favoriſer cette idée.

X X X.

Je vois qu'après avoir ôté le marc de la décoction de la galle, & y avoir fait diſſoudre la gomme, le vitriol, & la limaille de fer on en ôte le feu pour laiſſer fermenter ce bain *ou pied de noir* pendant huit jours, au lieu que les François, calcul fait, teignent au plus tard dans ſix jours.

X X X I.

Après tout enfin, je remarque que le pied de noir n'eſt ches les Génois qu'un encre ſimple, pendant que dans le procédé des François il arrive néceſſairement des décompoſitions, & des récompoſitions; étant très-naturel de penſer que la loi des affinités ſera ici obſervée comme elle l'eſt aſſez généralement: & par conſéquent il eſt naturel que l'acide vitriolique qui n'eſt que foiblement retenu par le fer s'en détache pour s'emparer d'un alkali fixe, d'un alkali volatil &c. L'acide marin exercera à ſon tour ſa ſupériorité, & au défaut d'exacte ſaturation, il agira en qualité de corroſif ſur la Soie même, après avoir (*b*) formé du

(*b*) Comme l'acide marin a plus d'affinité avec l'antimoine qu'avec le ſublimé corroſif, il paroit probable qu' il ſe forme un beurre d'antimoine

du plomb corné : quant à l'arſenic il eſt probable qu'une partie s'en envolera, & que s'il en reſte, qu'il ſe combinera avec le fer ; ce qui peut-être, fait noircir la teinture, & corrige ainſi l'altération que doit cauſer le nombre de ces décompoſitions : je crois même de pouvoir ſoupçonner que cela ſe paſſe ainſi, car il eſt conſtant que les acides étant neutraliſés, l'encre reſte détruite, il eſt vrai, qu'outre à ces acides ſaturés & neutres il reſteroit encore le végétal : mais en ce cas il arriveroit que la couleur ſeroit duë uniquement à l'acide végétal, pendant que les autres drogues ne ſeroient qu'en pure perte, & au préjudice des étoffes : peut-être encore, que dans le tems que l'acide vitriolique chaſſe le marin de ſes baſes, l'arſenic s'en empare, quoique à la vérité, l'acide vitriolique ſe trouvant ici combiné avec une ſubſtance métallique, il me ſemble qu' il doit être compris dans le cas dont parle M. Macquer dans ſon dictionnaire de chimie page 441 tom. 2 article *ſels arſenicaux*.

XXXII.

De tout ce que nous venons de dire, il me paroit de reconnoître que le peu de ſcrupule des Teinturiers dans les proportions, & dans le choix des drogues, a été l'origine des additions empiriques qu'on a fait dans cette teinture : mais il ne faut pas imaginer pour cela qu'on ait ajouté ce grand nombre de drogues inutiles tout d'un coup. C'eſt ainſi qu'il en arrive dans toutes les choſes qui ſont abandonnées à des ſimples manœuvres, ſans qu'elles ſe trouvent ſubordonnées, & ſous la direction des perſonnes qui

qui ſera de même décompoſé, à cauſe de la trop grande quantité de liquide, dans lequel il ſe trouve étendu, & en ce cas l'acide marin agit en qualité de corroſif : quoiqu' il en ſoit cependant, l'antimoine eſt toujours en pure perte.

en remontant à des principes exacts, & ſimples ſâchent démêler les cauſes, auxquelles on doit aſſigner les changemens, & les altérations qu'on n'attendoit pas, & qui ſauroient par conſéquent y remédier : c'eſt une marche naturelle de l'eſprit humain d'avancer toujours, & il n'appartient qu'au philoſophe de retourner ſur ſes pas, auſſi pendant que l'un pour réuſſir, ſe croit en devoir de compoſer, & de ſurcompoſer ; l'autre reconnoit bien ſouvent qu'il faut ſimplifier, & par conſéquent retrancher. C'eſt ce qui ſe montre évidemment dans la teinture en queſtion, & c'eſt ce que nous allons prouver, maintenant par une méthode ſinthétique pour réunir les deux preuves les plus convaincantes que nous fourniſſe la chimie.

XXXIII.

La méthode que nous avons ſuivi juſqu'à préſent, & la comparaiſon des procédés reçus, nous a ſervi de guide pour nous convaincre de l'inutilité, & de la malfaiſance de pluſieurs drogues : par celle que je me propoſe maintenant, je chercherai de déterminer celles qui y entreront avec avantage.

XXXIV.

Après avoir décreuſé la Soie je plongeai les échevaux dans une décoction de noix de galle Romaine, & après l'engallage, j'en mis un dans une terrine qui contenoit une décoction de noix de galle faite dans l'eau, & un autre dans une décoction faite avec le vinaigre, avec quatre gros de gomme Arabique, je les fis bien tremper l'un & l'autre ; ayant enſuite ôté les terrines de deſſus le feu, je mis une taſſe de diſſolution de vitriol dans chacune, ſavoir ſur deux parties de décoction une de diſſolution, qui étoit de quatre gros ſur deux livres d'eau.

Premier résultat.

XXXV.

Dans la décoction faite avec l'eau, la couleur noire parut à l'instant, & il ne se manifesta aucun changement sensible dans celle qui étoit faite avec le vinaigre: je plongeai alors les deux écheveaux que j'avois retiré pour ajouter le vitriol, mais ni l'un, ni l'autre ne furent pas beaucoup altérés dans la couleur, ce qui me détermina à y ajouter encore une demie tasse de dissolution sans néanmoins qu'il parut de changement bien sensible; j'en ajoutai alors une tasse, ce qui revenoit à 5 parties de vitriol sur 4 de décoction de noix de galle: la Soie qui étoit dans la décoction faite avec l'eau parût alors beaucoup plus noire que l'autre; ce qui se soutint dans les opérations qui suivirent, jusqu'à ce que j'eus un beau noir sur les deux écheveaux; je fus obligé à la vérité pour y réussir de dissoudre deux gros de nouveau vitriol dans un tiers de la première quantité d'eau, & après avoir ajouté encore une tasse de dissolution je retirai les écheveaux, je le fis sécher à l'ombre, & au cinquième jour je les remis dans leurs bains respectifs que j'avois animé, en ajoutant 5 gros de limaille de fer dans chacun, je les mis au feu boüillir environ une heure; je les retirai après ce tems pour les faire sécher, & dans 24 heures je les repassai sur ce bain, & les lavai à fond, jusqu'à ce qu'ils ne perdirent plus de couleur, & ils parurent alors d'un beau noir; seulement étant humides celui, qui étoit dans la décoction avec le vinaigre paroissoit tirer au rouge.

XXXVI.

Il me faut maintenant remarquer qu'ayant mis deux nouveaux écheveaux dans ces bains à cette dernière opé-

ration ils en ſortirent tous auſſi noirs, & auſſi beaux que les deux premiers, ſoit après le lavage, qu'après qu'ils furent parfaitement ſecs : d'où il ſuit évidemment, que ſans multiplier les opérations on teindra toujours en beau noir toutes les fois que les ingrédiens ſe trouveront dans la proportion convenable.

Deuxième réſultat.

XXXVII.

Mais paſſons à la ſuite de notre examen, aux bains en queſtion que nous pouvons nommer *pied de noir*, j'ajoutai ſucceſſivement du *cumin* du *Pſilium*, de l'*écorce de grenade*, de la *coloquinte*, de l'*agaric*, & comme je voulois conſerver un certain rapport, j'animai le bain avec du vitriol, & de la limaille, mais je ne vis pas que ces ſubſtances en augmentaſſent la couleur ; le bois de campéche ſeulement me parut l'avoir un peu plus foncée, mais ce qui fît varier le fond fut l'addition ſucceſſive du ſel ammoniac du ſublimé corroſif, du ſel gemme, du criſtal minéral, car alors le noir me paroiſſoit avoir tourné tantôt au brun très-foncé, tantôt au gris : couleurs qui changeoient encore par l'addition du réalgar, de l'orpiment, de l'arſénic blanc, de l'antimoine, du verd de gris, de la litarge &c. & principalement d'une quantité de couperoſe bleüe, & de limaille.

XXXVIII.

Voici deux choſes principales que j'obſervai dans la ſuite de ce procédé, p.° que, comme j'employai près de 18 jours pour toutes ces additions, les bains laiſſérent paroître de la moiſiſſure après que j'eus ajoutés les ſubſtances végétales dont j'ai parlé, & en 2de lieu que l'arſénic blanc

ſe ſoutient preſqu'en entier à la ſurface des bains, de même que l'orpiment, quoique je les aye faits boüillir à gros boüillons un tems conſidérable.

XXXIX.

Je crois donc être fondé à conclure que les méthodes de *Tours*, & de *Génes* ſont infiniment ſupérieures à celle des autres Teinturiers qui entaſſent drogues ſur drogues dans les teintures noires pour la Soie, je ne doute nullement qu' il en ſoit de même pour les laines ce que je n'ai cependant pas vérifié; au reſte tant qu'on rendra la teinture compoſée, on ne gagnera rien ni du côté de la teinture même, ni dans la conſervation des étoffes. La bonté donc des étoffes, le choix des drogues, la préciſion dans leurs poids, le ſoin dans les opérations, & principalement dans l'adminiſtration du feu doivent être le ſécret d'une bonne couleur noire. (*c*)

X L.

Ce mémoire étant principalement deſtiné à l'avantage des arts, & conſacré par conſéquent à l'utilité publique, je crois qu'on ne me ſaura pas mauvais gré de ce que je l'enrichirai de découvertes & d'obſervations qui ont étés faites par d'autres, l'eſprit patriotique m' impoſe le devoir ſacré de chercher à être utile.

(*c*) Il paroit par le précis analitique que j'ai donné §. XXVIII. que dans le cahos de tant de drogues le ſeul acide dont ſeroit formée l'ancre où la teinture noire ſeroit, peut-être, le végétal, mais j'ai eu occaſion d'obſerver que la teinture qui en réſulte §. XXXII. n'eſt jamais d'un ſi beau noir: il n'en eſt pas de même pour les encres proprement dites, ſavoir celles dont on ſe ſert pour écrire, car je me ſuis aſſuré que le noir le plus beau pour la teinture des étoffes ne paroit plus le même quand on l'emploit ſur le papier.

Sur un moyen de teindre la Soie en un rouge vif de cochenille &c.

X L I.

J'ai fait mention ci-devant §. XXIII. de la découverte de Monſieur Macquer pour teindre la Soie en couleur d'écarlate ; je n'avois pas encore vû l'excellent mémoire que ce célébre Écrivain a préſenté à l'Académie ſur ce ſujet, & comme il renferme des principes très-intéreſſants outre l'invention, non ſeulement de cette couleur, mais encore de pluſieurs autres tirées de même de la cochenille, je crois de faire un préſent aux Savants, & en même tems aux artiſtes, & aux gens du monde, en rapportant le précis de tout ce qui y eſt contenu d'eſſentiel pour réuſſir : j'en ferai donc deux parties, dans la première ſeront contenus les principes théoriques, dans la ſeconde nous donnerons la pratique, ou les procédés.

X L I I.

L'expérience lui ayant fait connoître que les ſubſtances ſont dautant plus diſpoſées à ſe teindre en écarlate de cochenille, qu'elles participent davantage du caractère des matières animales, (ce qui eſt général pour toutes les couleurs), il eſſaya d'augmenter le caractère animal de la Soie par des procédés analogues à ceux, dont on ſe ſert pour le coton, mais ſes tentatives furent infructueuſes, quelques ſoins qu' il ſe ſoit donné de varier les doſes de la compoſition, & de ſubſtituer la diſſolution des autres métaux, & demis métaux blancs à celle de l'étain : ce qui lui fît ſentir que la réuſſite dépendoit de quelques circonſtances qu'on ne pouvoit découvrir qu'en examinant avec le plus grand ſoin tout ce qui ſe paſſe dans la teinture en écarlate : il reconnut donc qu' *il en eſt de la diſ-*

ſolution d'étain dans l'eau régale comme de beaucoup d'autres diſſolutions de matières métalliques, qui ſe décompoſent quand on les mêle avec une grande quantité d'eau, en ſorte que le métal ſe précipite uni ſeulement avec trop peu d'acide, pour pouvoir démeurer diſſous dans la liqueur. Que dans la teinture en écarlate il n'y a réellement que la chaux d'étain qui ſoit teinte, car par des additions réitérées de diſſolution d'étain dans l'eau régale, faite dans une décoction de cochenille il réuſſit à en précipiter toute la partie colorante avec la terre de l'étain, de manière que la liqueur, qui ſurnageoit le précipité rouge, était auſſi claire que de l'eau pure; d'où il ſuit *que la laine, & les autres ſubſtances qui ſont ſuſceptibles de prendre cette couleur ne la reçoivent que ſecondairement, c'eſt-à-dire, qu'autant qu'elles ſont capables de ſaiſir, & de retenir fortement la chaux d'étain, déjà teinte elle même en cette couleur.*

XLIII.

Ces vérités bien conſtatées lui firent découvrir le moyen de faire prendre à la Soie la couleur en queſtion, en procurant le précipité d'étain ſur la Soie même, & non dans le bain de cochenille; ce principe que notre Auteur a découvert à l'occaſion qu'il ſe propoſa de faire prendre le bleu de Pruſſe aux étoffes, & dont le ſuccès répondit avec autant d'élégance, lui fournit ici une réſolution auſſi complette: car après avoir trempé la Soie dans la compoſition, & s'être aſſuré qu'elle en étoit intimément pénetrée, & uniformément mouillée dans toutes ſes parties, après quelques précautions qu'on trouvera dans le procédé même (*d*), il la teignit dans un bain de co-

(*d*) J'ai fait une compoſition ou diſſolution d'étain avec huit onces d'étain de Mélac grenaillé que j'ai fait diſſoudre peu à peu, & fort lentement dans une livre d'eau régale, compoſée d'une partie d'eſprit de ſel, & de deux parties d'eſprit de nitre: cette diſſolution étoit claire,

chenille, dont elle tira fortement toute la couleur avec autant de ſolidité que l'écarlate ſur laine.

X L I V.

Tout conſiſte donc à faire incorporer dans la Soie la terre de l'étain, de la délivrer enſuite par le lavage de la quantité ſurabondante de cette terre, qui ne ſeroit d'ailleurs que peu ou point adhérante, ce qui étant fait l'opération ne ſauroit manquer, en paſſant la Soie dans le bain de cochenille, en vertu de la propriété que M. Macquer a découvert dans la terre d'étain d'abſorber, ou d'attirer la fécule colorante, & de la retenir avec force en en exaltant beaucoup la couleur par la portion d'acide quelle retient avec elle.

De

& limpide, & il eſt néceſſaire qu'elle ait cette limpidité pour la réuſſite de l'opération: je l'ai affoiblie avec deux parties d'eau pure, quantité qui n'eſt pas ſuffiſante pour faire précipiter l'étain d'une pareille diſſolution, quand elle a été bien faite, c'eſt-à-dire, avec la lenteur convenable, j'ai trempé dans cette liqueur la Soie que je deſtinois à être teinte: en un inſtant elle en a été pénétrée intimément, & je l'ai retirée après avoir reconnu qu'elle étoit mouillée exactement, & uniformément dans toute ſes parties; l'ayant enſuite exprimée fortement, je l'ai lavée à pluſieurs repriſes dans une grande quantité d'eau pure, après quoi je l'ai fait teindre dans un bain de cochenille pure, & qui n'étoit avivé que par un ſeizième du poids de la cochenille de crême de tartre: la Soie a tiré fortement toute la couleur de ce bain, & s'eſt teinte en un rouge plein, vif, & d'un fort bel œil: cette couleur a ſoutenu tous les lavages ordinaires ſans ſe ternir, ni ſe de charger, & a réſiſté aux mêmes épreuves, & déboüillis que l'écarlate ſur laine: j'ai donc été aſſuré dès lors que la méthode que j'avois employée étoit propre à faire prendre à la Soie le rouge de cochenille exalté par la diſſolution d'étain; en effet ayant réiteré cette expérience nombre de fois, & même en grand elle a toujours eu le même ſuccès; j'ai conſtamment obtenus des rouges fort beaux, bien pleins, & bien ſolides, toutes les fois que je mettois la diſſolution d'étain ſur la Soie même, & point du tout dans le bain de la cochenille.

Pour

De quelques ſubſtances dont on peut tirer de l' huile.

X L V.

Nous venons de voir paroître dans un petite ouvrage une méthode pour ſe procurer de l' huile avec une matière, dont on ne fait aſſez généralement aucun cas, ſavoir les pepins de raiſin, nous ſerions diſpenſé de rendre compte de cet ouvrage ſi l'eſprit des Sociétés littérataires n'étoit pas dirigé par le juſte empreſſement de faire du bien à l'homme de quelque nation qu' il puiſſe être, & en recompenſe je rendrai compte de ce qui a été propoſé par M. De-Francheville dans un Mémoire ſur une huile du régne végétal propre à remplacer l' huile d'olive dans tous les Pays trop froids pour l'olivier.

Pour réuſſir à bien faire cette diſſolution, il ne faut mettre d'abord qu'environ la douzième partie de l' étain, & la laiſſer diſſoudre preſqu'en entier; enſuite continuer à ajouter le reſte de l'étain par petites parties, en prenant garde que la liqueur ne s'échauffe trop; il ne faut pas qu'elle s'échauffe à plus de 45 ou 50 dégrés. Lorſqu'il ne reſte plus guère d' étain à diſſoudre, il faut laiſſer refroidir la diſſolution totalement, & y ajouter après cela ce reſte d'étain tout-à la fois la diſſolution achevera de ſe ſaturer en corrodant peu à peu cet étain ſans preſque s'échauffer, & prendra une couleur ambrée aſſez foncée. Si les acides dont on s'eſt ſervi ne ſont pas bien forts il pourra reſter de l'étain non diſſous, mais cela eſt indifférent: le plus ſur pour obtenir une belle couleur eſt d'employer cette diſſolution pure, & ſans l'affoiblir par de l'eau, comme je ne l'ai fait que parceque mes acides étoient très-concentrées, il n'eſt point à craindre que cette diſſolution, quoique pure endommage la Soye, parceque quand elle eſt bien faite, les acides ſont ſuffiſamment émouſſés, & ſaturés par l' étain. Enfin une circonſtance encore eſſentielle à la réuſſite des nouvelles couleurs, c'eſt que la Soie après avoir été impregnée du mordant, n'en ſoit point trop dépouillée par un fort lage avec batture; il faut qu'il reſte dans la Soie un peu du mordant, même ſurabondant, qui ſe répandant enſuite dans le bain de teinture lui fait prendre une nuance de rouge vif qui contribue infiniment à la beauté de la couleur.

X L V I.

L'Auteur de l'huile de pepins de raiſin nous apprend que plus le raiſin dont on les tire eſt de meilleure qualité plus il fourniſſent de l'huile, la première opération eſt celle de les ſéparer du marc par le lavage, & par le crible, & de les faire bien ſecher au ſoleil; on pratique cette opération, d'abord après qu'on a retiré le marc du preſſoir, pour qu'il n'arrive pas aux pepins de ſe gâter; on paſſe enſuite à la mouture, où il faut uſer de la précaution de bien placer les meules pour que les grains ſe diſtribuent plus facilement, & plus uniformément entre les deux meules; parceque les pepins ne ſe répandent pas auſſi aiſement que les graines de bled, ce qui fait auſſi qu'on ne doit y en mettre qu'un peu moins d'une mine de notre Pays, & après la première mouture on fait paſſer la farine par le crible pour remoudre ce qui reſte, il eſt enſuite queſtion de la faire cuire avec une ſixième de ſon poids d'eau dans un chaudron, & de la remuer avec une ſpatule ou ce qui vaut mieux encore avec la main, car du moment quelle n'y peut plus ſoutenir on la met dans une

Enfin M. Macquer obſerve que cette couleur retiendroit toujours un ton plus *rosé*, & qu'il faut uſer du même expédient que l'on emploi pour le carthame, & quelque fois même pour aviver la couleur de cochenille ſur la laine. On commence par donner à la Soie une teinte de jaune tirant ſur l'orange au moyen du rocou, & la traitant enſuite comme lon a dit ci devant.

Les couleurs de feu, & de cériſes demandent trois, & même quatre onces de cochenille par chaque livre de Soie.

Une remarque très intéreſſante de l'Auteur, enfin, nous inſtruit de l'avantage que l'on peut retirer de la diſſolution d'étain appliquée ſur cette matière de la manière indiquée: car elle la rend capable de tirer avec avantage preſque toutes les couleurs extractives, c'eſt à dire, toutes celles dont l'eau ſe charge facilement ſans le ſecours d'aucun ſels, & auxquelles la compoſition ſert de mordant à la place de l'alun, principalement pour les couleurs rouges, ou qui tirent ſur le rouge, ainſi que celles que donnent le bois d'inde, & de breſil.

grosse toile sous le pressoir pour en retirer l'huile comme l'on fait pour celle de lin, & d'amandes: après la première extraction on réduit de nouveau en farine ce gâteau pour la remettre une seconde fois de la même manière sous le pressoir : il est bon d'observer qu'il ne faut pas mettre une trop grande quantité de farine à la fois, car on en retire davantage d'huile d'une moindre quantité que d'une trop grande; d'ailleurs cette quantité doit être encore déterminée par la capacité du pressoir même.

X L V I I.

En voila assez pour ce qui regarde l'huile qu'on peut se procurer des pepins de raisins: nous allons exposer maintenant la méthode de M. Francheville pour en retirer d'une plante assez commune dans nos montagnes; c'est le *hêtre fayard* ou *fau* ainsi que nous l'appellons aussi, & en latin *fagus* que cet ingénieux Auteur propose pour remplacer l'olivier: le fruit qui doit fournir l'huile se nomme en français *faine*, & en latin *bacca*, ou *glans fagina. L'huile de faine fraiche ou bien conservée, & faite avec le soin nécessaire approche assez de l'huile d'olive pour tromper des connoisseurs qui n'en seroient pas prevenus*; ce sont là les paroles de l'auteur, & comme par un préjugé populaire quelques uns attribuent à l'usage intérieur de cette huile la funeste propriété de faire tomber en demence, il se fait un devoir de nous rassurer par l'exemple de plusieurs provinces de la France où l'on ne fait usage d'aucune autre huile; telles sont la Bourgogne, la Champagne, la Picardie, & plusieurs autres.

X L V I I I.

La première attention doit se porter sur le choix de la *faine*, en en séparant exactement la vieille, dont l'écorce

eſt noirâtre, de la nouvelle qui eſt plus blonde, & plus luiſante; ce triage peut-être exécuté par des enfans, il faut enſuite dépouiller la *faine* de ſon écorce, parcequ'on ne riſque pas alors de laiſſer des amandes moiſies, & parceque l'écorce en s'abreuvant d'une partie de l' huile en enleveroit conſidérablement, & elle ne peut plus au reſte lui communiquer ſon gout, ni les impuretés qu'elle a contractées en tombant ſur la terre, c'eſt enfin encore là un ouvrage d'enfant, on jette enſuite la *faine* ainſi depouillée dans l'eau tiède pour la délivrer d'une pelieule ou membrane qui l'enveloppe, & qui lui donneroit un gout ſtiptique ou acre.

XLIX.

On doit laiſſer repoſer la *faine* dans ſa coque deux ou trois mois après la recolte, parcequ'elle rend alors beaucoup plus d'huile, & pour empêcher qu'elle ne ſe gâte on doit la loger dans un lieu qui ne ſoit ni froid, ni humide; l' étendre ſur le plancher, & la remuer ſouvent.

L.

Je ne ſaurois mieux faire que de rapporter en entier le paſſage de l'Auteur pour ce qui concerne la manière d'en tirer l' huile, & des uſages auxquels on peut employer ſon marc.

LI.

„ Enfin après toutes ces précautions on peut eſpérer qu'on „ fera une huile de *faine* de très-bonne qualité, mais il reſte „ à ſavoir quelle eſt la meilleure manière de la faire. On „ doit avant tout s'être muni d'un preſſoir aſſis dans un „ endroit un peu chaud (car cet ouvrage ſe doit faire en „ hiver, & à l'abri de la fumée, ainſi que de toute mau-

„ vaiſe odeur :) il faut que ce preſſoir ait une forte vis,
„ & que ſes tables de deſſus & deſſous (celle-ci plus
„ longue plus large, & à rebords) ſoient de bois de
„ noyer ou tout au moins de cœur de chêne ſans aubier,
„ épaiſſes de 3 à 4 pouces bien ſeches, & bien polies,
„ on doit être auſſi à portée d'un moulin ſoit à meules,
„ ſoit à pilons, pour y faire concaſſer ou piler la *faine*:
„ cela fait, on prend une quantité de cette *faine* propor-
„ tionnée à la longueur, & largeur des tables, on la
„ met dans un ſac de groſſe toile de chanvre un peu
„ claire, mais forte, & ayant couché ce ſac bien fermé
„ entre les deux tables, on le preſſe d'abord doucement
„ de peur de crever le ſac, & on reçoit l'huile qui en
„ découle par une ouverture pratiquée au milieu du rebord
„ de chacun des quatre côtés de la table de deſſous,
„ dans autant de jates de fayance, qui ſont placées un
„ peu plus bas, cette première huile eſt la plus fine, &
„ il ne faut pas la mêler avec la ſeconde, ni celle-ci
„ avec la troiſième, la ſeconde ſe tire par une expreſ-
„ ſion un peu plus forte que la première, mais moindre
„ que la troiſième, par laquelle on tire de la *faine*, tout
„ ce qui peut y reſter d'huile; & il faut avoir ſoin après
„ chaque expreſſion de remuer le ſac, & de la retour-
„ ner dans un ſens contraire à celui d'auparavant, ces
„ trois preſſurages étant faits, on vuide le ſac, on le rem-
„ plit de nouveau pour le preſſer de même, & on con-
„ tinue ainſi juſqu'à la fin.

L I I.

Il s'agit à préſent des uſages qu'on peut faire du marc de la *faine*, ce marc trois fois preſſuré en eſt devenu (choſe admirable) encore plus alimentaire que n'étoit la *faine* dans ſon premier état. Car ſoit frais ou humide

comme il eſt au ſortir du ſac, ſoit mis en tourteaux, & ſéché pour le conſerver, il peut-être donné aux volailles, aux cochons, même aux bœufs, & aux vaches, & il eſt pour ces animaux une nourriture ſaine, & agréable qui les engraiſſe merveilleuſement, ſans rendre leur chair, & leur graiſſe molaſſe, comme doit faire la *faine*, lorſqu'elle contient encore ſon huile. Ce n'eſt pas le tout ni même le meilleur : car ce marc étendu ſur des nappes à l'air pour en faire évaporer l' humidité, & enſuite porté au moulin pour achever de le moudre & blutter, devient une farine propre à faire du pain, comme la caſſave de l'Amérique dont on a épuiſé le ſuc venimeux. On peut faire, ſi l'on veut, un mélange de cette farine avec celle du bled, elle n'y gâtera rien, mais ce mélange n'eſt pas néceſſaire, le pain de pure farine de *faine* étant d'un bon gout, d'une belle couleur, & nullement malfaiſant. De quel prix ne doit pas être cette reſſource dans des tems de famine? voila peut-être quel fut le pain, dont vecurent les premiers hommes.

L I I I.

Mais comme l' homme ne vit pas de pain ſeulement, ce même marc de *faine* lui fournit quelque choſe encore de plus recherché, c'eſt qu'au ſortir du preſſoir étant humecté de lait mis dans des formes, & aſſaiſonné de ſel, il devient une eſpéce de fromage auſſi bon que celui qui ſe fait en Bourgogne, & en Franche Comté, avec le marc de noix dont on à exprimé l' huile, & qu'on y mange par regal, enfin la farine du même marc de *faine* ſi l'on y joint du lait, & des œufs, donne des gâteaux que les premiers hommes ne mangeoient apparemment qu' aux bonnes fêtes ; & d'ailleurs elle peut ſervir auſſi à faire de l'amidon, & de la poudre à cheveux qu' ils ne con-

noiſſoient pas vraiſemblablement. Mais ſi l'on peut tirer un ſi grand parti d'un fruit ſauvage tel qu'eſt aujourd'hui la faine des bois: quelle ſupériorité n'auroit pas la farine de ſa pulpe , & ſon huile même ; s'il étoit poſſible de rendre les hêtres des foreſt auſſi franc que le ſont les oliviers de Provence, & les arbres fruitiers de nos jardins? C'eſt-à-dire, qu' il faudroit trouver un hêtre déjà franc pour pouvoir affranchir les hêtres ſauvages en les greffant ou l'entant ſur eux; c'eſt à dire, qu' il faudrait trouver le ſecret de rendre franc un hêtre ſauvage ſans en changer l'eſpéce, ce ſecret ſeroit véritablement, le grand œuvre des arboriſtes, & des botaniſtes, car enfin s'il n'exiſte point d'hêtres francs dans la nature, comment pourroit on affranchir un hêtre ſauvage, ſans le marier avec un arbre franc d'un autre eſpéce, qui doit néceſſairement changer la ſienne, & le denaturer.

Des matières propres à remplacer le chêne, & le bouleau dans l'art de la Tannerie.

L I V.

Il m'a paru de reconnoître des avantages ſi eſſentiels dans un Mémoire de Monſieur Gleditſch ſur l'art de la Tannerie par rapport à l'épargne qu'on peut faire des chênes, & des bouleaux, & par les facilités qui en reviendroient à cet art même de l'uſage des plantes que cet Auteur propoſe pour faire le Tan que j' ai cru de mon devoir d'en rendre compte. Monſieur de Lalande n'a pas cru pouvoir s'en diſpenſer par les mêmes motifs qui ont porté auſſi Monſieur Gleditſch à donner la main aux idées de Monſieur Klein, & qui m'y engagent maintenant.

L V.

On a dit ſouvent qu'il étoit à craindre de voir, enfin, manquer les bois en Europe, dit Monſieur de Lalande, à cauſe de l'étonnante deſtruction qu'on ne ceſſe d'en faire pour les bâtimens, pour le chaufage, & pour les arts. Il y a déjà des endroits ou il eſt ſi cher, qu'on ne le brûle que par poids, & par meſure; ou n'oſant l'employer à faire des tonneaux, & des caiſſes, on préfére d'envelopper les marchandiſes dans des peaux, dans des joncs; où l'on n'oſeroit enfin tenter l'établiſſement des manufactures les plus utiles à l'état, parceque le feu, cet agent univerſel, & indiſpenſable, de preſque tous les arts, éxige une trop grande abondance de bois. Il pourroit venir un tems, ou des nations même policées retomberoient dans l'ancien état de pauvrété & d' ignorance par la diſette du bois qui entraine la perte des arts utiles. *Juſque-là M. de Lalande.* Ces vérités de fait ſont bien-tôt de tous les pays, toutes les reflexions à part, on ne pourroit donc trouver mauvais qu'en y portant quelque attention, je me ſois déterminé à groſſir ce mémoire des travaux d'autrui. On peut bien renoncer à l'ambition d'être un Auteur ſtérile pour ſentir la douce ſatisfaction d'avoir tranſcrit avec utilité, & pour le bien de ſa Patrie.

Plantes.

Plantes, dont les feuilles, les branches, les fruits, les ſemences, & quelque fois les racines peuvent s'employer dans la Tannerie.

Les branches de vigne . .	*I rami della vite.*
Prunus ſilveſtris. C. B. Pin. 444 Prunier ſauvage, épineux on prendra l'écorce, & le fruit avant qu' il ſoit mur . .	*Pruno ſelvatico.*
Salix vulgaris alba, le ſaule; on employe les branches, & les feuilles. *Salix caprea rotundifolia Tabernae*, ſaule aquatique: on employe l'écorce les feuilles, & les branches.	*Salcio, o Salce.*
Sorbus aucuparia. J. B. I. 62 Sorbier: on prendra les branches, les feuilles & les fruits avant qu'ils ſoient murs .	*Sorbo.*
Les feuilles de roſier . .	*Foglie di Roſajo.*
Fagus Dod. Pempt. 832 hêtre, fouteau; les feuilles, & l'écorce . .	*Faggio.*
Carpinus, Dod. Pempt. 841 charme; les branches, les feuilles, l'écorce .	*Carpine.*
Les feuilles de chêne . . .	*Foglie di quercia.*
Les feuilles d'aune	*Foglie d'alno.*
Meſpilus, le neſflier ſauvage; les feuilles, les branches, les fruits avant qu'ils ſoient murs	*Neſpolo ſalvatico.*
Cornus ſilveſtris mas, C. B. Pin. 447 Cornouiller ſauvage; les feuilles, les branches, & les ſemences qui reſſemblent à des oſſelets; mais elles auroient beſoin d'être pilées . . .	*Corniolo. Cornio.*

Acetosa pratensis, C. B. Pin. 114 l'oseille: sa racine, & la semence peuvent s'employer . . . . . . *Acetosella. Acetosa.*

Lapathum maximum aquaticum Chabraei historiae 309. Grande patience aquatique; les feuilles, la racine, les semences.
Lapathum folio acuto plano, C. B. Pin. 115, Patience; la racine, les feuilles, les semences. . . . . } *Lapazio, Rombice.*

Iris palustris lutea, seu acorus adulterinus, C. B. Pin. 34, flambe aquatique, la racine . . . . . . *Coltellino ghiaggiuolo.*

Nymphea lutea, nenuphar, & nymphea alba, nénuphar ou lys des étangs, C. B. Pin. 193; la racine seulement . . *Ninfea.*

Les écorces de châtaigner, de peuplier, de noisettier pourroient également s'employer . . . . . . *La Corteccia di Castagno, di Pioppo, di Nocciuolo.*

Plantes dont les fleurs seulement, ou les feuilles avec les fleurs peuvent être utiles dans la Tannerie.

Salicaria vulgaris purpurea foliis oblongis Tournefortii. Institutionum 253; *Lysimachia spicata purpurea forte Plinio, Caspari Bauhini in Pinace, pag.* 246 salicaire . . . . . *Lisimacchia salcio.*

Ulmaria, *Clusii historiae* 198, *Joannis Bauhini* III., 488, Reine des près	*Ulmaria.*
Filix ramosa major pinnulis obtusis non dentatis. C. B. Pin. fougére femelle. *Filix non ramosa dentata.* C. B. Pin. 358, fougére mâle . . . *Filix palustris maxima.* C. B. *prodromi* 150, grande fougére aquatique osmunde. *Filix mas aculeata* major, & minor C. B. Prodr. 151 . . .	*Felce.*
Persicaria salicis folio potamogeton angustifolium dicta Raii hist. 184, *persicaria acida Jungermanni.* Persicaire d'eau; elle vient dans l'eau & hors, de l'eau, mais sous des formes un peu différentes.	*Persicaria.*
Bistorta major radice intorta. C. B. Pin. 192, Bistorte	*Bistorta.*
Tormentilla Silvestris, C. B. Pin. 326, Tormentille	*Tormentilla.*
Pimpinella sangui sorba major. C. B. Pin. 160, grande Pimprenelle sauvage des prés	*Pimpinella salvastrella.*
Cariophillata vulgaris, C. B. Pin. 321, Benoite	*Erba benedetta.*
Cariophillata aquatica nutante flore. C. B. Pin. 321, Bénoite aquatique . .	*Benedetta aquatica.*
Argentina Dodonaei Pempt. 600, *Potentilla Joannis Bauhini* II, 398 & C. B. 321, *anserina officinarum*, argentine.	*Bodentilla.*

Quinquefolium paluſtre rubrum, C.B.Pin. 326 *comarum linnaei*, quintefeuille aquatique rouge. . . . . *Quinquefolium majus repens* C. B. Pin. 325, quintefeuille des boutiques . *Quinquefolium minus repens luteum*, C. B. Pin. 325, petite quintefeuille ſauvage. . . . . . . *Quinquefolium folio argenteo*, C. B. Pin. 325, quintefeuille blanche. .	*Pentafilo.*
Horminum pratenſe foliis ſerratis, C. B. 238, *Sclarea tabernae montani*, Orvale .	*Schiarea.*
Agrimonia, aigremoine . .	*Agrimonia.*
Equiſetum arvenſe longioribus ſetis, C. B. Pin. 16, Presle ou Queue de Cheval	*Raſperella.*
Equiſetum paluſtre longioribus ſetis, C. B. Pin. 15, queue de cheval aquatique .	*Raſperella aquatica.*
Alchimilla vulgaris, C. B. Pin. 319, pied de lion	*Alchimilla. Stellaria. Piede di lione.*
Muſcus pulmonarius, ſive pulmonaria officinarum Lobellii iconum, p. 248, *muſcus quernus*, pulmonaire de chêne . .	*Polmonaria. Moſcolo.*
Lyſimachia lutea major, quae dioſcoridis, C. B. Pin. 245, lyſimachie . .	*Liſimachia.*
Vacinium Rivini Vitis idea foliis oblongis crenatis fructu nigricante, C. B. Pin. 470, airelle ou myrtille . . .	*Mortella.*

Vacinium foliis buxi, *ſemper virens baccis rubris*, Rupp. florae Gen. p. 52, airelle toujours verte . . . . . . *Mortella ſempre verde.*

Rubus vulgaris ſeu fructu nigro, C. B. Pin. 479, la grande ronce . . *Rovo.*

Fragaria vulgaris, le fraiſier . *Fragaria fragola.*

Filipendula, J. B. II. 189, la Filipenpendule . . . . . . *Filipendula.*

Pervinca tragi, & *Tournefortii*, *Clematis daphnoides*, C. B. la Pervanche. *Pervinca.*

Sparganium, C. B. Pin. 115, Ruban d'eau . . . . . . *Faſciola.*

Filago, *ſeu impia*, *Dodonaei*, Pempt. 66, herbe à côton . . . . *Filagolo.*

Gnaphalium montanum flore rotundiore, & *longiore tournefortii inſtitutionum* 453, pied de chat . . . . *Gnafalio.*

Geranium ſanguineum maximo flore, C. B. Pin. 319, bec de grue à grande fleur. *Geranio a gran fiore.*

Geranium batrachioides maximum minus laciniatum folio aconiti, J. B. III., 477, *gratia Dei Germanorum*, bec de grue de montagne . . . . . . *Geranio.*

Plantago, le plantain : toutes les eſpéces en ſont bonnes . . . . *Piantagine.*

Hipericum officinarum &c. C. B. Pin. 279, le Millepertuis . . . *Iperico.*

Page 185 ligne 17 *changés la citation* page 478 tom. 2 article *ſel neutre arsénical.*

SOLUTION GÉNÉRALE

ET ANALITIQUE DE CE PROBLÊME,

Une équation différentielle aux différences infiniment petites, & qui admet une ſolution générale étant donnée trouver l' intégrale

PAR LE MARQUIS DE CONDORCET.

Une application fort ſimple des principes répandus dans mon ouvrage ſur le calcul intégral ſuffit pour réſoudre cet important problême, & l' on trouve dans l' éclairciſſement que j' ai donné à la ſuite de l' ouvrage intitulé du problême des trois corps, & dans la préface que je joins à la collection de mes Eſſais tout le détail de la méthode qu' il faut ſuivre pour cela, auſſi eſt-il moins queſtion ici de donner une nouvelle ſolution de ce problême que de rendre par des nouvelles remarques celle que j'ai trouvée aſſez ſimple & aſſez commode pour être employée dans la pratique. Les hommes dédaignent, & peut-être avec raiſon tout ce qui n' a pas une apparence du moins éloignée d' utilité, & l' analiſe eſt elle-même tellement ſoumiſe à cette loi, que les ſpéculations les plus élévées y ſont comptées preſque pour rien dès-lors qu'on ne leur trouve aucune utilité réelle ou convenuë; par exemple, il ſuffit ici pour réſoudre le problême propoſé d'avoir une méthode à l' aide de laquelle on parvienne ſurément à avoir l' intégrale de toute équation différentielle propoſée, mais pour être utile, il faut qu'elle ſoit telle que pour une équation particulière on aime mieux ſuivre la méthode générale que de chercher à s' en faire une nouvelle uni-

quement pour les équations de la claſſe de la propoſée. Or pour remplir ce but, il faut que la marche de la méthode ſoit ſimple, & ne demande que des opérations de l'analiſe ordinaire aſſujetties de plus à une ſorte de forme technique, en ſorte que pour la réſoudre on n'ait preſque aucun béſoin de ſes propres réflexions.

Lemme premier.

On peut regarder comme réſoluë une équation, lors qu'on ſait que l' inconnuë y eſt égale à une fonction d'une forme déterminée, d'un nombre de termes indéfini, mais fini, & dont les coéficiens peuvent être ſuſceptibles à la fois de pluſieurs déterminations, mais toujours en nombre fini. En effet ſubſtituant cette forme dans l' équation qui ſe trouve alors être identique, on n'a plus que des équations entre les coéficiens dont le nombre eſt indéfini ainſi que celui des équations, mais dont les premières ne contiennent qu' un nombre déterminé de coéficiens; & les autres toujours en augmentant d' un nombre déterminé, tellement qu'on n'a jamais à réſoudre que des équations finies & déterminées, ce qui n' a aucune difficulté, or par ce moyen on parviendra toujours à trouver où ſe termine la ſuite indéfinie qui repréſente l' inconnuë (puiſque c'eſt une ſuite de l' hipothéſe) de même qu' à avoir la valeur de tous les coéficiens, donc &c.

Lemme ſecond.

Si la forme donnée de la valeur d' une inconnuë donnée par une équation quelconque eſt trop compliquée, & que je la ſuppoſe transformée en une ſuite infinie, il eſt clair que la ſubſtituant dans la propoſée & déterminant les coéficiens, j' aurai un terme général de la même

forme que celui qui donne la réduction de la forme donnée ensuite infinie, & duquel je tirerai immédiatement la valeur des coéficiens dans la forme donnée, & le point où elle s'arrête. Cela suit nécessairement de ce que l'expression infinie d'une fonction finie lui est absolument identique.

Lemme troisième.

La forme d'une fonction d'un nombre quelconque de variables étant une fonction algébrique rationelle & entière divisée par une fonction semblable, trouver la forme de la suite infinie qui lui est identique.

Sol. Il est clair que cette suite multipliée par le dénominateur est égale au numérateur : ainsi le coéficient de chaque terme dans le produit est égal au coéficient du même terme dans le numérateur ou bien à zéro, lorsqu'il est trop élevé pour s'y trouver, donc dans ce cas on a égale à zéro la somme du produit de chaque coéficient du dénominateur par un coéficient de la suite; le terme constant du dénominateur est multiplié par le terme de la suite dont on fait le coéficient égal à zéro dans le produit, & les autres coéficiens le sont par ceux des termes inférieurs tels que la somme des exposans de chaque variable prise dans les deux produisans soit égale aux exposans des mêmes variables dans le terme dont il s'agit, donc on aura, quelque soit le nombre des variables, la valeur d'un terme quelconque par une équation linéaire d'un nombre de termes fini déterminé, & égal à celui des termes du dénominateur, donc si on substituë une suite infinie à la place d'une inconnuë dont la forme soit celle de ce Lemme, on aura au bout d'un certain nombre de termes une équation semblable, de laquelle on tirera aisément la valeur du dénominateur, & celle du numérateur se déduira des premiers termes.

Lemme quatrième.

Soit Z une fonction de x, y, z, &c.; dx, dy, dz, &c.; ddx, ddy, ddz, &c.; &c. &c. qu'elle soit une différentielle exacte d' une fonction d'un ordre moins élévé, d' une unité, & que B soit cette intégrale inconnuë, il est clair que différentiant d'une manière indépendante des différences qui se trouvent dans Z & dans B, j' ai $\delta dB = \delta Z$, & $\int \delta Z = \delta B$. Le signe d' intégration $\int$ se rapportant à la caractéristique d. Il suit delà 1.°, que cherchant à intégrer δZ par partie en regardant les δx, δy, δz, &c. comme des variables ordinaires, on aura nécessairement égale à zéro l'expression qui reste sous le signe $\int$ sans pouvoir être réduite : 2.°, que l' expression qui sera hors du signe sera identiquement la même que δB, mais la première expression doit être nulle, quelques soient les δx, δy, δz, &c., & sans donner aucune équation entre les variables; donc on aura dans ce cas pour que Z soit vraiment égale à dB les équations (B) de condition que M. de la Grange dans son Essai d' une nouvelle méthode de déterminer les *maxima* ou *minima* des formules intégrales indéfinies, problême premier page 176 du second volume des Mémoires de la Société Roïale de Turin déduit de l' équation de la page 175, & il faudra que ces équations soient telles que tous les termes s' en détruisent mutuellement, quant à la seconde expression, on aura la fonction (C) de la même page égale à δB, donc intégrant cette fonction par rapport à la caractéristique δ, & regardant les autres différences comme de nouvelles variables, on aura B, donc si j' ai Z différentielle exacte, & que j' en cherche l' intégrale, je n'aurai qu' à chercher celle de la fonction C, qui considérée par rapport à la caractéristique δ est comme une fonction du premier ordre, différentielle exacte d'une fonction finie.

J'observerai ſur ce Lemme : 1°, que ſi j'ai dx conſtant j'aurai une équation de condition de moins, & c'eſt l'équation qui nait du coéficient de δx égalé à zero dans la fonction (B) de la page 175 : 2°, que dans ce même cas pour avoir le coéficient de δx dans la fonction (C), il faut remarquer que j'ai, appellant ce coéficient A, & le reſte de la fonction (C) qui ſe trouve à l'ordinaire A', $A \delta x + A' = \delta B$; . . . . & en faiſant δ ſemblablable à d, $Adx + A' = dB = Z$ dans cette hipothèſe, donc $A = \frac{Z - A'}{dx}$: 3°, la plus haute différence de x, y, z &c. ne ſe peut trouver dans Z que ſous une forme linéaire, parcequ'autrement elle entreroit dans le dernier terme de l'équation de condition de même que dans les autres, or ce terme étant dans cette équation affecté d'un ſigne de différentiation d'un ordre plus élévé que les autres, donneroit alors des différences auſſi plus élévées que celles qui s'y peuvent trouver, donc rien ne les pourroit faire diſparoitre ; donc l'équation ne pourroit être identique.

J'ai préféré cette méthode à celle que j'ai donnée en détail, parcequ'elle me diſpenſe de répéter ici des formules qu'on trouve toutes conſtruites dans l'ouvrage de M. de La-Grange, & que ſans me répéter entiérement, je ne ſuppoſe ici rien qui ne ſe trouve dans les Mémoires de la Société Roïale.

Lemme cinquiéme.

Suppoſé que j'aye une fonction différentielle d'un ordre quelconque égale à zéro, que cette équation admette une ſolution compléte, & qu'aucune différence n'aye été ſuppoſée conſtante, je puis regarder à volonté une de ces différences comme conſtante, intégrer en conſéquence, &

j'aurai une même intégrale, que si j'avois intégré la proposée sans cette supposition : à cela-près que si l'intégration donne dans le cas de dx constant, des arbitraires de la forme $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ &c., il faut dans la supposition que tout est variable, mettre au lieu de x une autre variable x' qui ne se trouve pas dans l'équation.

Lemme sixième.

Soit l'équation $z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3} + ez^{m-4} + \ldots \ldots + p = 0$, je dis que toute fonction rationelle de z, peut être supposée de la forme $a'z^{m-1} + b'z^{m-2} + c'z^{m-3} + \ldots \ldots + p'$, les coéficiens étant rationels, en effet il est clair que par une simple substitution, elle est nécessairement $\frac{a''z^{m-1} + b''z^{m-2} \ldots + p''}{a'''z^{m-1} + b'''z^{m-3} \ldots + p'''}$. Je multiplie par une fonction indéterminée & entière du même ordre le numérateur, & le dénominateur de cette forme, & je fais la même substitution, j'ai par conséquent au dénominateur une fonction qui a un nombre m de coéficiens, & un nombre $m - 1$ d'inconnuës à cause des coéficiens de la fonction indéterminée, je suppose égaux zéro tous les coéficiens du dénominateur hors celui du terme sans z, & j'ai $m - 1$ équations, & $m - 1$ d'inconnuës qui ne montent qu'au premier dégré, donc je puis supposer le dénominateur sans z, donc &c.

PROBLÊME PREMIER.

Une équation différentielle étant donnée, trouver une fonction différentielle qui soit la différence exacte d'une fonction d'un ordre moins élévé, & dont l'intégrale égalée à zéro soit la solution générale de la proposée, & trouver aussi les solutions particulières qui ne sont pas renfermées dans la générale.

SOLUTION.

Premier ordre & premier dégré.

Soit 1° $A\,dx + B\,dy = 0$, l'équation proposée, A & B étant des fonctions rationelles & entières. Je prends $A'\,dx + B'\,dy$, &c. A' & B' étant rationels, & tels que $\frac{dA'}{dy} = \frac{dB'}{dx}$, & que $\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}$, ces deux équations étant identiques, j'ai de la dernière, l'équation $\frac{dA'}{dy} = B'd\frac{\frac{A}{B}}{dy} + \frac{A}{B} \cdot \frac{dB'}{dy}$. Substituant cette valeur dans la première elle devient $\frac{dB'}{dx} - \frac{A}{B} \times \frac{dB'}{dy} - B'd\frac{\frac{A}{B}}{dy} = 0$. Equation, d'où par les *Lemmes* 1, 2, 3 on pourra avoir la valeur de B' qui ainsi que A' est une fonction rationelle de x & y, on aura semblablement celle de A', & l'on connoitra la fonction $A'\,dx + B'\,dy$ qui est une différentielle exacte, dont l'intégrale égalée à zero est celle de la proposée.

Solutions particulières.

Si ce n'est que prenant $\frac{A\,dx + B\,dy}{A'\,dx + B'\,dy} = C$. C étant une fonction finie, la proposée a de plus la solution particulière $C = 0$.

Second dégré.

Soit 2°, $dx^2 + A\,dx\,dy + B\,dy^2 = 0$ A & B, étant des fonctions rationelles de x, y, je fais $\overline{A' + B'z}$

$dx + \overline{C' + D'z}\, dy = 0$, A', B', C', D' étant des fonctions rationelles de x, y, & ayant $\frac{d \cdot \overline{A' + B'z}}{dy} = \frac{d \cdot \overline{C' + D'z}}{dx}$, j'ai l'équation identique $\frac{\overline{C' + D'z}^2}{A' + B'z} - A \frac{\overline{C' + D'z}}{A' + B'z} + B = 0$, & l'équation encore identique $z^2 + Az + B =$, j'élimine z, & j'ai deux équations encore identiques, dont j'élimine à volonté une des quatre A', B', C', D', j'ai donc enfin une équation qui doit me donner la valeur des trois qui restent par les *Lemmes* 1, 2, 3 & celle de la quatriéme se trouvera par une équation linéaire qu'on aura trouvée en cherchant à l'éliminer.

Solutions particulières.

Si j'élimine z des équations $z^2 + Az + B = 0$, & $\overline{A' + B'z}\, dx + \overline{C' + D'z}\, dy = 0$, & que je divise par la fonction égale à zéro qui en résulte, la proposée multipliée par la fonction, par laquelle il a fallu la diviser pour rendre égal à l'unité le coéficient de dx^2, le quotient fini donnera les solutions particulières de la proposée.

Comme la proposée renferme deux équations différentes, la solution en renferme également deux, & chaque fonction A', B', C, D' a deux valeurs. Dans ce cas, si on a l'équation entière à résoudre, on prendra pour A', B', C', D' une valeur qui représente les deux qu'elles peuvent avoir, sans la déterminer à l'une ou à l'autre : mais si l'on n'a qu'une des équations à résoudre, on choisira celle des deux valeurs qui répond à cette équation.

Dégrés

Dégrés supérieurs.

Ce que je viens de dire pour le premier & le second dégré s'applique sans difficulté aux dégrés plus élévés, ainsi pour le troisiéme au lieu de $A' + B'z$, qu'on a pour le second, on prendra $A' + B'z + C'z^2$, & de même pour le dégré m, $A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 \ldots + P'z^{m-1}$, on prendroit également une fonction semblable au lieu de $C' + D'z$, & $z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + Cz^{m-3} \ldots + P = 0$ pour le dégré m, & $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$ pour le troisiéme dégré.

Second ordre & premier dégré.

Soit 3°, $ddy + A = 0$, dx étant constant; & A étant une fonction de x, y, dy, dx, je suppose que j' aie la fonction $Addy + B = 0$, ensorte que l' appellant Z j' aie, *Mémoires de la Société Roïale* Tome second pag. 174-175-176, $N - dP + d^2Q = 0$, & l'équation identique $\frac{B'}{A'} = A$, j' aurai en éliminant B', A' donné par une équation qui ne contiendra que A' ses différences, & des connuës de laquelle, *Lemmes* 1, 2, 3, je tirerai A' qui est une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$ multipliée par dx^p. A' doit avoir deux valeurs, parcequ'il y a deux fonctions du premier ordre dont la proposée est la différentielle exacte, divisée par une fonction du premier ordre.

Second dégré.

Soit 4° $ddy^2 + Addy + B = 0$, je prends la fonction $A' + B'z \cdot ddy + C' + D'z = 0$, & les équations identiques $N - DP + d^2 \cdot Q = 0$ $z^2 + Az + B = 0$, &

$\frac{\overline{C' + D'z^2}}{A' + B'z} - A\,\frac{C' + D'z}{A' + B'z} + B = 0$, & en éliminant j' ai une équation qui contient trois des fonctions A', B', C', D', & de laquelle j' en déduis la valeur par les *Lemmes* 1, 2, 3; chacune de ces fonctions a quatre valeurs, deux à cause du dégré de l' équation, & deux à cause qu'elle est du second ordre, ce qui donne lieu à la même reflexion que ci-dessus. Si je voulois savoir avant l' intégration quelles sont les deux valeurs qui appartiennent à la même racine de l'équation $ddy^2 + A\,ddy + B = 0$, je verrois qu'elles sont les deux qui donnent, quelque soit z, chacune la même équation $ddy + A'' + B''z = 0$.

Dégrés supérieurs.

Ce que je viens de dire s'applique sans difficulté aux dégrés plus élévés.

Solutions particulières.

On aura pour le premier dégré les solutions particulières en prenant $\frac{ddy + A}{A'\,ddy + B'} = C$, & C multiplié par la fonction, par laquelle il a fallu diviser l' équation pour donner à ddy l'unité pour coéficient, étant égalé à zéro donnera ces solutions, on les auroit pour les autres dégrés par le moyen que j' ai expliqué ci-dessus pour les équations du second dégré & du premier ordre, & comme A' & B' ont deux valeurs indépendantes des valeurs diverses de z, C aura aura aussi deux valeurs.

Ordres supérieurs.

On suivra pour les ordres supérieurs la même méthode avec un égal succès, & l' on aura pour le troisiéme

ordre $dddy$ n' étant qu'un premier dégré, 3 fonctions différentielles, 4 pour le 4e, & n pour le n^e, & si le dégré de la plus haute différence est m on en aura mn, ces fonctions étant une fois données, il n' y aura plus de difficulté pour trouver les solutions particulières qui ne se trouvent pas contenuës dans la solution générale. Elles se trouvent pour l' ordre n, pouvoir être de l'ordre $n - 1$, & à cause que la fonction pour le même ordre a un nombre n de valeurs, il y aura aussi un nombre n de ces solutions.

PROBLÊME SECOND.

Préparer une fonction d'un ordre supérieur au premier, & qui soit une différentielle exacte de manière qu'elle puisse être prise pour une fonction du premier ordre, différence exacte d'une fonction finie d'un plus grand nombre de variables.

Sol. Soit la fonction d' un ordre quelconque, & soit fait $dy = pdx$, $d^2y = dpdx = qdx^2$, $d^3y = d^2pdx = dqdx^2 = rdx^3$ . . . ainsi de suite, que la fonction différentielle exacte d' une fonction de l' ordre immédiatement inférieur soit supposée de la forme $Adx + Bdy + Cdp + Ddq + Edr$ *&c.*, & qu'elle soit sous cette dernière forme la différence d' une fonction finie de x, y, p, q, r *&c.*, on aura par le *Lemme ci-dessus*, & le *Problême premier de la méthode* de M. de La-Grange Tome second *des Mémoires de la Société Roïale* page 175 les valeurs de B, C, D, E *&c.*, & par le même *Lemme quatriéme* appellant Z la fonction que l' on aura mise sous une forme finie au moyen des substitutions ci-dessus, & de la division par la constante dx, on aura $A = Z - Bp - Cq - Dr - Es$ *&c.*, & encore par le *Lemme quatriéme* A, B, C, D, E *&c.* ne contiendront pas la dernière des p, q, r *&c.* parceque les termes qui les contiendroient se détruisent mutuellement

dans ces fonctions d'après l'hipothèse actuelle que la fonction soit une différentielle exacte. Dans le cas où la fonction Z contiendra les z du *Problême premier*, A, B, C, D, E *&c.* contiendront des différences partielles de z, mais on a une équation identique du dégré m en z qui donnera ces différences par des fonctions rationelles de z des variables & de leurs différences, ensorte qu'on connoitra toujours A, B, C, D, E *&c.*, & qu'ils seront de la forme du *Lemme sixiéme* C, Q, F, T.

PROBLÊME TROISIÉME.

Intégrer la fonction $A\,dx + B\,dy + C\,dp + D\,dq + E\,dr$ *&c.* qu'on sait être une différentielle exacte d'une fonction finie de x, y, p, q, r *&c.* les A, B, C, D, E *&c.* pouvant contenir une fonction z donnée par une équation identique de dégré m en z, & x, y, p, q, r *&c*

Sol. 1°, je suppose que A, B, C, D, E *&c.* étant rationels ne contiennent pas z, l'intégrale de la proposée ne peut-être que $l.\,A' + m\,l.\,B' + n\,l.\,C' + p\,l.\,D' + \ldots + \frac{P'}{Q'}$; A', B', C', D', ... P', Q' étant des fonctions rationelles & entières des variables, & le nombre des A', B', C', D' ne pouvant être plus grand que la somme des plus hauts dégrés de x, y, p, q, r dans la proposée, donc par les *Lemmes* 1, 2, 3, on pourra avoir ces fonctions dont le nombre & la forme sont connues. J'ai donné dans mes *Essais d'analise* des moyens d'abréger le travail qu'exige cette opération.

2° En supposant que A, B, C, D, E *&c.* contiennent z, la proposée ne peut avoir pour intégrale que $l.\,A' + B'z + \ldots\ldots P'z^{m-1} + p\,l.\,A'' + B''z \ldots\ldots$

$$+ P'' z^{m-1} + \ldots \frac{+ A_{,} + B_{,} z \ldots + P_{,} z^{m-1}}{Q},$$

mais le nombre des logaritmes eſt ici indéterminé, & cette indétermination ſuffit pour jetter un très-grand embarras dans cette ſolution. Voici le moyen d'y remédier: j'ajoute à la fonction donnée $A\,dx + B\,dy + C\,dp + D\,dq + E\,dr \ldots$ une fonction $Z'\,dz$ — (Z' multipliée par la valeur de dz donnée par l'équation de z en x, y, p, q, r, &c.) & je détermine Z' fonction rationelle de $x, y, p, q, r, \ldots$ & z par la condition que la fonction propoſée miſe ſous cette forme (& qui reſte la même) ſoit une différentielle exacte d'une fonction finie de $x, y, p, q, r, \ldots$ & z; ce qui par les *Lemmes* 1, 2, 3 me donne la valeur de Z', & de la valeur de Z' je tire par ce qui précède le nombre des fonctions logaritmiques, & dès lors par les *Lemmes* 1, 2, 3, j'ai l'intégrale. *CQFT*.

PROBLÊME QUATRIÉME.

Intégrer une équation différentielle donnée.

Premier ordre.

Sol. 1.° Pour le premier ordre on a l'intégrale générale par le *Problême précédent*, & les ſolutions particulières par le *Problême premier*.

Second ordre.

2.° Pour le ſecond on a, *Problême premier*, deux différentielles exactes qui étant intégrées donnent deux équations du premier ordre de l'une deſquelles on peut tirer

$\frac{dy}{dx}$ en x, y, ſubſtituant dans la ſeconde, on a l'intégrale générale de la propoſée, & les ſolutions particulières ſe trouvent *Problême premier*, ou bien en différentiant l'intégrale générale reproduiſant la propoſée, & égalant à zéro les fonctions, par leſquelles il a fallu pour cela multiplier les différences de l'intégrale.

Troiſiéme ordre.

3.° Pour le troiſiéme ordre on a trois différentielles exactes qui étant intégrées donnent l'une une valeur de $\frac{ddy}{dx}$ en $\frac{dy}{dx}$ & x, y la ſeconde, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en x & y, après qu'on y a ſubſtitué la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ tirée de la première, & la dernière devient l'intégrale cherchée en y ſubſtituant les valeurs de $\frac{ddy}{dx^2}$ & de $\frac{dy}{dx}$ priſes des deux premières.

Ordres ſupérieurs.

Pour les ordres plus élevés on a, l'ordre étant n, un nombre n de différentielles exactes, qui étant intégrées par les *Problêmes* 2 & 3, donnent l'intégrale cherchée, & on a les ſolutions particulières par le *Problême premier* ou comme ci-deſſus.

Remarques.

1.° Soit $A\,dx + B\,dy + C\,dp + D\,dq + E\,dr \ldots$ une différentielle exacte, & que Z en ſoit l'intégrale, il eſt clair que multipliant cette différentielle par une fon-

ction quelconque de Z elle est encore une différentielle exacte, à cause de ce qu'une fonction d'une seule variable multipliée par sa différence est toujours dans ce même cas, *Voyez le quatriéme Volume des Opuscules de* M. D'Alembert, où j'ai vû cette remarque pour la première fois, cela posé si Z est algébrique au lieu d'une, de deux, de quatre, de n, mn différentielles exactes, j'en aurai *Problême premier*, un nombre indéfini; mais alors prenant deux de ces valeurs superfluës & convenables au même z les divisant l'une par l'autre, & égalant le quotient à une arbitraire, j'ai l'intégrale de ces différentielles exactes; si deux valeurs de différentielles exactes pour la même équation avoient également des intégrales algébriques, on les trouveroit par cette méthode, ainsi le travail de la Recherche des différentielles exactes ne peut être prolongé par-là, sans que celui de l'intégration ne soit diminué, & si l'on a soin lorsqu'on a une intégrale algébrique de la prendre pour l'équation proposée, on évitera même souvent cet ambarras. Lorsqu'on sait qu'une équation d'un ordre n, ne contient qu'autant de transcendantes qu'une équation d'un ordre inférieur en peut contenir, on est sur par cette remarque de parvenir sans intégration à trouver son intégrale de cet ordre inférieur.

Soient encore A, A', A'', ... les fonctions qui au nombre de n rendent une fonction de l'ordre n la différentielle exacte de fonctions différentes Z, Z', Z'' .... aussi au nombre de n, il est clair que multipliant la proposée par $aA + bA' + cA'' + \ldots$ elle devient encore la différentielle exacte de $aZ + bZ' + cC'' + \ldots$ a, b, c, étant des coéficiens constans. Il suit de-là qu'il peut arriver que connoissant Z, Z', Z'' &c. & les égalant à zéro on n'en ait aucune, de laquelle on puisse tirer $d^{n-1}y$, en $d^{n-2}y$ .... dy, dx, y, & x; ce qui semble rendre inutile dans ce cas la solution donnée

dans le Problême quatriéme, mais d'abord il ſuit de l'hipothéſe qu'on peut toujours tirer une pareille valeur des équations, $Z = o$, $Z' = o$, $Z'' = o$ &c. priſes enſemble, & de plus prenant $a' Z + b' Z' + c' Z'' + \ldots = o$, on aura toujours cette équation en déterminant a', b', c', &c. qui n' étant données que par des équations déterminées & linéaires, n' introduiſent aucune nouvelle difficulté dans la Solution de ce Problême. *Voyez ci-deſſous la première des obſervations ſur la théorie des équations différentielles où je rèſous une autre difficulté du même genre.*

2.° J' ai préféré la ſuppoſition de dx conſtant a celle de faire varier toutes les différentielles, parceque dans le dernier cas, ſi l' arbitraire eſt $ax' + b$, par exemple, je ne puis avoir les deux intégrales du premier ordre qui répondent à une propoſée du ſecond, ſans que x s' y trouve; l'une des deux, & ſa différentielle le contiendront néceſſairement, ce qui rend plus compliquée la *Solution* du *Problême premier* qui le ſeroit déja d' avantage, parce qu'au lieu des fonctions de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx}$, & multipliées par dx^2, il faudroit y faire entrer $\frac{ddx}{dx^2}$ &c. *Voyez les mêmes obſervations* on trouveroit de quoi ſe dédommager du premier inconvénient en remarquant qu' il n'a lieu que quand la propoſée à une intégrale algébrique du premier ordre, & que multipliée par une fonction finie, elle devient différentielle exacte d'une fonction finie, ce qui donne le moyen de trouver toujours une des intégrales ſans recourir au Problême troiſiéme, ce que je viens de dire d' une équation du ſecond ordre s' applique facilement à celles des autres ordres qui ſont ſuſceptibles de la même Remarque, & j' ai crû qu' il ſeroit ſuffiſant de détailler le cas le plus ſimple.

3.°

3.° Si j' ai une équation différentielle qui contienne des transcendantes ou des exposans indéterminés, ou &c., je puis les faire évanoüir par des différentiations successives, intégrer alors l'équation qui en résulte en observant, ce qui simplifie le travail, que l'équation proposée, & qui est d' un ordre inférieur est alors une des intégrales.

4.° M. Fontaine a proposé d' employer le même moyen pour n'avoir jamais à intégrer que des fonctions sans radicaux. Cette idée me fournit une nouvelle maniére d' intégrer préférable à ce que je crois dans la pratique, en effet mettant la proposée sous une forme rationelle, & la différentiant, j' ai: 1°, une différentielle exacte toute trouvée, & dont l' intégrale est la proposée: 2°, j'ai par le *Probléme premier* toutes les autres différentielles exactes dont je cherche les intégrales, afin qu'éliminant les différences, & celles de la proposée, j'aie l' intégrale finie, ce qui fait que j' ai dans les fonctions à déterminer autant d'équations à intégrer que par la méthode ci-dessus, & autant des variables, dans le cas ou la proposée est entre x & y seulement. 3°, j' ai un nombre indéfini de différentielles exactes, dont l'intégrale est la proposée égalée à une arbitraire, & qui ne peuvent qu'embarasser la Solution. Le grand avantage de cette méthode est de n' avoir à traiter que des équations linéaires, & quoiqu'il s'y rencontre dans la pratique quelques inconvéniens particuliers elle me paroit en tout la plus simple.

Conclusion.

Je crois que les Géomètres qui se donneront la peine de me lire avec attention, & de suivre cette solution, trouveront qu'elle contient la Solution générale que je promets dans le titre. Je me flatte d' en avoir rendu la marche assez - simple, d' avoir assez indiqué la source des

principales difficultés, & le moyen d'y remédier, pour qu'un Analiſte un peu inſtruit puiſſe l'employer avec ſuccès ſur telles équations qu'il voudra, & réſoudre ainſi avec de la patience & quelque application les Problêmes les plus difficiles, pourvû qu'ils dépendent de l'intégration d'équations différentielles aux différences abſolues & évanoüiſſantes. Si cette idée de mon travail eſt juſte, j'ai lieu d'eſpérer que la grande utilité dont il peut-être me donnera quelques droits à l'indulgence des Géomètres, & qu'ils ne le regarderont pas comme une repétition inutile des principes que j'ai déja donnés, mais qui avoient beſoin pour être mis en uſage d'être préſentés ſous un nouveau jour.

Ribemont du 12 *Mai* 1768.

OBSERVATIONS

Sur la Théorie des équations différentielles.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

I.

J'ai donné dans un *Mémoire précédent* une méthode générale pour intégrer toutes ces équations, & l'on parviendra par cette méthode à avoir dans tous les cas les n équations de l'ordre $n - 1$, d'où l'on doit tirer l'intégrale finie d'une équation de l'ordre n, mais il faut que les différentielles exactes qui repondent à ces équations soient réellement au nombre de n toutes différentes, & pour cela que les appellant dB, dB', dB'', &c., & ayant dB, & dB', différentielles de deux fonctions réellement différentes, je n'aie ni $dB'' = mdB + ndB'$, n & m étant des constantes, ni $dB'' = \overline{F.mB + nB'}.\overline{mdB + ndB'}$, ni $dB'' = mdB + FB' - dB' \ldots$ ou reciproquement; ni $dB' = d.F(B, B').mB + nB'$ dans le second cas, B' dans le troisiéme, B, B', dans le quatriéme doivent être algébriques, lorsqu'il ne se rappelle pas aux précédens, car tous sont contenus dans ce dernier: pour vérifier ce cas en général, sans connoitre ni B, ni B', ni B'', soit V la proposée, j'ai $dB = AV$, $dB' = A'V$, $dB'' = A''V$; A, A', A'' sont connus, la condition sera donc $A'' = F(B, B').A + F'.(B, B').A' \ldots$ donc faisant dB & $dB' = 0$ $dA'' = F.(B, B').dA + F'.(B, B').dA' \ldots$ j'élimine $F'.(B, B')$, & il ne me reste plus que $F.(B, B')$ qui étant égalée à une constante est une des intégrales cherchées, lorsque B''

n'en donnera pas une nouvelle, il en ſera de même de F'. (B, B') le reſte n'a plus de difficulté, & ce que je viens de dire pour trois différentielles s'applique également à un plus grand nombre, comme le but que je me propoſe ici n'eſt que de ne pas intégrer en pure perte des différentielles qui rentrent les unes dans les autres, il eſt aiſé de voir que je puis ſuppoſer qu'on connoiſſe B, B', & alors rien n'eſt ſi facile que de vérifier les conditions ci-deſſus, au reſte on peut toujours procéder à l'intégration, même ſans cette recherche ; on trouvera en cherchant l'intégrale finie quelles ſont les équations qui rentrent les unes dans les autres, & on en cherchera de nouvelles. Le calcul ſera ſeulement plus long qu'en employant les moyens que je viens de propoſer, & qui diſpenſent du travail de l'intégration dans le cas des intégrales algébriques.

I I.

Soit $A\,dx + B\,dy$ une fonction qui ſoit une différentielle exacte d'une fonction de x & de y, & que A & B ſoient homogènes, j'ai, m, étant le dégré où montent les x & y, $\int A\,dx + B\,dy = \frac{1}{m+1}\,\overline{Ax + By}$ lorſque l'intégrale eſt algébrique. *Voyés les Mémoires de* M. Fontaine *page* 29-38 ; ſi l'intégrale eſt purement logaritmique ou en partie logaritmique, & en partie algébrique j'ai $Ax + By = m'$, m' étant la ſomme des dimenſions de chaque fonction qui eſt ſous le ſigne logaritmique multipliées par le coéficient de chaque logaritme ; j'ai donc en général, ſi $a\,dx + b\,dy$ multipliées par A' doit être une différentielle exacte, $\overline{ax + by}$. $A' = m'$, $A' = \frac{m'}{ax+by}$ ce qui me donne le facteur toutes les fois que m' n'eſt pas zéro. Si A & B contiennent une exponentielle e^B,

& que la dimension de B' soit zéro, on aura encore $\overline{Ax + By}^{\frac{1}{m+1}} = \int A\,dx + B\,dy$, & comme c'est le seul cas où l'équation différentielle algébrique est homogène, on peut faire en général $\int .\ A'(a\,dx + b\,dy) = \frac{1}{m+1} \times A'(ax + by)$. *Voyés le Mémoire de* M. Fontaine *ibidem.* Si A & B contenoient B', & que la dimension de B' ne fut pas nulle, mais égale a m' on aurait $\overline{Ax + By}^{\frac{1}{m+1+B'}} = \int .\ A\,dx + B\,dy$ ce qui peut donner B', & rappeller ce cas au précédent. Soit $A'.\ a\,dx + b\,dy + c\,dp$ une différentielle exacte tout étant algébrique, j'ai $A'.\ ax + by + cp = m'$, supposant $m' = 0$ ce que je peus toujours faire si, p, étant la paramètre constant, je le suppose ensuite variable pour que la fonction soit homogène j'aurai donc $C = -\frac{ax + by}{p}$, & lorsque $A\,dx + B\,dy + C\,dp$ est une différentielle exacte $C = -\frac{Ax + By}{p}$. *Voyéz* M. Fontaine *ibid.*, je puis donc rappeller ainsi une équation non homogène à une homogène qui a une variable de plus, or une équation homogène n'est pas sujette à ce que, les rangs supérieurs d'une différentielle exacte mise sous une forme rationelle, & qu'on n'a point débaraffée de ses facteurs puissent dévenir nuls; soit par exemple $\frac{p\,dx}{x^2 + apx + bp^2} + \frac{p\,dy}{cy^2 + epy + fp^2} = 0$ elle devient $\frac{p\,dx - x\,dp}{x^2 + apx + bp^2} + \frac{p\,dy - y\,dp}{cy^2 + epy + fp^2} = 0$. Or cette équation se trouve être du troisiéme dégré comme elle le doit, & ainsi d'après cette précaution les tables que j'ai données dans mon calcul intégral sont suffisantes pour les

différentielles exactes. Il faut remarquer que si au lieu de $adx + bdy = 0$ je prends $adx + bdy - \frac{ax + by}{p} dp = 0$ qui est homogène, & que je cherche à l'intégrer par la méthode de M. Bernoulli, cette méthode ne me donne aucun résultat

I I I.

Soit une fonction différentielle d'un ordre supérieur au premier, & qu'elle soit une différence exacte d'une fonction de l'ordre inférieur, il est clair que regardant ddy comme de deux dimensions, $d^3 y$ comme de trois &c., & de même pour chaque variable, si aucune différence n'y est supposée constante, on peut la regarder comme homogène par rapport aux différences regardées comme de nouvelles variables; ce qui donnera un moyen d'avoir toujours une équation homogène, quant à ces variables, à l'aide d'une substitution convenable. *Voyez* M. Fontaine *page* 49-50, cela posé il est clair: 1°, que si dx a été supposé constant, & qu'on ait mis $d . \frac{dy}{dx}$ pour $\frac{ddy}{dx}$ & ainsi de suite, ou ce qui revient au même si les arbitraires ne contiennent pas la différence constante d'une nouvelle variable, le dégré des différences est nul, & que par conséquent dans ce cas on n'aura par la méthode ci-dessus ni l'intégrale, ni le facteur qui rend une équation proposée de cet ordre une différentielle complette quand même on connoitroit les élémens nécessaires pour la traiter comme une équation du premier ordre, & les différences supérieures comme de nouvelles variables: 2°, que si l'intégrale doit contenir une nouvelle variable, & qu'il soit question d'une équation possible, on aura nécessairement $V + a x' + b = 0$, x' étant la nouvelle variable, d'où $ddV = 0$ qui est la proposée multipliée par

ſon facteur, & connoiſſant $d\,d\,V$ on aura $d\,V$ algébrique par la *Remarque quatriéme page 21 du Calcul intégral*: 3°, qu'ayant $V + a\,x + b = 0$; j'en tire $d\,V + a\,d\,x = 0$, & $\frac{d\,V}{x} - \frac{V\,d\,x}{x^2} - \frac{b\,d\,x}{x^2} = 0$ differentiant la première, j'ai $d\,d\,V = 0$, & différentiant la ſeconde pour éliminer b, $d\,x\,d\,V + x\,d\,d\,V - d\,V\,d\,x = 0$, $x\,d\,d\,V = 0$ quantité qui eſt encore une différentielle exacte, & de $d\,V + a\,d\,x = 0$, & $x\,d\,V - V\,d\,x - b\,d\,x$, je tire $V + a\,x + b = 0$ ce qui eſt conforme aux principes généraux du calcul: 4°, que ſi j'ai $V + a\,x^2 + b\,x + c = 0$, j'aurai $d^3\,V = 0$, d'où $d\,d\,V + 2\,a\,d\,x^2 = 0$, $x\,d^3\,V = 0$, d'où $x\,d\,d\,V - d\,x\,d\,V - b\,d\,x^2 = 0$, & $x^2\,d^3\,V = 0$, d'où $x^2\,d^2\,V - 2\,x\,d\,x\,d\,V + 2\,V\,d\,x^2 + 2\,c\,d\,x^2 = 0$.

Et par la même remarque une expreſſion algébrique de $d\,V$ lorſque je connaitrai $d^3\,V$; d'où il ſuit que la propoſée a deux intégrales algébriques, & qu'il en ſera de même des ordres plus élevés, que ſi l'on a pour intégrale $V + a\,x + b = 0$, & $V' + a'\,x + b' = 0$, on aura également, connoiſſant $d\,d\,V$ & $d\,d\,V'$, $d\,V$ & $d\,V'$, & une équation algébrique d'un ordre moindre de deux unités, comme s'il avoit eû $d\,d\,d\,V$, en ſorte qu'en général on pourra parvenir à une équation algébrique de l'ordre $n - m$, m déſignant le dégré de x' dans le produit de toutes les fonctions arbitraires multipliées entre elles: 5°, que ce cas, qui eſt le plus ſimple, eſt le ſeul où l'on puiſſe déduire le facteur après avoir rendu l'équation homogène quant au dégré des différences, qu'alors on a non pas $d\,d\,V$, mais $\frac{d\,d\,V}{d\,V}$ qu'égalant après l'intégration $d\,V \ldots . a - a\,d\,x$, on a par une nouvelle intégration $V + a\,x + b = 0$; mais que ſi on veut intégrer cette nouvelle équation on a une équation de la na-

ture de celles où la différence eſt ſuppoſée conſtante, & à laquelle cette méthode de chercher les facteurs ne s'applique plus quand-même V feroit algébrique ce qui n'arrive pas toujours; car l' équation peut-être telle que V contienne néceſſairement une tranſcendante: 6°, ſi on vouloit chercher ſucceſſivement les intégrales, il faudroit prendre une autre route, par exemple ſoit $V = 0$ une équation de l'ordre n rationelle qui ne contienne pas de variables, dont la différentielle ſoit conſtante, & dont l' intégrale finie en peut contenir, je ſuppoſe le facteur algébrique & rationel A de l' ordre n, le facteur A' de l' ordre $n - 1$ pour l'intégrale de AV, le facteur A' de l'ordre $n - 2$ pour l' intégrale de $A \int AV$, & ainſi de ſuite, & prenant les équations de condition. ſans faire $V = 0$, (& elles ſont au nombre de $nm - 1$) pour m variables, & n facteurs, je cherche à déterminer tous les facteurs, de manière qu' ils ſatisfaſſent à la fois à toutes ces équatious, & delà ſans connoitre *a priori* le dégré où montent les différences ſupérieures dans chaque intégrale, j'ai des facteurs qui s'accorderont toujours avec ceux qu' on trouvera *a poſteriori*; il eſt clair que les facteurs doivent être tels que A' contienne $\int AV$, A'', $\int . A' \int AV$, & ainſi de ſuite, à cauſe des traſcendantes qui peuvent ici entrer dans les facteurs: 7°, enfin que ſi l' on cherche toutes les intégrales de l'ordre $n - 1$, on peut lorſque l'intégrale peut contenir x' .... prendre les facteurs de la forme $x'^p A$, A étant ſans x' & p étant un entier, mais ſi on cherche à intégrer ſucceſſivement il faut que x entre dans A de toutes les manières poſſibles.

I V.

Soit une équation d'un ordre n entre x & y, & que j' aie fait $dx = p$, $ddx = q$, $d^3x = r$ &c. $dy = p'$,

$d^2 y$

$d^2 y = q'$, $d^3 y = r'$ &c. j' aurai si elle est possible

$$\left.\begin{array}{l} A\,dx + B\,dp + C\,dq + D\,dr \text{ \&c.} \\ \quad\ldots\ldots + A'\,dy + B'\,dp' + C'\,dq' + D'\,dr' \text{ \&c.} \\ \quad + P\,d^{n-1}x + d^n x \\ \quad + P'\,d^{n-1}y + Q'\,d^n y \end{array}\right\} = 0 .$$

Le coéficient de la plus haute différence de x étant 1, celui de la plus haute différence de y étant connu, & A l' étant aussi lorsque les B, C, D &c.; A' B' C' D' &c. le sont devenus. Cela posé prenant les équations de condition pour que cette équation regardée comme contenant un nombre $2n$ de variables soit possible, j' ai $2n - 2$ équations, dont $2n - 3$ contiennent chacuné l' inconnuë & la dernière n' en contient pas de nouvelle, substituant dans cette dernière les valeurs des différences partielles de toutes les variables tirées des autres équations, on fera évanoüir ces différences partielles, & les variables avec elles, à l' exception de P, & P', différentiant ensuite aux différences partielles l' équation linéaire entre P & P', on parviendra à éliminer l' un ou l'autre, & l' on aura une équation $A'\,P + B' = 0$. Il est aisé de réduire en formules indéfinies pour un ordre indéfini n les valeurs de A' & B'; la même méthode s' applique facilement à un plus grand nombre de variables, mais il faut de plus qu'en faisant $d^n x + Q'\,d^n y + Q''\,d^n z$ &c. $= 0$, cette équation soit possible en ne regardant que $d^{n-1}x$, $d^{n-1}y$, $d^{n-1}z$, &c. comme variables. Si une différentielle est supposée constante, on trouvera également A' & B', lorsque le nombre des variables est au dessus de deux; connoissant P, on auroit P', & les coéficiens de $d^{n-2}x$ & $d^{n-2}y$ donnés par des formules qui contiendront P ou P', & ainsi de suite. *Voyéz* M. Fontaine pag. 38, 83, maintenant je remarque que la proposée peut-être telle que l'on ait seulement une intégrale de l' ordre $n - 1$,

& que cette intégrale n' en ait point de générale dans ce cas, P ne doit avoir qu'une valeur possible si la différentielle n' a aussi qu' une valeur, donc on peut avoir $P = - \frac{B'}{A'}$, & substituant cette valeur dans l' équation, de condition qu'on a en P', elle doit devenir identique, ce qui donne l'équation de condition cherchée. Si au contraire la proposée a deux intégrales de l' ordre $n - 1$, il est clair que P a une infinité de valeurs d'ou il suit qu' on ne peut le supposer donné par une équation linéaire, mais seulement par une équation différentielle même aux différences partielles, donc on aura pour que les $2 n - 3$ équations de conditions qui contiennent des inconnuës, s' accordent avec celle qui n' en contient pas les deux équations $A' = 0$ & $B' = 0$, qui seront ici les équations de condition, & comme lorsque le nombre des variables est plus grand que deux, A' & B' ont plusieurs valeurs, la même chose doit avoir lieu pour toutes ces valeurs. Les équations de condition que donne M. Fontaine au delà du second ordre ne sont que pour les équations homogènes, sur quoi voyez ci-dessus l'*Observation* III., & pourroient être illusoires parce qu' il suffit ici que $A' = 0$ & $B' = 0$ ce qui peut arriver sans que $\frac{A'}{B'}$, paroisse sous la forme $\frac{0}{0}$. Pourque $A' = 0$ & $B' = 0$, il suffit que la proposée ait deux intégrales de l' ordre $n - 1$, & il est clair que si l' équation a une intégrale complette & finie, on pourra à la fin trouver une de ces intégrales où la plus haute différence se trouve débarrassée de toute transcendante, cette équation une fois trouvée, on pourroit la traiter comme la proposée, & ainsi de suite, & avoir par-là les équations de condition quoique successivement & postérieurement à la recherche des intégrales

ſucceſſives, mais ſi l'on ignore que l'équation ait ou n'ait pas d'intégrale finie complette, faut-il néceſſairement qu'une équation qui a deux intégrales de l'ordre $n - 1$ en ait une de l'ordre $n - 2$? eſt-il ſur lorſque cela arrive qu'on doive en trouver encore une à qui on puiſſe appliquer la méthode de M. Fontaine? tandis que cela ne ſera pas démontré les équations de condition A' & B' ne nous apprendront rien ſur l'intégrabilité des équations qui nous exempte dans tous les cas de l'inconvénient de ſuivre à pure perte le travail de l'intégration pour des équations abſurdes: on peut encore moins regarder comme générale l'équation de condition identique qu'on auroit en ſubſtituant la valeur de P dans l'équation de condition qui contient cette inconnuë, car dans ce cas connoiſſant que la propoſée a une intégrale complette, on peut en trouver une, où la plus haute différence ſoit engagée dans une fonction tranſcendante, & à laquelle on ne puiſſe plus appliquer la méthode.

V.

Si l'on ſavoit qu'une équation admît une intégrale finie complette ou incomplette ſans ſavoir lequel des deux, on tireroit de l'obſervation précédente une manière de s'en aſſurer, & de trouver en même tems l'intégrale incomplette, en effet dans ce cas il eſt clair que ſi on n'a ni $A' = 0$, ni $B' = 0$, & que ſubſtituant la valeur de P dans l'équation de condition où entre P cette équation ne devienne pas identique, on aura cette même équation pour l'intégrale de la propoſée, & on ſaura de plus que cette équation n'a qu'une intégrale finie ſans arbitraire, ce qui paroit ne pouvoir arriver à une équation entre deux variables, ainſi ce cas n'ayant lieu que pour pluſieurs variables, il faut tirer l'intégrale de la comparaiſon de

toutes les conditions qui ne ſeront pas identiques, & cette intégrale ainſi trouvée n' aura elle-même pour intégrale incomplette qu'une fonction finie ſans arbitraires. Si A' & B' ne ſont point zéro, & que l' équation de condition pour P ſoit identique, il faut intégrer la propoſée à l'ordinaire, & ſon intégrale n'en pourra avoir d'autre qu'une fonction finie ſans nouvelles arbitraires, ſi j' ai A' & B' égaux à zéro, j' aurai néceſſairement dans le cas préſent une intégrale, où la plus haute différence ne ſera point dans une fonction tranſcendante ou irrationelle, & traitant cette intégrale comme la propoſée, je ferois les mêmes Remarques que ci-deſſus.

V I.

Si d'après ce qu'on vient de dire N. III, IV, & V, on veut rappeller une équation de l'ordre n à une équation du premier ordre, il eſt clair 1°, qu'on aura P par l'équation de condition en P, Q', qu'on aura de plus P', donné en P & Q', les autres coéficiens par une des équations de conditions qui y conviennent, & le dernier A en retranchant de $V - d^n x - Q' d^{n-1} y$ les coéficiens connus & multipliés par les différences correſpondantes, & diviſant le reſte par dx: 2°, que ſi on avoit voulu prendre les valeurs des coéficiens telles que j'ai dit n. IV. qu'on les trouvoit d'après la méthode de M. Fontaine, il faudroit comme à chaque détermination on ſe trouve avoir deux équations pour chaque inconnuë, que ſubſtituant ces valeurs dans l' équation de condition, celle-ci devint identique, & qu' ainſi on aura pour l'ordre n, ou $2(n-2)$ inconnuës à déterminer par $2(n-2)$ équations aux différences partielles, excepté pour le ſecond ordre où il y a une ſeule inconnuë & une ſeule équation, ou bien une ſeule inconnuë qui doit ſatisfaire à $2(n-2)$

équations, & à une ſeule pour le ſecond ordre: 3°, que chaque coéficient peut-être toujours ſuppoſé une fonction algébrique de x, y, &c., & de leur différence juſqu' à $d^{n-1}x$, $d^{n-1}y$, ſans d' autres irrationelles que celles de la propoſée, enſorte que pour en trouver la valeur il n'y a qu'à ſubſtituer une fonction de cette forme dans les équations convenables: 4°, que le nombre des valeurs qui conduiſent à des équations réellement différentes eſt n, qu'on peut les chercher, & qu'alors intégrant toutes ces équations on aura l' intégrale finie ſans être obligé de chercher les intégrales ſucceſſives: 5°, que pour s' aſſurer ſi elles ſont réellement différentes, on prendra des moyens ſemblables à ceux que j' ai expoſés n. 1, en obſervant que l' équation répondant à $B = 0$, & $F \cdot B = 0$, lorſque B eſt algébrique, eſt ici une ſeule & même équation: 6°, que ces équations étant données, il faudra chercher le facteur qui les rend différentielles complettes ce qui donne une inconnuë à déterminer par $2n - 1$ équations: 7°, que pour un nombre m d' inconnuës pour réduire l' équation propoſée à une équation du premier ordre, on aura $m \cdot (n - 1) - 2$ équations réductibles à $m \cdot (n - 2)$ & $mn - 1$ pour trouver le facteur d' où il ſuit que cette méthode demande deux opérations, & deux opérations plus compliquées, au lieu d' une plus ſimple que demande celle que j' ai expoſée: au reſte les équations de la première opération peuvent dans une infinité de cas ſe réduire à une ſeule.

Le cas que j' ai développé dans l'*Article* III réduit à une ſeule les deux opérations, dont on vient de parler, parcequ'on trouve immédiatement autant de facteurs que l'on a de fois dans l' intégrale $ax' + b$, x' étant la nouvelle variable, ce qui peut avoir encore lieu dans celui de l' homogéneité entre les variables, & dans d' autres hipothèſes particulières. La manière de ſe débarraſſer des

radicaux eſt pour cette méthode la même que pour la précédente, & quelque fois plus commode, lorſqu' il n'eſt queſtion que d' équations du *premier ordre.*

V I I.

Une Remarque je crois nouvelle, & qui n'eſt pas déplacée ici c'eſt qu'une équation de l' ordre n entre x & y peut n' être pas abſurde, quoique par l' algébre ordinaire on ne puiſſe en tirer $d^n x + Q d^n y + Z = 0$, ſoit que les plus hautes différences reſtent néceſſairement dans des fonctions irrationelles, ſoit même qu'elles reſtent dans des tranſcendantes, en effet ſoit une équation de l'ordre, $n + 1$ qui admette une intégrale finie complette, & que une de ſes intégrales de l'ordre n ſoit dans le cas dont je viens de parler, ce qu'on ſait être poſſible, il eſt clair que cette équation de l' ordre n a néceſſairement pour intégrale celle de l'équation de l'ordre $n + 1$; & qu'ainſi ſi on a une équation de l'ordre n qui ne diffère de celle-là qu'en ce qu'on a détérminé la conſtante arbitraire, il eſt clair qu'elle aura encore la même intégrale en y déterminant ſeulement la même conſtante, ſi donc on a de pareilles équations on ſaura par la méthode que j'ai donnée dans mon calcul intégral ſi elles ſont abſurdes ou non, mais par la méthode expoſée ici n. IV, on ne pourroit s'en aſſurer qu' en différentiant la propoſée, or après cette différentiation comme il eſt queſtion de ſavoir ſi elle a une intégrale de l' ordre $n - 1$, & qu'elle ſe trouve de l'ordre $n + 1$, la même méthode ne peut encore ſervir par les raiſons que j' ai expoſées quant à la manière de les intégrer, il faudra les différentier & intégrer l' équation qui en nait en déterminant l'arbitraire dans une des intégrales de l'ordre n, en ſorte que la propoſée puiſſe être une de ces intégrales.

Je crois que ces nouvelles *Obſervations* jointes à la méthode que j'ai propoſée dans le *Mémoire précédent* en peuvent dans pluſieurs cas faciliter l'uſage, du moins en éclairciront-elles la *Théorie*, & le *Problême* eſt ſi important que cela ſuffit pour me faire pardonner de les avoir placées ici.

VIII.

Je me propoſe de developper dans cet article un cas du *Problême* général des *maxima* ou *minima* des formules intégrales indéfinies, ce cas me paroit ſe rapporter au *Problême* des *Tautochrones* pris dans le ſens le plus étendu ; ainſi j'appéllerai quelque fois *Problême* des *Tautochrones* celui dont je m'occupe ici ſans pourtant prétendre par là rien ajouter à ce que de très-grands Géomètres ont fait ſur le *Problême* des *Tautochrones* pris dans le ſens ordinaire.

Soit $\int z$ une fonction intégrale indéfinie de x, y, z &c. & de leurs différences, & que ſuppoſant qu'il y ait une équation donnée entre ces variables, je cherche cette équation d'après l'hipothèſe que $\int z = \int z + \delta z$, δz étant pris dans la ſuppoſition que l'équation cherchée ait lieu.

Pour cela je ſuppoſe que x ſoit devenu $x + \delta x$, $dx = p$, $p + \delta p$ &c. que y ſoit devenu $y + \delta y$ & $dy = p'$, $p' + \delta p'$ &c. que z ſoit devenu $z + \delta z$ & $dz = p''$, $p + \delta p$ &c.

J'aurai d'après le ſecond volume des Mémoires de la Société Roiale page 175, les équations (B) & (C).

La première ſeule devant donner l'équation cherchée entre les variables, & les autres ſervant à déterminer les conditions particulières, & les limitations du *Problême*.

Soit maintenant l'équation (B), $A \delta x + B \delta y + C \delta z \ldots = 0$, il eſt aiſé de voir qu'au lieu que dans le *Problême des iſopérimètres* il faut, lorſqu'il n'y a pas de ſuppoſitions étrangères que $A = 0$, $B = 0$ & $C = 0$, il ſuffit ici que $A \delta x + B \delta y + C \delta z \ldots = 0$ les δx, δy, $\delta z \ldots$ étant liés entre eux par cette hipothèſe qu'il ſoient donnés par l'équation finie qui doit avoir lieu entre les variables, ſoit $A' d x + B' d y + C' d z = 0$ la différentielle du premier ordre qui en nait, j'ai $A' \delta x + B' \delta y + C' \delta z = 0$, d'où ſubſtituant & égalant à zéro le coéficiens de δz & δy qui reſtent $A B' - B A' = 0$, $A C' - C A' = 0$, & enfin $A d x + B d y + C d z = 0$, ſi j'avois fait $\delta x = A' \delta y$, $\delta x = B' \delta z$, j'aurois eû ſeulement $A + \frac{B}{A'} + \frac{C}{B'} = 0$, d'où $A + \frac{B d y}{d x} + \frac{C d z}{d x} = 0$, ce qui revient au même que ci-deſſus, & d'où il ſuit que lorſqu'on cherche la *Solution* la plus étenduë du *Problême* (c, a, d) avec la condition des δz, δx, δy donnés entre eux par l'équation cherchée, on ne peut trouver qu'une équation entre toutes les variables. Il ſemble d'abord que cette ſuppoſition n'eſt pas légitime, parceque A', B', C' ſont finis par l'hipothèſe, & que j'en trouve des valeurs d'un ordre ſupérieur, voici la ſolution de cette difficulté. Soit $V = 0$ l'équation finie, & $A' d x + B' d y + C' d z = 0$ ſa différence, que V contienne n tranſcendantes ou arbitraires, que A', B', C' en contiennent $n - 1$, & que je connoiſſe toutes les différentielles de V juſqu'à celle qui eſt algébrique; il eſt clair qu'en ſubſtituant dans les A', B', C', les valeurs des tranſcendantes ou arbitraires qu'on tire de ces équations on parviendra à une équation identique de l'ordre $n - 1$, ou à une de l'ordre n qui ſera la même que l'équation algébrique tirée de $V = 0$, on aura donc des valeurs de

A',

A', B', C' de l'ordre $n - 1$, telles qui ſi on fait $A' \delta x + B' \delta y + C' \delta z = 0$ on ait une équation identique, en faiſant $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, & des valeurs de l'ordre n, telles qui ſi on fait encore $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$ on ait la propoſée, & c' eſt ce qui arrive ici.

Il ſuit delà : 1°, que les équations qui donnent les conditions qui doivent avoir lieu entre les variables pour que l' intégrale indéfinie ſoit ou *maximum*, ou *minimum* donnent une ſolution particuliére du *Problême* dont je traite ; mais qu' il faut mettre dans l' équation (B) dx pour δx, dy pour δy &c., lorſqu'on veut avoir la *Solution générale* : 2°, que lorſqu'une fonction n'admet point de *maximum*, parceque les équations, dont le nombre égale celui des variables, ne peuvent pas ſe réduire à une de moins, la ſolution du *Problême* actuel ne peut-être complette, mais qu'on peut en avoir de particulières ; & que dans la même hipothèſe, ſi j' ai une équation définitive pour le *maximum* en x ſeul, une en y, une en z de l' ordre n, & que les intégrant il entre dans les arbitraires une fonction x', dont la différence ſoit conſtante, j'aurai une équation en x & y, ou x & z, & le *Probléme* ſera réſolu comme ſi les équations s' étoient réduites à une de moins ; il doit arriver cependant dans le même cas que l' équation pour le *Problême* des *Tautochrones* n' ait pas de ſolution compléte : 3°, qu' il peut arriver que le *Problême* de *maximis* & *minimis* ait une ſolution, & que l'autre n'en ait pas. Mais il faut entendre cela ſeulement d' une ſolution abſoluë, car en conſidérant les ſolutions qu' on pourroit avoir, en prenant entre les variables une équation indépendante du *Problême*, il eſt aiſé de voir que le *Problême* de *maximis* a réellement une ſolution moins étenduë : 4°, que lorſqu' il n'y a que deux variables, & les deux équations pour le *Problême* de *maximis* ſe réduiſant à une, la ſolution de celui des *Tautochrones* ſe trouve être abſo-

lument la même, à l'exception de la détermination des arbitraires.

Soit l'équation (C) pour le cas de *maxima*, & *minima*, j'ai naturellement $2m.(n-1)$ de quantités arbitraires, m désignant le nombre des variables, & n l'ordre de la fonction Z, & celui des conditions à remplir est $nm-1$, parcequ'il y en a une qui se détermine, en prenant une valeur déterminée d'une des variables qu'on suppose être restée dans l'équation (C) après les éliminations où conduit l'équation (B). Dans la même hipothèse on a pour le *Problême* des *Tautochrones* $n.(m-1)-1$, conditions, & $2n$ arbitraires. Ces seules conditions sont indispensables, si on veut encore que x étant zéro, par exemple $\int Z$ soit encore le même quelque équation qu'on suppose entre les variables, on aura pour le premier cas nm nouvelles conditions, & $n.(m-1)$ pour le second. Toutes les fois que dans ces suppositions le nombre des conditions surpasse celui des arbitraires, le *Problême* en général n'admet pas de solution; au reste il faut dans chaque cas particulier vérifier les équations, parceque la détermination des arbitraires suffit dans quelque cas pour un plus grand nombre de conditions, & que la valeur de ces arbitraires peut réduire les équations entre les variables à n'avoir pour lieu que des points conjugués, ce qu'on ne pourroit regarder comme une vraie *Solution*.

Lorsque le *Problême* pris en général n'a point de solution il faut le considérer d'après certaines hipothèses qui le limitent. Ainsi dans le *Problême* des *maxima*, on supposera ou que les valeurs des δx, δy &c. δdy, δdx &c. &c. soient nuls, soit pour la valeur où l'on suppose que $\int Z$ commence, soit pour celle où elle se termine, ou bien on supposera des équations entre ces quantités pour les mêmes valeurs, & alors ce ne sera plus en général entre toutes les valeurs de $\int Z$ qu'on cherche la plus grande,

mais entre celles de toutes ces valeurs qui font affujetties à certaines conditions dans celui des *Tautochrones*, on pourra faire les mêmes fuppofitions avec cette différence qui refte toujours un δx ou δy que ces conditions n'affectent point : 2°, que ces conditions ne font pour une valeur unique, que pour celle des deux valeurs, entre lefquelles on prend $\int Z$ qui refte fixe, mais que comme l'autre ne l'eft point, ces conditions pour cet autre s'étendent à toutes les valeurs des variables : 3°, que les conditions de la première efpèce limitent l'équation fans limiter le *Problême*, & qu'il n'en eft pas ainfi des fecondes.

Lorfqu'il refte des arbitraires dans l'équation du *Problême* des *Tautochrones*, chaque détermination donne une folution également complette du *Problême*, mais dans celui des *maxima* chaque détermination ne donne le *maximum* ou *minimum*, que pour les cas où les variables ont entre elles pour un nombre déterminé de points les conditions néceffaires pour cette détermination.

On peut en général dans le *Problême* des *maxima* & *minima*, fuppofer que les équations (B) étant fubftituées dans Z, on aura l'expreffion de $\int Z$ en une fonction finie d'une des variables, mais dans celui des *Tautochrones* lorfqu'il y a plus de deux variables, il faut de plus pour que le *Problême* foit vraiment poffible, en général qu'on puiffe avoir $\int Z$ exprimée par une fonction finie de plufieurs variables, ce qu'on peut connoitre fans intégration, en effet fans cela on a bien en général les équations néceffaires pour que $\int Z$ ait les conditions demandées, mais on ne fait ce que peut-être $\int Z$, & elle a une valeur abfolument indéterminée.

Après avoir confidéré la formule $\int Z$, je puis confidérer celle où j'ai Z' donné par une équation différentielle entre cette fonction, & les variables, fur quoi je remar-

que, que l'équation étant du premier ordre; multipliant par le facteur qui la rend une différentielle exacte, intégrant par partie pour avoir les équations de condition, j'ai une équation (B) qui est $A\,\delta Z' + B\,\delta x + C\,\delta y + D\,\delta z$ &c. A, B, C, D, contiennent le facteur; cela posé, j'ai pour le *Problême* de *maximis* & *minimis*: 1°, l'équation donnée en Z, & les variables: 2°, les équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ &c., & supposant dans les dernières équations l'équation donnée, j'en élimine les différences partielles du facteur, j'élimine ensuite ce facteur lui même par les méthodes connuës, & j'ai un nombre d'équations égal à celui des variables pour celui des *Tautochrones*, puisque les δx, δy, δz doivent être données par une équation. $A'\,\delta x + B'\,\delta y + C'\,\delta z$ &c. $= 0$, répondant à l'équation cherchée $A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz \ldots = 0$, j'aurai toujours pour ce *Problême* l'équation donnée $A = 0$, & $B\,dx + C\,dy + D\,dz \ldots = 0$, d'où j'éliminerai le facteur de Z', & j'aurai l'équation cherchée entre les variables. Si l'équation est d'un ordre supérieur, je cherche les mêmes équations de condition pour celle du premier ordre qui y répond, & comme elles contiennent les facteurs dont on auroit besoin pour les rappeller à cet ordre, on les éliminera par l'équation qu'on a pour chaque facteur, afin que la proposée devienne une différentielle exacte de Z' & des variables, mais dont l'intégrale puisse contenir des intégrales indéfinies des fonctions de ces dernières.

Dans le *Problême* des *Tautochrones*, il faut que l'équation en Z' devienne possible après les substitutions, ce qui arrive naturellement dans celui des *maxima*; je n'entrerai dans aucun autre détail, parceque, ce que j'ai dit ci-dessus suffit.

Si Z' est donné par une équation qui contienne des différences partielles de Z', comme on peut regarder les dif-

férences comme des fonctions finies & inconnuës des variables, on aura également d'après ce que j'ai dit les équations de l'un & de l'autre *Problême*.

Si Z' est donné par une équation aux différences finies absoluës, j'ai pour le *Problême* de *maxima* les équations demandées, en égalant à zéro les coéficiens de $\delta Z'$, δx, $\delta y'$, δz . . . dans l'équation (B), mais pour celui des *Tautochrones*, je fais comme ci-dessus $A' dx + B' dy + C' dz = 0$, d'où $A' \delta x + B' \delta y + C' \delta z = 0$, substituant j'ai A', B', C', & supposant les différences infiniment petites l'équation $A'' = 0$, $B'' dx + C'' dy + D'' dz = 0$, A'', B'', C'', D'' étant ce que deviennent A, B, C, D, par cette supposition intégrant cette équation, il faut qu'elle soit telle, que mettant pour A', B', C', leur valeur finie, les équations $B' B - A' C = 0$, $C C' - A' D = 0$, $A = 0$, se trouvent avoir lieu.

Enfin soit Z' donné par une équation en x, y, z &c., & Z', Z'' donné par une pareille équation, & qu'on cherche les équations pour que Z''' donné en Z' & Z'', soit dans le cas d'un de nos *Problêmes*, on éliminera Z' & Z'' par les deux premières équations, & on traitera l'autre comme ci-dessus, cette dernière solution qui paroit n'être qu'une suite très-simple des précédentes donne celle des *Problêmes* que M. Euler a réuni sous le titre des *Methodus maximorum*, & *minimorum relativa*, & tous ceux de cette espèce qu'on voudra se proposer.

A Ribemont ce 12 Mai 1768.

EXEMPLES DES MÉTHODES

Précédentes pour l' intégration.

J'ai cherché à réunir ici dans quelques exemples d' intégrations particulières les différentes opérations qu'exige la méthode générale d' intégrer que je propose. Il y en a plusieurs dont je n' ai point fait mention parcequ'elles n'ont lieu que pour le troisiéme ordre, & que cet ordre demande une trop grande quantité de calculs, ou parcequ'on pourroit les employer pour résoudre les exemples que j' ai proposés, & que ces exemples une fois détaillés pour une manière de résoudre le *Problême* ne présentent aucune difficulté pour l' application des autres.

Exemple premier.

Soit l' équation

$$\overline{x + 2\,xy^2 - 2\,xy - 2\,x^2y}\,.\,dxd^2y$$
$$\overline{+ 4\,x^2y^2 - 2\,x^2}\;dy^3$$
$$\overline{+ 2\,xy - 2\,x + 4\,x^2y^2 - 4\,xy^3 + 4\,xy^2 - 2\,x^2}\,.\,dy^2dx$$
$$+ 2\,xy\;dydx^2$$
$$+ dx^3 \qquad = A\,d^2y + B = 0.$$

& que je cherche $A'd^2y + B'$ d' après ces conditions qu'elle soit la différentielle exacte d'une fonction du premier ordre & que $\frac{B'}{A'} = \frac{B}{A}$ en suivant le procédé du *Problême* premier je trouve $A' = \frac{A}{xdx^2 + 4\,x^2ydydx + 4\,x^3y^2dy^2}$ & par conséquent $B' = \frac{A'\,B}{A}$ ensuite par les procédés du *Problême second* $\frac{x + 2\,y^2x - 2\,xy - 2\,x^2y}{x + 4\,x^2yp + 4\,x^3y^2p^2}\,.\,dp\,\frac{+ 4xyp + 4\,x^2y^2p^2 - 2\,xp - 4\,x^2p^2 - 2x^2p}{x + 4\,x^2yp + 4\,x^3y\,p^2}$.

$$dy\,\frac{+1+4x^2y^2p^2+2xyp-2yp^2x-4y^3p^2x+4y^2p^2x}{x+4x^2yp+4x^3y^2p^2}.\,dx$$

rendant cette équation homogène comme je le propoſe *Obſervation II.* & faiſant diſparoitre le dénominateur les variables y monteront au ſixiéme dégré, l' intégrale ſe trouvera donc être une de celles des tables pour ce dégré, & ſera $\frac{lx+1+p-2yp+2y^2p}{1+2xyp}+N$, & cette fonction égalée à zéro donnera une des intégrales cherchées du premier ordre. Je cherche enſuite la ſeconde valeur de A' & je trouve $A' = A : \overline{x+y}\,dx^2 + \overline{x-2xy+6y^2+2x^2y}\,dydx + \overline{2x^2y-4x^2y^2+8x^2y^3}\,dy^2$ & par la même méthode du *Probléme ſecond* je trouve la fonction $\overline{x+2xy^2-2x^2y-2xy}\,dp + \overline{1+2xy+2y^2+10xyp-2xp-4x^2p-4xy^2p+4x^2y^2p+12xy^3p-2x^2p^2+12x^2y^2p^2-8x^2y^3p^2+16x^2y^4p^2}\,dy + \overline{1+p-2yp+2y^2}\,dx : \overline{x+y} + \overline{x-2xy+6y^2+2x^2y}\,p + \overline{2x^2y-4x^2y^2+8x^2y^3}\,.\,p^2$ la ſuppoſant homogène & multipliée par ſon dénominater elle ſe trouve monter au 8 dégré, ſon intégrale eſt donc parmi celles de ce dégré, & eſt $l\,\overline{y+x+xp-2xyp+4xy^2p} - l\,\overline{1+2xyp+y^2} + N'$, qui étant égalée à zéro donne la ſeconde intégrale de la propoſée, & mettant dans cette ſeconde intégrale la valeur de p priſe dans la première elle devient $ly + xlx + \overline{N-1+y^2} + N' = 0$ intégrale générale & finie de la propoſée.

Exemple second.

Soit l' équation $\overline{x + y + xy + x^2y + xy^2\ lx}\ dx +$ $\overline{x^2 + x^3 + xlx + x^2ylx}\ dy = 0$. Je pourrois en différentiant faire disparoitre lx, j'aurois alors une équation du second ordre. La proposée en donneroit une des intégrales, & trouvant l'autre comme ci-dessus j' aurois celle de la proposée ; mais puisque lx ne contient point de différentielles on peut employer la méthode suivante. Je cherche d'abord $A'\,dy + B\,dx$ fonction différentielle exacte de x & de y & telle que la proposée étant $A\,dy + B\,dx = 0$ $\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}$. Je trouve *Problême premier*, en supposant que lx entre de même que x & y dans les fonctions rationelles, $A' = \frac{A}{1 + x + ylx}$ ce qui me donne B' appellant maintenant $lx = z$ & $dx = xdz$ & supposant que $A'dy + B'dx + B''dx - B''xdz$ est une fonction différentielle exacte de x, y, z, je trouve $B'' = \frac{-y}{x + x^2 + xyz}$ & la fonction $\frac{ydz}{1 + x + yz} + \frac{1 + y + xy + y^2z}{1 + x + yz}\,dx + \frac{x + x^2 + z + xyz}{1 + x + yz}\,dy$ qui étant intégrée donne $lx + yz + 1 + xy + N$, & par conséquent l' intégrale cherchée de la proposée est $\overline{lx + ylx + 1} + xy + N = 0$.

Exemple troisiéme.

Soit l' équation $\overline{dx + 6\,ydx + 9\,xdx}\,.\,d^2y + 4\,dy^3 + 16\,dxdy^2 + 21\,dx^2dy + 9\,dx^3 = 0$. Conservant les mêmes dénominations & suivant les mêmes procédés que pour les exemples précédens je trouve

$A' = \frac{'A}{4\,dy^2 + 12\,dxdy + 9\,dx^2}$ cherchant une autre valeur de A' elle se trouve $\frac{\overline{dx + dy + 5\,xdy + 2\,ydy + 3\,xdx}\,.\,A}{8\,dy^3 + 36\,dxdy^2 + 54\,dx^2dy + 27\,dx^3}$ la première valeur me donne $\frac{\overline{1 + 6y + 9x}\,dp + \overline{4p^2 + 6p}\,dy + \overline{10p^2 + 21p + 9}\,dx}{4p^2 + 12p + 9}$ & la seconde est $\frac{\overline{1 + p + 5\,xp + 2\,yp + 3\,x}}{8\,p^3 + 36\,p^2 + 54\,p + 27}\;\overline{1 + 6y + 9x}\,dp + \overline{4\,p^2 + 6\,p}\,dy + \overline{10\,p + 21\,p + 9}\,dx$ donc ces deux fonctions égalées à zéro donnent une même équation en x, y, p, donc elles ont une intégrale algébrique, donc divisant l'une par l'autre & égalant à N le quotient on aura une des intégrales de la proposée donc ici $\frac{dx + dy + 5\,xdy + 2\,ydy + 3\,xdx}{2\,dy + 3\,dx} + N = 0$ est une des intégrales de la proposée : la mettant sous la forme $A\,dy + B\,dx$ je trouve que $A' = \frac{A}{x + y + N}$, & que l'intégrale finie est $l\overline{y + x + N} + 2\,y + 3\,x + N' = 0$. On trouve par cette méthode le moyen de connoître en général si deux valeurs de A' répondent à la même intégrale algébrique & de trouver cette intégrale sans avoir a vérifier aucune équation, ce qui est beaucoup plus avantageux que ce que j'avois proposé dans la remarque N.° 1 ; on peut appliquer le procédé que je viens d'employer dans cet exemple aux cas dont j'ai parlé dans la première observation, avec un succés égal.

Exemple quatriéme.

Soit l'équation $\overline{dx - 2xdx - 2xdy}\;\overline{ddy}^2 + \overline{2dx^3 - dydx^2 + x + y\,dy - 3dx - x + y^2dx}\;dx^2\,d^2y + \overline{dy^2 - dxdy - ydydx - xdydx + ydx^2 + xdx^2 - 2dx^2}\,.\,\overline{2dx - dy + xdx + ydx}\;d^2y + dx^5 + dydx^4 + xdydx^4 + ydydx^4 - ydx^5 - xdx^5 + \overline{dy^2 - dydx - ydydx - xdydx + ydx^2 + xdx^2 - 2dx^2}\;\overline{dy^2 - 2dxdy - 2dx^2 - ydxdy - xdydx} = 0$.

Je prends $A'd^2y + B'$ fonction différentielle exacte & suivant pour ce cas les procédés du *Problême premier* j'ai

$$z^2 = 4x + 4y - 2x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} - 4 - \frac{4dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} + \overline{x+y}^2$$

$$A' = 1 + \frac{\dfrac{dz}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}}{\frac{dy}{dx} + x + y + z}$$

& l'intégrale de $A'\,d^2y + B'$ sera après avoir rendu cette fonction différentielle exacte de x, y, p, & z. $l\,\overline{p + x + y + z} - x + N' = 0$ la seconde valeur de A' trouvée par la même méthode sera

$$\frac{1 + \frac{dz}{dp} - p - z - p\frac{dz}{dp} - z\frac{dz}{dp}}{p + z}$$

& la seconde intégrale

$\overline{l\, p + z} - 2x - p - z + N' = 0$. Tirant de la première la valeur de p & la ſubſtituant dans la ſeconde on aura l' intégrale finie & complette ; il eſt aiſé de voir qu'au lieu de ces deux intégrales on pouroit avoir la ſeconde & une troiſiéme $\overline{l\, p^2 + 2pz + z^2 + xp + yp}$ $\overline{+ xz + yz} - 3x - p - z + N'' = 0$; or on ne peut tirer la valeur de p d'aucune des deux ; pour avoir donc une équation où cela ſoit poſſible on les ajoutera enſemble en en multipliant une par m quantité conſtante & on aura

$$\overline{l\, p^2 + 2pz + z^2 + xp + yp + xz + yz} + m\, l\, p$$
$$+ z - 3x - p - z - 2mx - mp - mz + N''' = 0$$

équation d' où on peut tirer une valeur de p en faiſant $m = -1$.

Je crois que ces exemples ſuffiſent pour donner une idée de la manière d' employer la méthode générale, & que quelques uns d' entre eux échappent aux méthodes connuës juſqu' ici.

SOLUTION

D'un Problême d'Arithmétique

PAR M. DE LA GRANGE.

Le Problême que j'entreprends de réſoudre dans ce Mémoire eſt celui-ci : *Etant donné un nombre quelconque entier & non carré trouver un nombre entier & carré, tel que le produit de ces deux nombres augmenté d'une unité ſoit un nombre carré.* Ce Problême eſt un de ceux que M. Fermat avoit propoſés, comme une eſpèce de défis, à tous les Géomètres Anglois, & particuliérement à M. Wallis, qui a été le ſeul, que je ſâche, qui l'ait réſolu, ou au moins qui en ait publié la ſolution (Voyez le Chapitre XCVIII de ſon *Algèbre* & les Lettres XVII & XIX de ſon *Commercium Epiſtolicum*); mais la méthode de ce ſavant Géomètre ne conſiſte que dans une eſpèce de tatonnement, par lequel on n'arrive au but que d'une manière aſſés incertaine, & ſans ſavoir même ſi on y arrivera; d'ailleurs il faut démontrer ſurtout que la ſolution du *Problême* eſt toujours poſſible quel que ſoit le nombre donné, propoſition qui eſt généralement regardée comme vraie, mais qui n'a pas encore été établie, que je ſache, d'une manière ſolide & rigoureuſe; il eſt vrai que M. Wallis a prétendu la prouver, mais par un raiſonnement que les Mathématiciens trouveront bien peu ſatisfaiſant, & qui n'eſt, ce me ſemble, dans le fond qu'une eſpèce de pétition de principe (Voyez le Chap. XIX. de ſon *Algèbre*). Il s'enſuit delà que le *Problême* dont il s'agit n'a pas encore été réſolu d'une manière ſuffiſante, & qui ne laiſſe rien à déſirer; c'eſt ce qui m'a déterminé à en

faire l' objet de mes *Recherches*, d' autant plus que solution de ce *Probléme* est comme la clef de tous les autres *Problémes* de ce genre.

1. Soit a le nombre donné non carré, y^2 le carré cherché & x^2 un autre quarré quelconque, la question se réduit à satisfaire à cette équation $a y^2 + 1 = x^2$, en ne prenant pour x & y que des nombres entiers; ainsi il s'agit de trouver deux nombres entiers x & y tels que $x^2 - a y^2 = 1$.

Qu'on tire la racine carrée de a par approximation, & l' on aura une fraction décimale qu'on pourra changer, par les méthodes connuës, en une fraction continuë, laquelle ira nécessairement à l' infini, à cause que $\sqrt{a}$ est une quantité irrationelle par l' hipothèse.

Pour cela il n' y aura qu'à diviser d'abord le numérateur de la fraction trouvée par son dénominateur, ensuite le dénominateur par le reste, & ainsi de suite, en pratiquant la même opération, par laquelle on cherche la plus grande commune mesure de deux nombres, & nommant q, q', q'', q''' &c. les quotiens qui résultent de ces différentes divisions, on aura

$$\sqrt{a} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \&c.}}}$$

Or cette fraction continuë étant interrompuë successivement au premier terme, au second, au troisième &c. donnera une infinité de fractions particulières que je désignerai par $\frac{m}{n}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{M'}{N'}$ &c., auxquelles ajoutant la fraction $\frac{1}{0}$, on aura cette suite infinie de fractions

$$\frac{1}{0},\ \frac{m}{n},\ \frac{M}{N},\ \frac{m'}{n'},\ \frac{M'}{N'},\ \frac{m''}{n''},\ \frac{M''}{N''},\ \frac{m'''}{n'''},\ \frac{M'''}{N'''}\ \&c.$$

qui seront telles que

$$
\begin{array}{llll}
m = q & & n = 1 & \\
M = q' & m + 1 & N = q' & n \\
m' = q'' & M + m & n' = q'' & N + n \\
M' = q''' & m' + M & N' = q''' & n' + N \\
m'' = q^{IV} & M' + m' & n'' = q^{IV} & N' + n' \\
M'' = q^{V} & m'' + M' & N'' = q^{V} & n'' + N' \\
\&c. & & \&c. &
\end{array}
$$

Ces ſortes de fractions ont pluſieurs propriétés qui ſont connuës depuis long-tems des Géomètres, mais que nous croyons devoir rappeller ici en peu de mots, parceque nous en ferons un grand uſage dans la ſuite.

1° Les numérateurs 1, m, M, m', M' &c. forment une ſérie qui va continuellement en augmentant; & il en eſt de même des dénominateurs 0, n, N, n', N' &c.

2° Les fractions $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ &c. ſont toutes plus petites que la valeur de la fraction continuë d' où elles réſultent, valeur qui dans notre cas eſt $\sqrt{a}$, mais elles s'en approchent toujours de plus en plus. Au contraire les fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{M''}{N''}$ &c. ſont toutes plus grandes que la même valeur, vers laquelle elles ſont auſſi conſtamment convergentes. Et chacune de ces fractions en particulier, ſoit qu'elle ſoit plus grande ou plus petite que $\sqrt{a}$ approche davantage de cette quantité que ne fait aucune des fractions précédentes, ni que pourroit faire aucune autre fraction quelconque dont le dénominateur feroit plus petit.

3° Si on multiplie en croix toutes les fractions voiſines, & qu'on retranche les produits l'un de l'autre, on aura dans toute l' étenduë de la ſérie

$$
\begin{aligned}
1n - 0m &= 1 \\
Mn - Nm &= 1 \\
Mn' - Nm' &= 1
\end{aligned}
$$

$$M' n' - N' m' = 1$$
$$M'' n'' - N' m'' = 1$$
&c.

d' où l'on voit que les nombres m, n, M, N, m', n' &c. ne peuvent avoir d'autre diviſeur commun que l' unité ; & qu'ainſi les fractions dont il s'agit ſont toutes réduites à leurs moindres termes.

2 Cela poſé, puiſque $\sqrt{a} < \frac{M}{N}$ & $> \frac{m'}{n'}$, ſi on fait $\sqrt{a} = \frac{M - \Delta}{N}$, on aura $\Delta > 0$, & $\frac{M - \Delta}{N} > \frac{m'}{n'}$; donc $\frac{\Delta}{N} < \frac{M}{N} - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{Nn'}$ (à cauſe de $Mn' - Nm' = 1$); donc $\Delta < \frac{1}{n'}$, & comme $n' > N$, on aura à plus forte raiſon $\Delta < \frac{1}{N}$. En ſuppoſant de même $\sqrt{a} = \frac{M' - \Delta'}{N} = \frac{M'' - \Delta''}{N''}$ &c. on prouvera que $\Delta' > 0$ & $< \frac{1}{N'}$, $\Delta'' > 0$ & $< \frac{1}{N''}$ &c.

Pareillement, à cauſe de $\sqrt{a} > \frac{m}{n}$ & $< \frac{M}{N}$, ſi on fait $\sqrt{a} = \frac{m + \delta}{n}$ on aura $\delta > 0$ & $\frac{\delta}{n} < \frac{M}{N} - \frac{m}{n} < \frac{1}{Nn}$; donc auſſi, à cauſe de $N > n$, $\delta < \frac{1}{n}$; & l'on prouvera de la même manière qu'en faiſant $\sqrt{a} = \frac{m' + \delta'}{n} = \frac{m'' + \delta''}{n''}$ &c. on aura $\delta' > 0$ & $< \frac{1}{n'}$, $\delta'' > 0$ & $< \frac{1}{n''}$ &c.

Conſidérons maintenant la formule $x^2 - a y^2$, & ſubſtituons ſucceſſivement dans cette formule les nombres

M, M', M'' &c. à la place de x, & les nombres correſpondans N, N' N'' &c. à la place de y, en nommant Z, Z', Z'' &c. les quantités qui en réſultent; nous aurons d'abord $M^2 - a N^2 = Z$, mais $a = (\frac{M - \Delta}{N})^2$, donc $Z = 2 M \Delta - \Delta^2$; donc puiſque $\Delta > 0$ & $<$ $\frac{1}{N}$ ſera auſſi > 0 & $< \frac{2 M}{N}$; on aura de même $Z' = M'^2 - a N'^2 = 2 M' \Delta - \Delta'^2$, & par conſéquent $Z' > 0$ & $< \frac{2 M'}{N'}$; & l'on prouvera de la même manière que $Z'' = M''^2 - a N''^2 > 0$ & $< \frac{2 M''}{N''}$ & ainſi de ſuite. Mais les fractions $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{M''}{N''}$ &c. forment une ſuite décroiſſante & convergente vers $\sqrt{a}$; donc les nombres Z, Z', Z'' &c. qui réſultent de la ſubſtitution de M, M', M'' &c. à la place de x & de N, N', N'' &c. à la place de y dans la formule $x^2 - a y^2$, & qui ſont par conſéquent tous entiers, ſeront auſſi néceſſairement tous poſitifs & moindres que $\frac{2M}{N}$. Or ces nombres Z, Z', Z'' &c. ſont en nombre infini, parce-que le nombre des fractions $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{M''}{N''}$ eſt infini; donc puiſque il n'y a qu'un nombre fini de nombres entiers poſitifs, & moindre qu'un nombre donné, il faudra néceſſairement qu'une infinité de ces nombres Z, Z', Z'' &c. ſoient égaux entr'eux.

Ainſi on aura par ce moyen une infinité de nombres différens à ſubſtituer au lieu de x & de y dans la formule $x^2 - a y^2$, de manière qu'elle eſt toujours une même valeur poſitive, & moindre que $\frac{2M}{N}$.

Si au lieu de substituer à la place de x & de y les nombres M, M', M'' &c. & N, N', N'' &c., on y substituoit les nombres m, m', m'' &c. & n, n', n'' &c., & qu'on nommât z, z', z'' &c. les valeurs résultantes de $x^2 - ay^2$ on auroit $z = m^2 - an^2 =$ [en mettant $(\frac{m+\delta}{n})^2$ à la place de a] $- 2m\delta - \delta^2$, d'où l'on voit que z sera négatif, & qu'à cause de $\delta < \frac{1}{n}$, on aura $-z < \frac{2m}{n} + 1$. On trouvera de même $z' = 2m\delta' - \delta'^2$, & par conséquent $z' < 0$ & $-z' < \frac{2m'}{n'} + 1$; & ainsi de suite à l'infini.

D'où l'on conclura comme ci-dessus, qu'il y a nécessairement une infinité de ces nombres m, m', m'' &c. & n, n', n'' &c. qui étant substitués à la place de x & de y dans la formule $x^2 - ay^2$ la rendront égale à un même nombre entier négatif, & compris entre 0 & $- \frac{2m}{n} - 1$.

4 Nous dénoterons en général par x, x', x'', x''' &c., & par y, y', y'', y''' &c.; tous les nombres qui étant substitués dans la formule $x^2 - ay^2$ la rendent égale à un même nombre quelconque entier positif ou négatif, que nous appellerons R; ensorte que l'on ait les équations $x^2 - ay^2 = R$, $x'^2 - ay'^2 = R$, $x''^2 - ay''^2 = R$, $x'''^2 - ay'''^2 = R$ &c., dont le nombre sera infini.

5. *Lemme.* Le produit de ces deux quantités $x^2 - ay^2$ & $x'^2 - ay'^2$ est $(xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2$; car $(x^2 - ay^2)(x'^2 - ay'^2) = x^2x'^2 + a^2y^2y'^2 - ay^2x'^2 - ax^2y'^2 = x^2x'^2 \pm 2axx'yy' + a^2y^2y'^2 - ax^2y'^2 \mp 2axyx'y' - ay^2x'^2 = (xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2$.

D'où l'on voit que le produit de deux quantités de cette forme $x^2 - a y^2$, a étant une quantité donnée, eſt toujours auſſi de la même forme ; & qu'ainſi le produit d'autant des quantités de cette forme qu'on voudra ſera encore de la même forme.

Donc on aura $(x^2 - a y^2)^2 = (x^2 + a y^2)^2 - a(2xy)^2$, $(x^2 - a y^2)^3 = (x^3 + 3axy^2)^2 - a(3x^2y + ay^3)^2$; & ainſi des autres.

6 Suppoſons d'abord que R & a ſoient premiers entr'eux, & multipliant enſemble deux quelconques des équations de l'*Art.* 4, on aura (*Lemme*)

$$R^2 = (xx' + ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2 \ldots (A).$$

De plus les mêmes équations donneront celle-ci : $R(y'^2 - y^2) = x^2y'^2$, ſavoir, à cauſe de $x^2y'^2 - y^2x'^2 = (xy' + yx')(xy' - yx')$

$$R(y'^2 - y^2) = (xy' + yx')(xy' - yx') \ldots (B).$$

Or ſoit 1° R un nombre premier quelconque ; il faudra, en vertu de l'équation (B), que $xy' + yx'$ ou $xy' - yx'$ ſoit diviſible par R ; ſoit donc $xy' \pm yx' = qR$, & l'équation (A) deviendra $R^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2R^2$; d'où l'on voit que $(xx' \pm ayy')^2$ eſt diviſible par R^2, & que par conſéquent $xx' \pm ayy'$ eſt diviſible par R ; donc faiſant $xx' \pm ayy' = pR$, & diviſant enſuite toute l'équation par R^2 on aura

$$1 = p^2 - aq^2.$$

7. Soit 2° $R = AB$, A & B étant des nombres premiers, il faudra en vertu de l'équation (B), que $xy' + yx'$ ou $xy' - yx'$ ſoit diviſible par R ou bien que l'une de ces deux quantités ſoit diviſible par A & l'autre par B.

Le premier cas rentre évidemment dans celui de l'*Art. précédent*, & donne par conſéquent le même réſultat.

Dans le ſecond cas on aura $xy' \pm yx' = qB$, q n'étant point diviſible par A ; & l'équation (A) deviendra $A^2B^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2B^2$; de ſorte que xx'

$\pm\, a y y'$ ſera auſſi diviſible par B ; donc faiſant $x x' \pm a y y' = p B$, & diviſant toute l'équation par B^2 , on aura

$$A^2 = p^2 - a q^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C).$$

Or comme q n'eſt pas diviſible par A, & que a ne l'eſt pas non plus (*hip.*) p ne le ſera pas, de ſorte que A, p & q ſeront premiers entr'eux.

Qu'on prenne maintenant une autre quelconque des équations de l'*Art.* 4., comme $R = x''^2 - a y''^2$, & qu'on la combine avec l'équation $R = x^2 - a y^2$, en opérant ſur ces deux équations, comme nous venons de faire ſur les équations $R = x^2$ & $- a y^2$ $R = x'^2 - a y'^2$; on aura des réſultats analogues aux précédens, dont on tirera par conſéquent des concluſions ſemblables. Ainſi il faudra que l'une ou l'autre de ces quantités $x y'' + y x''$, $x y'' - y x''$ ſoit diviſible par R, ce qui ſe réduit au cas de l'*Art.* 6.; ou bien que l'une le ſoit par A, l'autre par B. Donc faiſant dans ce dernier cas $x y'' \pm y x'' = q' B$, & enſuite $x x'' \pm a y y'' = p' B$, on parviendra de même à l'équation

$$A^2 = p'^2 - a q'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (D)$$

dans laquelle A, p' & q' ſeront auſſi premiers entr'eux.

Or les deux équations (C) & (D) donneront ces deux-ci

$$A^4 = (p p' \pm a q q')^2 - a (p q' \pm q p')^2 \quad . \; . \quad (E)$$

$$A^2 (q'^2 - q^2) = (p q' + q p') (p q' - q p' \quad . \; . \; . \; (F).$$

Ainſi, à cauſe que A eſt un nombre premier, il faudra, en vertu de l'équation (F), que l'une ou l'autre des quantités $p q' + q p'$, $p q' - q p'$ ſoit diviſible par A^2, ou bien que l'une & l'autre ſoient diviſibles en même tems par A; mais alors il faudroit auſſi que leur ſomme $2 p q'$ fût diviſible par A, ce qui ne peut être (à cauſe que ni p, ni q' n'eſt diviſible par A) à moins que A ne ſoit $= 2$.

Suppoſons

Supposons d'abord que A soit différent de 2, & l'on aura nécessairement $p q' \pm a q p' = s A^2$, ce qui réduit l'équation (E) à celle-ci: $A^4 = (p p' \pm a q q')^2 - a s^2 A^4$, par laquelle on voit que $p p' \pm a q q'$ doit aussi être divisible par A^2; de manière qu'on aura $p p' \pm a q q' = r A^2$; & par conséquent en divisant toute l'équation par A^4

$$1 = r^2 - a s^2$$

Si A étoit $= 2$, alors comme q & q' sont premiers à A, ils seroient tous deux impairs; par conséquent leurs carrés seroient chacun un multiple de 8 augmenté d'une unité; de sorte que la différence de ces carrés seroit nécessairement un multiple de 8; on auroit donc $q'^2 - q^2 = 8m$, & l'équation (F) deviendroit, à cause de $A = 2$, $32m = (p q' + q p')(p q' - q p')$; ainsi il faudroit nécessairement que l'une ou l'autre des quantités $p q' + q p'$, $p q' - q p'$ fût divisible par 4, c'est-à-dire par A^2 comme dans le cas précédent.

8 Soit 3° $R = A B C$. A, B, C étant des nombres premiers; donc il faudra, en vertu de l'équation (B) que l'une ou l'autre des quantités $x y' + y x'$, $x y' - y x'$ soit divisible par R, ce qui rentre dans le cas de l'*Art.* 6; ou bien que l'une soit divisible par A, & l'autre par $B C$. Soit donc $x y' \pm y x' = q B C$, & l'équation (A) deviendra $A^2 B^2 C^2 = (x x' \pm a y y')^2 - a q^2 B^2 C^2$; de sorte qu'il faudra aussi que $x x' \pm a y y'$ soit divisible par $B C$; donc faisant $x x' \pm a y y' = p B C$, & divisant toute l'équation par $B^2 C^2$ on aura $A^2 = p^2 - a q^2$.

Si on combine de même l'équation $R = x^2 - a y^2$ avec l'équation $R = x''^2 - a y''^2$ (*Art.* 4), & que ni l'une, ni l'autre des quantités $x y'' + y x''$, $x y'' - y x''$ ne soit divisible par R, on parviendra par la même méthode à une équation de cette forme $k^2 = p^2 - a q'^2$, k étant l'un des facteurs de R. Donc si $k = A$ on aura deux équations qu'on traitera comme on a fait ci-dessus

les équations (C) & (D) Si $k = B$, on combinera les équations $R = x'^2 - a y'^2$ & $R = x''^2 - a y''^2$, & si cette combinaison ne donne pas le cas de l'*Art.* 6 elle donnera nécessairement une équation de cette forme $k'^2 = p''^2 - a q''^2$, k' étant l'un des trois facteurs de R.

Donc si $k' = A$ ou $= B$, on aura deux équations analogues aux équations (C) & (D); mais si $k' = C$ il faudra prendre une quatrième équation telle que $R = x'''^2 - a y'''^2$, & la combiner avec quelqu'une des précédentes pour avoir ou le cas de l'*Art.* 6, ou au moins une nouvelle équation de cette forme $k''^2 = p''^2 - a q'''^2$, k'' étant égal à A ou à B, ou à C; ainsi quelque soit k'' on aura nécessairement deux équations analogues aux équations (C) & (D), par lesquelles on pourra résoudre le *Problême* (*Art.* 7).

En général il est évident, par tout ce que nous avons démontré jusqu' ici, qu'en multipliant ensemble deux quelconques des équations de l'*Art.* 4, on aura nécessairement ou une équation de cette forme $1 = p^2 - a q^2$ comme dans l'*Art.* 6, ou au moins une équation de cette autre forme $k^2 = p^2 - a q^2$; k étant l'un des trois facteurs de R. Donc si on prend quatre des équations de l'*Art.* 4, & qu'on en forme quatre produits différens, on parviendra nécessairement à l' équation $1 = p^2 - a q^2$, ou au moins à deux équations de la forme $k^2 = p^2 - a q^2$, $k^2 = p'^2 - a q'^2$; qu'on traitera ensuite comme on a fait plus haut les équations (C) & (D).

9. Soit 4° $R = ABCD$, A, B, C, D étant des nombres premiers, il faudra en vertu de l' équation (B) que l'une ou l'autre des quantités $xy' + yx'$, $xy' - yx'$ soit divisible par R; ou que l'une soit divisible seulement par BCD, & l'autre par A; ou enfin que l'une le soit seulement par CD, & l'autre par AB; ce qui donne trois cas différens.

Dans le premier cas on aura d'abord, comme dans l'*Art.* 6, $1 = p^2 - a q^2$.

Dans le fecond cas on aura, comme dans l'*Art.* 7, en mettant BCD au lieu de B, $A^2 = p^2 - a q^2$.

Dans le troifième cas on fera $xy' \pm yx' = qCD$, & l'équation (A) deviendra $A^2 B^2 C^2 D^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2 C^2 D^2$; de forte qu'on aura auffi $xx' \pm ayy' = pCD$; & par conféquent en divifant toute l'équation par $C^2 D^2$, $A^2 B^2 = p^2 - a q^2$.

Qu'on prenne donc cinq des équations de l'*Art.* 4, & qu'on les multiplie enfemble deux à deux pour avoir fept produits différens (on pourroit à la vérité en avoir dix, mais il fuffit ici d'en confidérer fept), l'on aura néceffairement par ce moyen ou une équation de cette forme $1 = p^2 - a q^2$, laquelle réfoud le *Problême*; ou au moins deux équations de cette forme $A^2 = p^2 - a q^2$, $A^2 = p'^2 - a q'^2$, (A étant l'un quelconque des facteurs de R) & le *Problême* fe réfoudra comme dans l'*Art.* 7; ou enfin deux équations de la forme $A^2 B^2 = p^2 - a q^2$, $A^2 B^2 = p'^2 - a q'^2$; (A & B étant deux quelconques des quatre facteurs de R); & dans ce dernier cas on prouvera aifément que les quatre quantités p, q, p' & q' feront premières à A & B.

Or les équations $A^2 B^2 = p^2 - a q^2$, & $A^2 B^2 = p'^2 - a q'^2$ donnent ces deux-ci

$$A^4 B^4 = (pp' \pm aqq')^2 - a(pq' \pm qp')^2 \ldots. (G)$$

$$A^2 B^2 (q'^2 - q^2) = (pq' + qp')(pq' - qp') \ldots (H).$$

Et il faudra, en vertu de l'équation (H), que l'une ou l'autre des quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ foit divifible par $A^2 B^2$; ou que l'une le foit feulement par A ou par B, & l'autre par AB^2 ou par $A^2 B$, ou que l'une & l'autre le foient par AB; ou enfin que l'une le foit feulement par A^2, & l'autre par B^2; ce qui donne, comme l'on voit, quatre cas différens.

Dans le premier cas on fera $p q' \pm q p' = s A^2 B^2$, & l'équation ($G$) deviendra $A^4 B^4 = (p p' \pm a q q')^2 - a s^2 A^4 B^4$; donc on aura auſſi $p p' \pm a q q' = r A^2 B^2$, & diviſant toute l'équation par $A^4 B^4$, on aura

$$1 = r^2 - a s^2.$$

A l'égard du ſecond cas il eſt clair que ſi les deux quantités $p q' + q p'$, $p q' - q p'$ étoient diviſibles en même tems par A ou par B, il faudroit que leur ſomme $2 p q'$ le fût auſſi, ce qui ne peut être (à cauſe que p & q' ſont premier à A & B) à moins que l'on n'ait A ou $B = 2$; mais alors q & q' feroient néceſſairement impairs, ce qui donneroit $q'^2 - q^2 = 8 m$; de ſorte que l'équation (H) deviendroit (en ſuppoſant $B = 2$) $32 m A^2 = (p q' + q p') (p q' - q p')$; donc, puiſque l'une des deux quantités $p q' + q p'$, $p q' - q p'$ eſt ſuppoſée diviſible ſeulement par B, il faudra que l'autre le ſoit par $16 A^2$, & par conſéquent auſſi par $A^2 B^2$; ce qui ſe réduit au premier cas.

Le troiſième cas ne peut point avoir lieu du tout, à cauſe que la ſomme des quantités $p q' + q p'$, $p q' - q p'$ n'étant point diviſible par $A B$, il eſt impoſſible que chacune de ces quantités le ſoit.

Reſte le quatrième cas, dans lequel on aura $p q' \pm q p' = s B^2$, s n'étant point diviſible par A; on aura donc dans ce cas, au lieu de l'équation (G), celle-ci: $A^4 B^4 = (p p' \pm a q q')^2 - a s^2 B^4$; par conſéquent on aura auſſi $p p' \pm a q q' = r B^2$; & diviſant toute l'équation par B^4, on aura $A^4 = r^2 - a s^2$; & comme s & a ne ſont point diviſibles par A, r ne le ſera pas non plus; de ſorte que r & s ſeront premiers à A.

Ayant l'équation $A^4 = r^2 - a s^2$, il faudra encore en avoir une autre ſemblable pour pouvoir réſoudre le *Problême*. Pour la trouver on continuera à multiplier enſemble deux à deux les autres équations de l'*Art.* 4,

& il eſt facile de voir par ce que nous venons de montrer, que ſi ces combinaiſons ne donnent pas quelques uns des cas qui ont déjà été réſolus, elles donneront néceſſairement à la fin deux équations de cette forme $A^4 = r^2 - a s^2$, $A^4 = r'^2 - a s'^2$, A étant l'un des quatre facteurs de R & r, s, r' & s' étant premiers à A.

En effet puiſque le nombre des équations de l'*Art.* 4 eſt infini, & que le nombre des cas qui peuvent arriver eſt limité, il eſt évident que le même cas devra arriver une infinité de fois; de ſorte que ſi l'on ne trouve pas quelques uns des cas que nous avons déjà réſolus, on trouvera néceſſairement deux, & même une infinité de cas tels, que $A^4 = r^2 - a s^2$, & $A^4 = r'^2 - a s'^2$; mais il ſuffira d'en avoir deux, pour que le *Problême* ſoit réſoluble.

On aura donc par le moyen des deux équations dont il s'agit

$$A^8 = (r r' \pm a s s')^2 - a (r s' \pm s r')^2 \ldots\ldots (I)$$
$$A^4 (s'^2 - s^2) = (r s' + s r')(r s' - s r') \ldots (K).$$

Donc il faudra, en vertu de l'équation (K), que l'une ou l'autre des quantités $r s' + s r'$, $r s' - s r'$ ſoit diviſible par A^4; ou, que toutes les deux ſoient diviſibles à la fois par A; mais, dans ce dernier cas, il faudra auſſi que leur ſomme $2 r s'$ ſoit diviſible par A, ce qui ne peut être à moins que A ne ſoit $= 2$. Or ſuppoſant $A = 2$ on aura $s'^2 - s^2 = 8 m$, ce qui réduira l'équation (K) à $2^7 m = (r s' + s r')(r s' - s r')$ d'où l'on voit que ſi l'une des quantités $r s' + s r'$, $r s' - s r'$ eſt diviſible ſeulement par A, l'autre le ſera néceſſairement par A^6, & par conſéquent auſſi par A^4.

Le cas où $r s' + s r'$ & $r s' - s r'$ ſeroient toutes deux diviſibles par A^2 ne ſauroit avoir lieu, à cauſe que leur ſomme $2 r s'$ ne peut jamais être diviſible par A^2; de ſorte qu'il ne reſtera que le cas, ou l'une ou l'autre de ces

quantités sera divisible par A^4; ainsi on aura toujours $r s' \pm s r' = u A^4$; ce qui réduira l'équation (I) à celle-ci : $A^8 = (r r' \pm a s s')^2 - a u^2 A^8$, par laquelle on voit que $r r' \pm a s s'$ sera aussi divisible par A^4. Faisant donc $r r' \pm a s s' = t A^4$, & divisant toute l'équation par A^8, on aura

$$1 = t^2 - a u^2.$$

9 On voit par-là comment il faudroit s'y prendre si le nombre R étoit composé de cinq nombres premiers, ou d'autant de nombres premiers qu'on voudroit; & on voit en même tems, que pourvu que a & R soient premiers entr'eux, on parviendra toujours à une équation de cette forme $1 = x^2 - a y^2$ qui contient la solution du *Problême proposé*; la difficulté ne consistera que dans la longueur du calcul; mais on pourra souvent l'abréger par les considérations suivantes.

10 Si le nombre R étoit une puissance quelconque d'un nombre premier, il ne seroit pas nécessaire de le regarder comme le produit d'autant de nombre premiers qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance donnée.

Car soit $R = A^n$, A étant premier, & différent de 2, je dis qu'il faudra, en vertu de l'équation (B), que l'une ou l'autre des quantités $x y' + y x'$, $x y' - y x'$ soit divisible par A^n; en effet si l'une de ces quantités étoit divisible seulement par une puissance de A moindre que A^n, il faudroit que l'autre fût divisible par le complement de cette puissance; de sorte que les deux quantités dont il s'agit seroient divisibles en même tems par A; par conséquent leur somme $2 x y'$ le seroit aussi; donc, à cause de A premier & différent de 2, il faudroit que x ou y' fût divisible par A; mais si x étoit divisible par A, il faudroit, en vertu de l'équation $A^n = x^2 - a y^2$, que y le fût aussi, a étant (par hipothèse) premier à A; ainsi x & y ne seroient pas premiers entr'eux.

Ce qui repugne à la nature de ces quantités (*Art.* 1); on prouvera de même par l'équation $A^n = x'^2 - a y'^2$ que y' ne sauroit être divisible par A. Donc il faudra nécessairement que l'on ait $x y' \pm y x' = q A^n$, ce qui réduira l'équation (A) à $A^{2n} = (x x' \pm a y y')^2 - a q^2 A^{2n}$, par laquelle on voit que $x x' \pm a y y'$ sera aussi divisible par A^n; ainsi faisant $x x' \pm a y y' = p A^n$, & divisant l'équation par A^{2n}, on aura sur le champ

$$1 = p^2 - a q^2.$$

Si A étoit $= 2$, alors, puisque y & y' ne sont pas divisibles par A, ils seront nécessairement impairs; de sorte qu'on auroit $y'^2 - y^2 = 8 m$, & l'équation (B) deviendroit $2^{n+3} m = (x y' + y x')(x y' - y x')$; or les quantités $x y' + y x'$, $x y' - y x'$ ne peuvent être divisible en même tems par 4, parcequ'il faudroit que leur somme $2 x y'$ le fût aussi, & que par conséquent x ou y' fût divisible 2, ce qui ne se peut. Donc il faudra nécessairement que l'une de ces quantités soit divisible par 2^{n+2}, & par conséquent aussi par A^n; donc &c.

On pourra abreger & simplifier de la même manière l'analise des cas où R sera $= A^m B^n C^r \ldots A, B, C$ &c. étant des nombres premiers.

Si l'on avoit ces trois équations $R = x^2 - a y^2$, $R' = x'^2 - a y'^2$, & $R'' = x''^2 - a y''^2$, & que R & R' fussent des nombres premiers quelconques, & $R'' = RR'$; on pourroit aussi par leur moyen résoudre le *Problême.*

Car les équations $x^2 - a y^2 = R$, & $x''^2 - a y''^2 = R R'$ donneront ces deux-ci:

$$R^2 R' = (x x'' \pm a y y'')^2 - a (x y'' \pm y x'')^2 \ldots (L)$$

$$R (y''^2 - R' y^2) = (x y'' + y x'')(x y'' - y x'') \ldots (M);$$

donc, à cause que R est premier, il faudra, en vertu de l'équation (M), que l'une ou l'autre des quantités $x y'' + y x''$, $x y'' - y x''$ soit divisible par R; donc faisant $x y'' \pm y x'' = q R$, l'équation (L) deviendra

$R^2 R' = (x x'' \pm a y y'')^2 - a q^2 R^2$, d'où l'on voit que $x x'' \pm a y y''$ sera aussi nécessairement divisible par R, de sorte qu'en faisant $x x'' \pm a y y'' = p R$, on aura en divisant par R^2, $R' = p^2 - a q^2$; & il ne s'agira plus que de combiner cette équation avec l'équation $R' = x'^2 - a y'^2$ suivant la méthode de l'*Art.* 6.

On pourroit traiter de la même manière les cas où l'on auroit $x^2 - a y^2 = R$, $x'^2 - a y'^2 = R'$, $x''^2 - a y''^2 = R''$, & $x'''^2 - a y'''^2 = R R' R''$, R, R', R'' étant des nombres premiers, & ainsi des autres.

12. Il est bon de remarquer encore que si les nombres R dans les différentes équations de l'*Art.* 4 étoient de signes différens, pourvu qu'ils fussent d'ailleurs égaux entr'eux, les méthodes des *Articles précédens* réussiroient de même; il n'y auroit d'autre différence dans les résultats si non qu'au lieu d'arriver toujours à une équation de cette forme $1 = x^2 - a y^2$, on arriveroit quelque fois à une équation de cette autre forme $-1 = x^2 - a y^2$; mais alors il n'y auroit qu'à élever cette dernière équation au carré, & l'on auroit (*Art.* 5.) $1 = (x^2 + a y^2)^2 - a(2 x y)^2$.

13 Au reste si l'on avoit $R = \pm 2$ ou $= \pm 4$, une seule équation suffiroit pour résoudre le *Problême*.

Soit 1° $\pm 2 = x^2 - a y^2$, on aura, en prenant les carrés, $4 = (x^2 + a y^2)^2 - 4 a x^2 y^2$; mais $a y^2 = x^2 \mp 2$; donc $4 = 4(x^2 \mp 1)^2 - 4 a x^2 y^2$, & divisant par 4, $1 = (x^2 \mp 1)^2 - a(x y)^2$.

2° Soit $\pm 4 = x^2 - a y^2$, on aura, en carrant, $16 = (x^2 + a y^2)^2 - 4 a x^2 y^2$, mais $a y^2 = x^2 \mp 4$, donc, en substituant cette valeur, & divisant toute l'équation par 4 on aura, $4 = (x^2 \mp 2)^2 - a x^2 y^2$. Cette équation étant multipliée par l'équation $\pm 4 = x^2 - a y^2$, on aura (*Article* 5), en prenant le signe $+$, $\pm 16 = [(x^2 + 2) x + a x y^2]^2 - a[(x^2 \mp 2) y + x^2 y]^2$, c'est-à-dire

à-dire $\pm 16 = x^2 (x^2 + a y^2 \mp 2)^2 - 4 a y^2 (x^2 \mp 1)^2$; mais $a y^2 = x^2 \pm 4$; donc en ſubſtituant & diviſant par 4, on aura $\pm 4 = x^2 (x^2 \mp 3)^2 - a y^2 (x^2 \mp 1)^2$.

Or puiſque a eſt premier à R, & que R eſt ici un nombre pair, a ſera néceſſairement impair; donc l'équation $R = x^2 - a y^2$ ne pourra ſubſiſter à moins que x & y ne ſoient tous deux pairs ou impairs; mais ils ne peuvent être tous deux pairs, parcequ' ils ſont ſuppoſés premiers l'un à l' autre; donc ils ſeront néceſſairement tous deux impairs; donc x ſera impair; & par conſéquent $x^2 \mp 1$ & $x^2 \mp 3$ ſeront tous deux pairs; donc faiſant $x^2 \mp 1 = 2 q$ & $x^2 \mp 3 = 2 p$, & diviſant l' équation précédente par 4, on aura celle-ci $\pm 1 = (x p)^2 - a (y q)^2$; donc, lorſque $R = 4$, on aura $1 = (x p)^2 - a (y q)^2$; & lorſque $R = - 4$, on aura $- 1 = (x p)^2 - a (y q)^2$; d' où, en prenant les carrés, il viendra $+ 1 = (x^2 p^2 + a y^2 q^2)^2 - a (2 x y p q)^2$.

14 Nous avons ſuppoſé juſqu' ici que les nombres a & R étoient premiers l'un à l'autre; voyons maintenant comment il faudra s' y prendre lorſque ces nombres auront un diviſeur commun.

Soit θ le plus grand diviſeur commun de a & de R, enſorte que $a = \theta b$ & $R = \theta T$, b & T étant premiers entr'eux, & l' équation $R = x^2 - a y^2$ deviendra $\theta T = x^2 - \theta b y^2$. (Ce que nous diſons de cette équation doit s'appliquer en général à toutes les équations de l'*Art.* 4); d'où l'on voit qu' il faut néceſſairement que le carré x^2 ſoit diviſible par θ.

Suppoſons 1° que θ ne ſoit ni carré, ni multiple d'un carré, il eſt évident que la racine x devra être elle même diviſible par θ; de ſorte qu' en faiſant $x = \theta u$, & diviſant toute l' èquation par θ, on aura $T = \theta u^2 - b y^2$. Qu'on éléve cette équation au carré, & l'on aura: $T^2 = \theta^2 u^4 - 2 b \theta u^2 y^2 + b^2 y^4 = (\theta u^2 + b y^2)^2 - \theta b (2 u y)^2$,

savoir $T^2 = (\theta u^2 + b y^2) - a(2uy)^2$; équation dans laquelle a & T^2 seront premiers entr' eux.

Or dans l' équation $R = x^2 - a y^2$, R est nécessairement premier à y; autrement x^2 seroit divisible par la plus grande commune mesure de ces deux quantités, & par conséquent x & y ne seroient plus premiers entr'eux, contre l' hypothèse; donc T & θ seront aussi premiers à y; donc dans l'équation $T = \theta u^2 - b y^2$, T & u seront aussi premiers entr'eux; autrement il faudroit que $b y^2$ fût divisible par leur plus grande commune mesure, ce qui ne se peut à cause que b & y sont tous les deux premiers à T; donc puisque T est premier à u & à y, il est clair que T^2 sera nécessairement premier à $u y$; donc dans l' équation $T^2 = (\theta u^2 + b y^2)^2 - a(2uy)^2$ $\theta u^2 + b y^2$ & $u y$ seront premiers entr'eux; car s'ils ne l'étoient pas il faudroit que T fût divisible par leur commune mesure; ainsi T & $u y$ ne seroient plus premiers l'un à l'autre.

Donc si T est un nombre impair, on prendra au lieu de l' équation $R = x^2 - a y^2$, celle-ci $T^2 = (\theta u^2 + b y^2)^2 - a(2uy)^2$; dans laquelle T^2 & a seront premiers entr'eux, aussi-bien θu^2 $b y^2$ & $2uy$.

Et si T est un nombre pair, alors $\theta u^2 + b y^2$ sera aussi pair, & l'on aura l'équation $(\frac{T}{2})^2 = (\frac{\theta u^2 + b y^2}{2})^2 - a(uy)^2$; dans laquelle $(\frac{T}{2})^2$ & a seront premiers entr'eux, comme aussi $\frac{\theta u^2 + b y^2}{2}$ & $u y$.

2° Supposons maintenant que θ ait un facteur carré π^2, ensorte que $\theta = \pi^2 \gamma$, γ n' étant ni carré, ni multiple d'un carré; en ce cas l'équation $R = x^2 - a y^2$ deviendra $\pi^2 \gamma T = x^2 - \pi^2 \gamma b y^2$; d'où l' on voit que le carré x^2 sera nécessairement divisible par $\pi^2 \gamma$, & que par conséquent sa racine x le sera par $\pi \gamma$; ainsi faisant

$x = \pi \gamma u$, on aura après avoir divifé par $\pi^2 \gamma$, $T = \gamma u^2 - b y^2$.

Donc fi $\gamma = 1$, c'eft à-dire fi θ eft carré, on aura l'équation $T = u^2 - b y^2$, dans laquelle T & b feront premiers entr'eux, auffi-bien que u & y; de forte qu'à l'aide de cette équation, & des autres femblables, on parviendra par les méthodes de l'*Art.* 6 & *fuiv.* à une équation de cette forme $1 = p^2 - b q^2$, ou bien $1 = p^2 - \frac{a}{\pi^2} q^2$.

Si γ n'eft pas $= 1$; on élévera l'équation $T = \gamma u^2 - b y^2$ au carré, & l'on aura $T^2 = (\gamma u^2 + b y^2)^2 - \gamma b (2 u y)^2$; & l'on prouvera comme ci-deffus que γb fera premier à T^2, & que $\gamma u^2 + b y^2$ & $u y$ feront premiers entr'eux.

De forte que fi T eft impair on aura, au lieu de l'équation $R = x^2 - a y^2$, celle-ci $T^2 = (\gamma u^2 + b y^2)^2 - \gamma b (2 u y)^2$ où T^2 & γb feront premiers entr'eux auffi-bien que $\gamma u^2 + b y^2$ & $2 u y$.

Et fi T eft pair on aura l'équation $(\frac{T}{2})^2 = (\frac{\gamma u^2 + b y^2}{2})^2 - \gamma b (u y)^2$, où $(\frac{T}{2})^2$ & γb feront premiers entr'eux auffi-bien que $\frac{\gamma u + b y^2}{2}$ & $u y$.

Donc par le moyen de ces équations, & des autres femblables, on parviendra auffi à une équation de cette forme $1 = p^2 - \gamma b q^2$, c'eft-à-dire (à caufe de $a = \gamma b \pi^2$) de cette forme-ci $1 = p^2 - \frac{a}{\pi^2} q^2$.

Or connoiffant deux valeurs quelconques de p & q qui fatisfaffent à l'équation $1 = p^2 - f q^2$, f étant quelconque, il eft toujours poffible de trouver par leur moyen deux autres valeurs de p & q qui fatisfaffent à la même

équation, & qui ſoient telles que la valeur de q ſoit multiple d'un nombre quelconque donné, comme nous le verrons plus bas (*Art.* 21); donc on pourra toujours déterminer p & q, de manière que q ſoit diviſible par π; de ſorte qu'on aura $1 = p^2 - a\left(\frac{q}{\pi}\right)^2$, comme le *Problême* le demande.

15 Nous avons donc démontré, avec toute la rigueur & la généralité poſſibles, qu'un nombre quelconque entier & non carré a étant donné, il eſt toujours poſſible de trouver deux nombres x & y tels que $1 = x^2 - ay^2$; & nous avons en même tems donné les moyens de trouver ces mêmes nombres.

Or comme le carré le cube, & en général toute puiſſance d'une quantité de cette forme $x^2 - ay^2$ eſt toujours auſſi de la même forme (*Art.* 5), il s'enſuit qu'en élévant l'équation $1 = x^2 - ay^2$ à une puiſſance quelconque, on aura une infinité d'autres équations ſemblables, de ſorte qu'ayant trouvé par les méthodes précédentes, ou par quelqu'autre méthode que ce ſoit, une ſeule ſolution du *Problême*, on pourra par ſon moyen en trouver d'autres à l'infini.

Pour renfermer toutes ces ſolutions dans une formule générale, ſuppoſons que p & q ſoient les valeurs trouvées de x & de y, enſorte que l'on ait $1 = p^2 - aq^2$; en élévant les deux membres de cette équation à une puiſſance quelconque m, on aura $1 = (p^2 - aq^2)^m$, équation qu'il s'agit de réduire à la forme de celle-ci $1 = x^2 - ay^2$.

Pour cela je remarque que $p^2 - aq^2 = (p + q\sqrt{a})(p - q\sqrt{a})$, de ſorte que l'on aura $(p^2 - aq^2)^m = (p + q\sqrt{a})^m \cdot (p - q\sqrt{a})^m$. Or $(p + q\sqrt{a})^m = p^m + mp^{m-1}q\sqrt{a} + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2a + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}$

$p^{m-3} q^3 a \sqrt{a} + \&c$; donc ſi on fait

$x = p^m + \frac{m(m-1)}{2} p^{m-2} q^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^{m-4} q^4 a^2$
$+ \&c.$

$y = m p^{m-1} q + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} p^{m-3} q^3 a^2$
$+ \frac{m(m-1) \ldots \ldots (m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{m-5} q^5 a^2 + \&c.$

on aura $(p + q \sqrt{a})^m = x + y \sqrt{a}$; & prenant le radical $\sqrt{a}$ en —, on aura de même $(p - q \sqrt{a})^m = x - y \sqrt{a}$; donc $(p^2 - a q^2)^m = (x + y \sqrt{a})(x - y \sqrt{a}) = x^2 - a y^2$; de ſorte que l'on aura en général $x^2 - a y^2 = 1$, en prenant pour m un nombre quelconque entier & poſitif.

Au reſte les équations $(p + q \sqrt{a})^m = x + y \sqrt{a}$, & $(p - q \sqrt{a})^m = x - y \sqrt{a}$ donneront

$$x = \frac{(p + q \sqrt{a})^m + (p - q \sqrt{a})^m}{2}.$$

$$y = \frac{(p + q \sqrt{a})^m - (p - q \sqrt{a})^m}{2 \sqrt{a}},$$

expreſſions qui reviennent au même que les précédentes, mais qui ont l'avantage d'être ſous une forme finie; ainſi prenant ſucceſſivement pour m tous les nombres naturels, on aura une infinité de ſolutions du *Problême propoſé.*

16 Les dernières expreſſions de x & de y font voir que ces quantités forment deux ſuites recurrentes, dont l'échelle de rélation eſt $2p$, $-(p^2 - a q^2)$, ou bien (à cauſe de $p^2 - a q^2 = 1$) $2p$, -1; de ſorte qu'en dénotant par x', x'', x''' &c. & y', y'', y''' &c. les valeurs de x & de y qui répondent à $m = 1, 2, 3$ &c. on aura les ſéries ſuivantes.

$x' = p$
$x'' = 2 p^2 - 1$

$$x''' = 4p^3 - 3p$$
$$x^{IV} = 8p^4 - 8p^2 + 1$$
$$x^{V} = 16p^5 - 20p^3 + 5p$$
&c.

& en général, lorſque l' expoſant eſt m,

$$x = 2^{m-1}p^m - m\,2^{m-3}p^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}2^{m-5}p^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot3}2^{m-7}p^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot3\cdot4}2^{m-9}p^{m-8} - \&c.$$

& de même

$$y' = q$$
$$y'' = 2pq$$
$$y''' = (4p^2 - 1)q$$
$$y^{IV} = (8p^3 - 4p)q$$
$$y^{V} = (16p^4 - 12p^2 + 1)q$$
&c.

& en général, lorſque l'expoſant eſt m,

$$y = [2^{m-1}p^{m-1} - (m-2)2^{m-3}p^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}2^{m-5}p^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{2\cdot3}2^{m-7}p^{m-7} + \&c.]\,q.$$

On peut mettre encore les expreſſions générales de x & de y ſous une autre forme beaucoup plus ſimple; mais il faut pour cela diſtinguer les cas, où m eſt pair ou impair.

Soit 1° m impair, on aura

$$x' = p$$
$$x''' = -(3p - 4p^3)$$
$$x^{V} = 5p - 20p^3 + 16p^5$$
&c.

& en général

$$x = \mp [m p - \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3} p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^5$$
$$- \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} p^7 + \&c.]$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas de m multiple de 4 plus 1, & l'inférieur pour celui de m multiple de 4 plus 3.

Enſuite

$$y' = q$$
$$y''' = - q(1 + 4) p^2)$$
$$y^{V} = q(1 - 12 p^2 + 16 p^4)$$
&c.

& en général

$$y = \mp q [1 - \frac{m^2-1}{2} p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4$$
$$- \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} p^6 + \&c.]$$

où l'on obſervera, à l'égard des ſignes ambigus, la même règle que ci-deſſus.

Soit 2° m pair, & l'on aura

$$x'' = -(1 - 2 p^2)$$
$$x^{IV} = 1 - 8 p^2 + 8 p^4$$
$$x^{VI} = -(1 - 18 p^2 + 48 p^4 - 32 p^6)$$
&c.

& en général

$$x = \pm [1 - \frac{m^2}{2} p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} p^6$$
$$+ \&c.]$$

Enſuite

$$y'' = 2 p q$$
$$y^{IV} = - q(4 p - 8 p^3)$$
$$y^{VI} = q(6 p - 32 p^3 + 32 p^5)$$
&c.

& en général

$$y = \mp q \left[m p - \frac{m(m^2-4)}{2 \cdot 3} p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^5 - \&c. \right]$$

A l' égard de l'ambiguité des ſignes on prendra le ſigne ſupérieur lorſque m eſt un multiple de 4, & l'inférieur lorſque m eſt un multiple de 4 plus 2.

De plus, puiſque $p^2 - a q^2 = 1$, on pourra ſubſtituer dans les formules précédentes $1 + a q^2$ au lieu de p^2, & l'on aura celles-ci

1.° Pour le cas de m impair

$$x' = p$$
$$x''' = p(1 + 4 a q^2)$$
$$x^{V} = p(1 + 12 a q^2 + 16 a^2 q^4)$$
&c.

& en général

$$x = p \left[1 + \frac{m^2-1}{2} a q^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 q^4 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^3 q^6 + \&c. \right]$$

Enſuite

$$y' = q$$
$$y''' = 3 q + 4 a q^3$$
$$y^{V} = 5 q + 20 a q^3 + 16 a^2 q^5$$
&c.

& en général

$$y = m q + \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3} a q^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^2 q^5 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^3 q^7 + \&c.$$

2.° Pour le cas de m pair

$$x'' = 1 + 2 a q^2$$
$$x^{IV} = 1 + 8 a q^2 + 8 a^2 q^4$$
$$x^{VI} = 1 + 18 a q^2 + 48 a^2 q^4 + 32 a^3 q^6$$
&c.

& en général

$$x = 1 + \frac{m^2}{2} a q^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 q^4 + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^3 q^6$$
$+$ &c.

Enſuite

$$y'' = 2 p q$$
$$y^{IV} = p(4 q + 8 a q^3)$$
$$y^{VI} = p(6 q + 32 a q^3 + 32 a^2 q^5)$$
&c.

& en général

$$y = p\left[m q + \frac{m(m^2-4)}{2 \cdot 3} a q^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^2 q^5\right.$$
$+$ &c.]

Ces dernières expreſſions de x & de y ont l'avantage de n'être compoſées que des termes tous poſitifs, ce qui les rend beaucoup plus ſimples & plus commodes pour le calcul.

17. Nous allons démontrer, maintenant que ſi p & q ſont les plus petites valeurs de x & y qui ſatisfaſſent à l'équation $x^2 - a y^2 = 1$, toutes les autres valeurs poſſibles de x & de y ſeront néceſſairement renfermées dans les formules générales des deux *Articles précédens.*

Pour cela nous remarquerons d'abord que ſi l'on a $p^2 - a q^2 = 1$, & $p'^2 - a q'^2 = 1$, & que $p' > p$, on aura auſſi $q' > q$; car retranchant la première équation de la ſeconde, on a $p'^2 - p^2 - a(q'^2 - q^2) = 0$, ou bien $p'^2 - p^2 = a(q'^2 - q^2)$; donc ſi $p'^2 - p^2$ eſt poſitif, il faudra que $p'^2 - q^2$ le ſoit auſſi; donc &c.

Suppoſons maintenant que p & q ſoient les plus petites valeurs de x & y dans l'équation $x^2 - a y^2 = 1$, & que p' & q' ſoient les valeurs de x & de y qui ſont immédiatement plus grandes que celles-la, enſorte qu'il n'y ait point de nombres plus petits que p' & q', qu'on puiſſe prendre pour x & y, autres que p & q; cela poſé:

Qu'on multiplie enſemble les deux équations $p^2 - aq^2 = 1$ & $p'^2 - aq'^2 = 1$, & l'on aura (*Art.* 5), en prenant ſeulement le ſigne inférieur, $(pp' - aqq')^2 - a(pq' - qp')^2 = 1$; d'où l'on voit que $pp' - aqq'$ ſera auſſi une des valeurs de x, & $pq' - qp'$ une des valeurs de y qui ſatisfont à la même équation $x^2 - ay^2 = 1$. Or je dis que $pp' - aqq'$ eſt > 0 & $< p'$. Car 1° ſoit $pp' - aqq' = z$, on aura $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} - a = \frac{z}{qq'}$; mais les équations $p^2 - aq^2 = 1$ & $p'^2 - aq'^2 = 1$ donnent $\frac{p^2}{q^2} = a + \frac{1}{q^2}$, $\frac{p'^2}{q'^2} = a + \frac{1}{q'^2}$; donc $\frac{p^2}{q^2} \times \frac{p'^2}{q'^2} = a^2 + a\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q'^2}\right) + \frac{1}{q^2q'^2}$; & tirant la racine carrée $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \sqrt{\left[a^2 + a\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q'^2}\right) + \frac{1}{q^2q'^2}\right]}$; d'où l'on voit que $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'}$ eſt $> a$; de ſorte que $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} - a$ ſera toujours une quantité poſitive; par conſéquent z ſera auſſi un nombre poſitif. 2° ſoit $pp' - aqq' = p' + u$, on aura $\frac{p-q}{q} \times \frac{p'}{q'} - a = \frac{u}{qq'}$; or $\frac{p-1}{q} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{q^2}\right)} - \frac{1}{q} = \frac{a}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{1}{q}}}$, & $\frac{p'}{q'} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{q'^2}\right)}$; donc $\frac{p-1}{q} \times \frac{p'}{q'} = a \times \frac{\sqrt{\left(a + \frac{1}{q'^2}\right)}}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{1}{q}}}$; mais $q' > q$, donc $\sqrt{\left(a + \frac{1}{q'^2}\right)} < \sqrt{\left(a + \frac{1}{q^2}\right)}$ & à

plus forte raison $< \surd(a + \frac{1}{q^2}) + \frac{1}{q}$; donc $\frac{p-1}{q} \times \frac{p'}{q'}$ sera $< a$; donc $\frac{p-1}{q} \times \frac{p'}{q'} - a$ sera nécessairement une quantité négative; par conséquent u sera aussi négative; donc $pp' - aqq' < p'$.

Donc il faudra par l'hipothèse que l'on ait $pp' - aqq' = p$; & comme $(pp' - aqq')^2 - a(pq' - qp')^2 = 1$, & $p^2 - aq^2 = 1$, il faudra aussi que l'on ait $(pq' - qp')^2 = q^2$; d'où $pq' - qp' = \pm q$. Mais $\frac{p}{q} = \surd(a + \frac{1}{q^2})$ & $\frac{p'}{q'} = \surd(a + \frac{1}{q'^2}$; donc à cause de $q' > q$, on aura $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$; donc $pq' - qp'$ sera positif; de sorte qu'il faudra supposer $pq' - qp' = q$.

Nous aurons donc ces deux équations $pp' - aqq' = p$, & $pq' - qp' = q$, d'où l'on tire $p' = \frac{p^2 + aq^2}{p^2 - aq^2}$ & $q' = \frac{2pq}{p^2 - aq^2}$; c'est-à-dire, à cause de $p^2 - aq^2 = 1$, $p' = p^2 + aq^2$, $q' = 2pq$, ou bien, ce qui revient au même

$$p' = \frac{(p + q\surd a)^2 + (p - q\surd a)^2}{2}$$

$$q' = \frac{(p + q\surd a)^2 - (p - q\surd a)^2}{2\surd a}$$

d'où l'on voit que les valeurs de p' & q' sont contenües dans les formules générales de l'*Art.* 15, en y faisant $m = 2$.

Soient ensuite p'' & q'' les valeurs de x & de y qui sont immédiatement plus grandes que p' & q'; ensorte qu'entre toutes les valeurs possibles de x & de y dans l'équation $x^2 - ay^2 = 1$, il n'y ait que p & p' qui

ſoient moindres que p'' & q, & q' qui ſoient moindres que q''.

Multipliant l'équation $p''^2 - aq''^2 = 1$ par $p^2 - aq^2 = 1$, & prenant dans cette multiplication le ſigne — (*Art.* 5), on aura $(pp'' - aqq'')^2 - a(pq'' - qp'')^2 = 1$; de ſorte que $pp'' - aqq''$ ſera auſſi une des valeurs de x, & $pq'' - qp''$ une des valeurs de y; & l'on prouvera ici par une méthode ſemblable à la précédente que $pp'' - aqq'' > 0$ & $< p''$, & $pq'' - qp' > 0$ & $< q''$; d'où il s'enſuit que l'on aura néceſſairement $pp'' - aqq'' = p$ ou $= p'$, & $pq'' - qp'' = q$ ou $= q'$.

Or les équations $pp'' - aqq'' = p$ & $pq'' - qp'' = q$, donnent (à cauſe de $p^2 - aq^2 = 1$) $p^2 = aq^2 = p'$, & $q'' = 2pq = q'$; ce qui eſt contre l'hipothèſe; & les équations $pp'' - aqq'' = p'$, $pq'' - qp'' = q'$ donnent $p'' = pp' + aqq'$, $q'' = pq' + qp'$, c'eſt-à-dire, en mettant pour p' & q' leurs valeurs,

$$p'' = \frac{(p + q\sqrt{a})^3 + (p - q\sqrt{a})^3}{2}$$

$$q'' = \frac{(p + q\sqrt{a})^3 - (p - q\sqrt{a})^3}{2\sqrt{a}}.$$

Ainſi les valeurs de p'' & q'' ſont encore renfermées dans les formules de l'*Article cité*, en y faiſant $m = 3$.

On prouvera par des raiſonnemens ſemblables que les valeurs de x & de y qui ſont immédiatement plus grandes que p'' & q'', & que nous déſignerons par p''' & q''', ſeront exprimées ainſi

$$p''' = \frac{(p + q\sqrt{a})^4 + (p - q\sqrt{a})^4}{2}$$

$$q''' = \frac{(p + q\sqrt{a})^4 - (p - q\sqrt{a})^4}{2\sqrt{a}}$$

& ainſi des autres à l'infini; d'où l'on conclura en gé-

néral que les valeurs de x & y, dont le quantiéme sera m à commencer des premières valeurs p & q, seront exprimées de la manière suivante

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}$$

comme dans l' *Art.* 15.

Ainsi ayant trouvé les premières valeurs p & q, on sera assuré d' avoir par ces formules toutes les valeurs possibles de x & de y propres à satisfaire à l' équation $x^2 - ay^2 = 1$.

18 Je dis maintenant que tous les nombres x & y qui satisfont à l'équation $x^2 - ay^2 = 1$ se trouvent nécessairement parmi les nombres M, M', M'' &c. & N, N', N'' &c. qui forment les fractions $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{M''}{N''}$ &c. convergentes vers la racine de a, mais toujours plus grandes que cette racine (*Art.* 1.); c' est-à-dire que chacun des nombres x est nécessairement égal à quelqu'un des termes de la série M, M', M'' &c., & que le nombre correspondant y est égal au terme correspondant de la série N, N', N'' &c.; ensorte que la fraction $\frac{x}{y}$ sera toujours une de celles dont nous venons de parler.

Pour pouvoir démontrer cette proposition, je commencerai par prouver que si y est égal à un terme quelconque de la série N, N', N'' &c., x sera nécessairement égal au terme correspondant de la série M, M', M'' &c. Car soit $y = N$ (on fera le même raisonnement pour tous les autres termes de la série N, N', N'' &c., & de sa correspondante M, M', M'' &c.), ensorte que l' on ait $x^2 - aN^2 = 1$; si M n' est pas $= x$, il sera nécessairement $> x$, à cause que la quantité $M^2 - aN^2$

est toujours > 0 (*Art.* 2), ainsi l'on aura $\frac{M}{N} > \frac{x}{N}$ & $\frac{M}{N} - \frac{m}{n} > \frac{x}{N} - \frac{m}{n}$, savoir, à cause de $Mn - Nm = 1$ (*Art.* 1), $\frac{1}{Nm} > \frac{xn - Nm}{Nn}$, ou bien $xn - Nm < 1$; mais par l'équation $x^2 - aN^2 = 1$, on a $\frac{x}{N} = \sqrt{(a + \frac{1}{N^2})}$, & par conséquent $\frac{x}{N} > \sqrt{a}$; & par l'*Art.* 1 on a $\frac{m}{n} < \sqrt{a}$; donc $\frac{x}{N} > \frac{m}{n}$, donc $\frac{x}{N} > \frac{m}{n}$, donc $xn - Nm > 0$; ce qui est contradictoire.

Supposons maintenant, que y ne soit égal à aucun des termes de la série 0, N, N', N'' &c., & comme cette série commence par 0 & s'etend à l'infini (*Art.* 1), il est clair que le nombre se trouvera nécessairement entre deux quelconques des termes voisins de la même série; supposons donc que ce soit entre N & N' (le raisonnement sera le même pour tous les autres termes); ensorte que l'on ait $y > N$ & $y < N'$; je considère les trois fractions consécutives $\frac{M}{N}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{M'}{N'}$, dont les numérateurs N, M, m', M' vont en augmentant aussi-bien que les dénominateurs N, n', N', & qui sont de plus convergentes vers la valeur de $\sqrt{a}$, mais de façon que la première & la troisiéme sont plus grandes que cette valeur, & la seconde en est plus petite (*Art.* 1); & je vais démontrer d'abord que y doit nécessairement être $> n'$. Car, puisque on a $x^2 - ay^2 = 1$, on aura $\frac{x^2}{y^2} - a = \frac{1}{y^2}$; mais $M^2 - aN^2 = R$ (R étant > 0

par l' *Art.* 2); donc aussi $\frac{M^2}{N^2} - a = \frac{R}{N^2}$; donc comme $y > N$, & que $R = m > 1$, on aura nécessairement $\frac{1}{y^2} < \frac{R}{N^2}$, & par conséquent $\frac{x^2}{y^2} - a < \frac{M^2}{N^2} - a$; donc $\frac{x^2}{y^2}$ approchera plus de a que $\frac{M^2}{N^2}$ (l'une & l'autre de ces deux quantités étant d'ailleurs plus grandes que a, à cause de $x^2 - ay^2 > 0$ & $M^2 - aN^2 > 0$); donc aussi $\frac{x}{y}$ approchera plus de $\sqrt{a}$ que $\frac{M}{N}$; mais $\sqrt{a}$ se trouve entre $\frac{M}{N}$ & $\frac{m'}{n'}$ (*Art.* 2); donc $\frac{x}{y}$ se trouvera aussi entre $\frac{M}{N}$ & $\frac{m'}{n'}$; donc on aura $\frac{M}{N} - \frac{x}{y} > 0$, & $\frac{M}{N} - \frac{x}{y} < \frac{M}{N} - \frac{m'}{n'}$; donc 1° on aura $My - Nx > 0$; 2° $\frac{My - Nx}{Ny} < \frac{1}{Nn'}$, savoir $My - Nx < \frac{y}{n'}$; donc puisque $My - Nx$ est d'ailleurs un nombre entier, il faudra nécessairement que l'on ait $\frac{y}{n'} > 1$; & par conséquent $y > n'$.

Soit donc $y > n'$ & $< N'$; puisque l'on a par l'équation $x^2 - ay^2 = 1$, $\frac{x}{y} > \sqrt{a}$, & par l' *Art.* 1 $\frac{m'}{n'} < \sqrt{a}$, on aura nécessairement $\frac{x}{y} - \frac{m'}{n'} > 0$; de plus on a par le même *Article* $\frac{M'}{N'} > \sqrt{a}$; & par conséquent $\frac{M'}{N'} - \frac{m'}{n'} > 0$; or $\frac{x}{y} - \frac{m'}{n'} = \frac{xn' - ym'}{yn'}$, &

$\frac{M'}{N'} - \frac{m'}{n'} = \frac{1}{N'n'}$; donc, à cauſe de $y < N'$, on aura $\frac{x}{y} - \frac{m'}{n'} > (xn' - ym')(\frac{M'}{N'} - \frac{m'}{n'})$; or je dis que $xn' - ym'$ doit néceſſairement être $= 1$; en effet puiſque $\frac{x}{y} - \frac{m'}{n'} > 0$, on aura d'abord $xn' - ym' > 0$; donc $xn' - ym' = 1$ ou $= 2$, ou > 2; mais ſi $xn' - ym' = 2$ ou > 2, on aura pour lors $\frac{x}{y} - \frac{m'}{n'} > 2(\frac{M'}{N'} - \frac{m'}{n'})$; & comme $\sqrt{a}$ ſe trouve entre $\frac{M'}{N'}$ & $\frac{m'}{n'}$ (*Art.* 1) elle ſe trouvera auſſi néceſſairement entre $\frac{x}{y}$ & $\frac{m'}{n'}$, mais beaucoup plus près de $\frac{m'}{n'}$ que de $\frac{x}{y}$, parceque $\frac{x}{y} - \frac{M'}{N'} > \frac{M'}{N'} - \frac{m'}{n'}$; donc a ſe trouvera auſſi entre $\frac{x^2}{y^2}$ & $\frac{m'^2}{n'^2}$, mais plus près de $\frac{m'}{n'^2}$ que de $\frac{x^2}{y^2}$; donc on aura $\frac{x^2}{y^2} - a > a - \frac{m'^2}{n'^2}$; ſavoir, à cauſe de $x^2 - ay^2 = 1$ $\frac{1}{y^2} > \frac{an'^2 - m'^2}{n'^2}$; ou bien $an'^2 - m'^2 < \frac{n'^2}{y^2}$; mais $y > n'$, donc $\frac{n'^2}{y^2} < 1$; & à plus forte raiſon $an'^2 - m'^2 < 1$; ce qui ne peut être, à cauſe que $m'^2 - an'^2$ eſt toujours néceſſairement un nombre entier négatif (*Art.* 2), & par conſéquent $an'^2 - m'^2$ un nombre entier poſitif. Donc il faudra néceſſairement que l'on ait $xn' - ym' = 1$.

On aura donc $xn' - ym' = 1$; & comme l'on a auſſi (*Art.* 1) $M'n' - N'm' = 1$, on aura $(M' - x)n' - (N' - y)m' = 0$, ſavoir $\frac{M'-x}{N'-y} = \frac{m'}{n'}$; donc

prenant

prenant un nombre quelconque entier z, on aura $M' - x = m' z$, $N' - y = n' z$; & delà $x = M' - m' z$, & $y = N' - n' z$; donc substituant ces valeurs dans l'équation $x^2 - a y^2 = 1$, on aura $M'^2 - a N'^2 - 2(M' m' - a N' n') z + (m'^2 - a n'^2) z^2 = 1$; or $M'^2 - a N'^2$ est un nombre positif, $m'^2 - a n'^2$ est un nombre négatif; (*Art.* 2), & je dis que $M' m' - a N' n'$ est un nombre négatif; en effet, comme $\frac{M'}{N'} > \sqrt{a}$, & $\frac{m'}{n'} < \sqrt{a}$, on aura $\frac{M'}{N'} = \sqrt{a} + \Gamma$, & $\frac{m'}{n'} = \sqrt{a} - \gamma$; & γ sera $> \Gamma$, à cause que $\frac{M'}{N'}$ doit approcher plus de $\sqrt{a}$ que $\frac{m'}{n'}$ (*Art.* 1); donc $M' m' - a N' n' = N' n' \left(\frac{M' m'}{N' n'} - a\right) = - N' n' \left[(\gamma - \Gamma)\sqrt{a} + \Gamma \gamma\right]$. Donc si on fait $M'^2 - a N'^2 = A$, $M' m' - a N' n' = - B$, $m'^2 - a n'^2 = - C$; A, B, C exprimeront des nombres positifs, & l'on aura $A + 2 B z - C z^2 = 1$.

Soit en général $A + 2 B z - C z^2 = u$, ensorte que $x^2 - a y^2 = u$; en regardant z comme une quantité variable qui commence par zéro, & qui augmente à l'infini, on aura d'abord, lorsque $z = 0$, $u = A$; ensuite u augmentera jusqu'à ce que $B = C z$; après quoi u diminuera continuellement, jusqu'à devenir infini négatif. Donc si on donne à z une valeur quelconque Z, telle que la valeur correspondante de u soit positive & $= V$, il est clair que toutes les autres valeurs de z comprises entre 0 & Z, donneront pour u des valeurs positives, & plus grandes que la plus petite des deux quantités A & V, qui répondent à $z = 0$, & à $z = Z$.

Or nous avons trouvé $x = M' - m' z$, & $y = N' - n' z$; donc 1°, comme $y < N'$, on aura $z > 0$.

2° on a, par l'*Art.* 1, $M' = q'''m' + M$ & $N' = q'''n' + N$, donc $x = (q'' - z)m' + M$, & $y = (q''' - z) + N$; donc, puisque $y > N$; il faudra que $z < q'''$; ainsi les limites de z seront o & q'', c'est-à-dire que z sera comprise entre o & q'''; mais en faisant $z = o$ on a $u = A = M'^2 - aN'^2$; & en faisant $z = q'''$, on a $x = M$, $y = N$, & par conséquent $u = x^2 - ay^2 = M^2 - aN^2$; donc en donnant à z des valeurs intermédiaires, les valeurs correspondantes de u, savoir de $x^2 - ay^2$ seront toutes plus grandes que la plus petite de ces deux quantités $M^2 - aN^2$ & $M'^2 - aN'^2$; mais l'une & l'autre de ces quantités sont nécessairement égales ou plus grandes que l'unité (*Art.* 2); donc il est impossible de trouver une valeur convenable de z qui rende $x^2 - ay^2 = 1$; ce qui est contre l'hipothèse.

Donc il est impossible que y tombe entre N & N'; & l'on prouvera de la même manière qu'il est impossible qu'il tombe entre deux autres termes voisins quelconques de la série o, N, N', N'' &c.; donc il faut nécessairement que y coincide avec quelqu'un de ces termes, & que par conséquent x coincide avec le terme correspondant de la série 1, M, M', M'' &c., comme nous l'avons démontré ci-dessus.

Ainsi pour trouver les valeurs de x & de y qui satisfont à l'équation $x^2 - ay^2 = 1$, il n'y aura qu'à substituer successivement, dans la formule $x^2 - ay^2$, à la place de x, les numérateurs, & à la place de y les dénominateurs des fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$ &c. qui convergent vers la valeur de $\sqrt{a}$, mais qui sont toutes plus grandes que cette valeur, & l'on poussera cette substitution jusqu'à ce qu'elle donne 1 pour la valeur de $x^2 - ay^2$; ce qui arrivera nécessairement, en conséquence de ce que nous avons démontré jusqu'ici: mais comme il faudroit quelque fois

pouſſer cette ſubſtitution très-loin, ce qui ſeroit aſsès incommode, on pourra ſouvent ſe ſervir avec avantage des méthodes que nous avons données plus haut, comme on le verra dans les exemples ſuivans.

Au reſte comme les termes des deux ſéries 1, *M*, *M'* &c., 0 *N*, *N'* &c. vont en augmentant, il eſt clair qu'en ſubſtituant ſucceſſivement tous ces termes dans la formule $x^2 - a y^2$ juſqu'à ce qu'elle devienne $= 1$, on aura par ce moyen les plus petites valeurs poſſibles qui ſatisfaſſent au *Problême*; & ces valeurs étant enſuite ſubſtituées pour p & q dans les formules des *Articles* 15 & 16, on aura alors toutes les valeurs poſſibles de x & de y (*Art.* 17).

19 Soit, comme dans l'*Art.* 15,

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}.$$

je dis que ſi m eſt un nombre premier $x - p$, & $y - q a^{\frac{m-1}{2}}$ ſeront toujours diviſibles par m.

En effet ſi on développe ces expreſſions, on aura, à cauſe que m eſt impair

$$x = p^m + \frac{m(m-1)}{2} p^{m-2} q^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^{m-4} q^4 a^2$$

$$+ \&c. + \frac{m(m-1)(m-2) \ldots 2}{2 \cdot 3 \ldots\ldots m-1} p\, q^{m-1} a^{\frac{m-1}{2}},$$

$$y = m p^{m-1} q + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} p^{m-3} q^3 a + \&c.$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2) \ldots 3}{2 \cdot 3 \ldots\ldots m-2} p^2 q^{m-2} a^{\frac{m-3}{2}} + q^m a^{\frac{m-1}{2}}.$$

Or les coéficiens m, $\frac{m(m-1)}{2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$ &c. jufqu'à $\frac{m(m-1)(m-2) \ldots \ldots 2}{2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots m-1}$ font néceffairement divifibles par m, lorfque m eft premier, parceque ce nombre multiplie, comme l'on voit, tous les numérateurs, & ne multiplie aucun des dénominateurs, de forte qu'il eft impoffible qu'il s'en aille par la divifion de chaque numérateur par fon dénominateur; divifion qui doit d'ailleurs fe faire toujours exactement, à caufe que les coéficiens dont il s'agit font, comme l'on fait, des nombres entiers. Donc tous les termes de la valeur de x, à l'exception du premier p^m feront néceffairement divifibles par m, & tous ceux de la valeur de y, à l'exception du dernier $q^m a^{\frac{m-1}{2}}$ le feront auffi; donc $x - p^m$ & $y - q^m a^{\frac{m-1}{2}}$ feront divifibles par m.

Maintenant, on fait que, lorfque m eft premier, $p^m - p$ eft toujours divifible par m, quel que foit p, pourvû que ce foit un nombre entier; donc $x - p$ fera auffi divifible par m, de même $q^m - q$ étant divifible par m, $q^m a^{\frac{m-1}{2}} - q a^{\frac{m-1}{2}}$ le fera auffi; donc $y - q a^{\frac{m-1}{2}}$ fera divifible par m.

Donc 1° fi a eft divifible par m, $x - p$ & y le feront auffi. 2° fi a n'eft point divifible par m, comme $a^m - a$ eft néceffairement divifible par m, il faudra que $a^{m-1} - 1$, le foit auffi; donc, à caufe que m eft premier, il faudra que l'un ou l'autre des facteurs de $a^{m-1} - 1$, favoir $a^{\frac{m-1}{2}} + 1$, & $a^{\frac{m-1}{2}} - 1$, foit divifible par m.

Soit d'abord $a^{\frac{m-1}{2}}+1$ divisible par m, & $qa^{\frac{m-1}{2}}+q$ le sera aussi; donc $x-p$ & $y+q$ seront divisibles par m.

Soit ensuite $a^{\frac{m-1}{2}}-1$ divisible par m, $qa^{\frac{m-1}{2}}-q$ le sera aussi; donc $x-p$ & $y-q$ seront divisibles par m.

Or en multipliant ensemble les deux équations $1=p^2-aq^2$, & $1=x^2-ay^2$, on a celle-ci $1=x'^2-ay'^2$, dans laquelle $x'=px\pm aqy$, & $y'=py\pm qx$; ou bien en substituant pour x & y leurs valeurs.

$$x'=\frac{(p\pm q\sqrt{a})(p+q\sqrt{a})^m+(p\mp q\sqrt{a})(p-q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$y'=\frac{(p\pm q\sqrt{a})(p+q\sqrt{a})^m-(p\mp q\sqrt{a})(p-q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}$$

savoir, à cause de $p^2-aq^2=1$,

$$x'=\frac{(p+q\sqrt{a})^{m\pm1}+(p-q\sqrt{a})^{m\pm1}}{2}$$

$$y'=\frac{(p+q\sqrt{a})^{m\pm1}-(p-q\sqrt{a})^{m\pm1}}{2\sqrt{a}}.$$

Donc en premier lieu si $a^{\frac{m-1}{2}}+1$ est divisible par m, ensorte que $x-p$ & $y+q$, le soient aussi, & qu'on prenne, dans les expressions de x' & de y', le signe supérieur, on aura $x'=px+aqy$, $y'=py+qx$, ou bien $x'=(x-p)p+a(y+q)q+p^2-aq^2$, & $y'=(x-p)q+(y+q)p$; donc (à cause de $p^2-aq^2=1$) $x'-1$ & y' seront aussi divisibles par m.

En second lieu si $a^{\frac{m-1}{2}}-1$ est divisible par m, ensorte que $x-p$ & $y-q$ le soient aussi, & qu'on prenne dans les expressions de x' & de y' le signe inférieur, on aura $x'=px-aqy$, $y'=py-qx$, ou bien $x'=(x-p)p-a(y-q)q+p^2-aq^2$,

& $y' = (y - q)p - (x - p)q$; d'où il s'ensuit que $x' - 1$ & y' seront encore divisibles par m.

Donc en général si r est le reste de la division de $a^{\frac{m-1}{2}}$ par m (reste qui ne peut être que o, ou ± 1) & qu'on fasse

$$p' = \frac{(p + q\sqrt{a})^{m-r} + (p - q\sqrt{a})^{m-r}}{2}$$

$$q' = \frac{(p + q\sqrt{a})^{m-r} - (p - q\sqrt{a})^{m-r}}{2\sqrt{a}}$$

les nombres p' & q' seront d'abord tels que $p'^2 - aq'^2 = 1$; & de plus q' sera toujours divisible par m, & $p' - p$, ou $p' - 1$ le sera aussi, suivant que r sera, ou ne sera pas nul.

20 Supposons à présent

$$x = \frac{(p' + q'\sqrt{a})^n + (p' - q'\sqrt{a})^n}{2},$$

$$y = \frac{(p' + q'\sqrt{a})^n - (p' - q'\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}};$$

si on développe ces expressions suivant les dernières formules de l'*Art.* 16, on verra que y' est toujours divisible par q', & que $x - p'$ ou $x - 1$ l'est aussi, suivant que n est pair ou impair; or q' est toujours divisible par m (*Art. préc.*), donc y' sera toujours divisible par m, & $x - p'$, ou $x - 1$ le sera aussi, suivant que n sera impair ou pair, quel que soit d'ailleurs le nombre n, pourvu qu'il soit plus grand que l'unité.

Or soit m' un nombre premier quelconque, & désignons par r' le reste de la division de $a^{\frac{m'-1}{2}}$ par m' (reste qui sera nécessairement ou o, ou bien ± 1), si l'on fait dans les formules précédentes $n = m' - r'$, on prouvera comme dans l'*Art. préc.* que y sera toujours divisible par m', & que $x - p'$ ou $x - 1$ le sera aussi,

ſuivant que r' ſera ou ne ſera pas nul; mais lorſque r' eſt nul, n eſt impair, & lorſque r' eſt ± 1, n eſt pair; donc y ſera toujours diviſible par $m m'$, & $x - p'$ ou $x - 1$ le ſera auſſi, ſuivant que r' ſera, ou ne ſera pas nul.

De plus, lorſque r' eſt nul, a eſt diviſible par m'; & ſi on développe l' expreſſion de p' de l' *Art. préc.* ſuivant les dernières formules de l'*Art.* 16, on verra que $p' - p$, ou $p' - 1$ ſera diviſible par a, ſuivant que $m - r$ ſera impair ou pair, c'eſt-à-dire, ſuivant que r ſera ou ne ſera pas nul; d' où, & de l' *Art. préc.* il s' enſuit que ſi, r' étant nul, r l' eſt auſſi, $p' - p$ ſera diviſible par $m m'$, & ſi r n' eſt pas nul, $p' - 1$ ſera diviſible par $m m'$.

D'où je conclus: 1° que y ſera toujours diviſible par $m m'$. 2° que, que ſi les deux reſtes r & r' ſont nuls à la fois, $x - p$ ſera diviſible par $m m'$, & que s' ils ne ſont pas tous les deux nuls, alors $x - 1$ ſera diviſible par $m m'$.

Or $x \pm y\sqrt{a} = (p' \pm q'\sqrt{a})^{m' - r'}$, & $p' \pm q'\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{m - r}$; donc, faiſant, pour abreger, $(m - r)(m' - r') = M$, on aura $x \pm y\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^M$, & par conſéquent

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^M + (p - q\sqrt{a})^M}{2},$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^M - (p - q\sqrt{a})^M}{2\sqrt{a}},$$

où l' on remarquera que M ſera toujours pair, lorſque r & r' ne ſeront pas nuls à la fois, & qu'au contraire M ſera pair, lorſque $r = 0$ & $r' = 0$.

On pourra pourſuivre ces opérations, & ces raiſonnemens auſſi loin qu'on voudra.

21 Donc en général, étant donné un nombre quelconque N impair, dont les facteurs premiers ſoient m, m', m'' &c.; ſi on nomme r, r', r'' &c. les reſtes des diviſions de $a^{\frac{m-1}{2}}$ par m, de $a^{\frac{m'-1}{2}}$ par m' de $a^{\frac{m''-1}{2}}$ par

m'', & ainſi de ſuite, & qu'on faſſe $M = (m - r)(m' - r')(m'' - r'')$ .... les expreſſions ſuivantes

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^M + (p - q\sqrt{a})^M}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^M - (p - q\sqrt{a})^M}{2\sqrt{a}}$$

ſatisferont d' abord à l' équation $x^2 - a y^2 = 1$; & de plus elles ſeront telles que y ſera toujours diviſible par N, & que $x - p$, ou $x - 1$ le ſera auſſi, ſuivant que M ſera impair, ou pair.

Les mêmes choſes auront lieu auſſi, en faiſant

$$M = n(m - r)(m' - r')(m'' - r'') \ldots$$

n étant un nombre quelconque entier poſitif, comme il eſt facile de le voir par ce que nous avons enſeigné dans les *Art. préc.*

Je dis de plus que ſi on fait

$$M = 2^s n(m - r)(m' - r')(m'' - r'') \ldots$$

s étant un nombre entier poſitif quelconque, la quantité y ſera diviſible par $2^s N$, & la quantité $x - 1$ le ſera auſſi.

Pour démontrer cette propoſition, il ſuffit de faire voir que y, & $x - 1$ ſeront toujours diviſibles par 2^s. Or ſi on fait, pour abreger, $M = 2^s R$, on aura $x \pm y\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^s R}$. Qu'on ſuppoſe 1° $p' \pm q'\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^{s-1} R}$, on aura $x \pm y\sqrt{a} = (p' \pm q'\sqrt{a})^2$; d'où $x = p'^2 + a q'^2$, & $y = 2p'q'$; mais on a auſſi $p'^2 - a q'^2 = 1$; donc $x - 1 = 2 a p' q'$. Donc y, & $x - 1$ ſeront diviſibles par $2q'$. Suppoſons 2° $p'' \pm q''\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^{s-2} R}$, l'on aura $p' + q'\sqrt{a} = (p'' \pm q''\sqrt{a})^2$, d' où $q' = 2p''q''$; ainſi q' ſera diviſible par $2q''$; de même, en faiſant $p''' \pm q'''\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^{s-3} R}$, on trouvera

trouvera que q'' sera divisible par $2q'''$, & ainsi de suite.

Donc si $s = 1$, y & $x - 1$ seront divisibles par 2, si $s = 2$, y & $x - 1$ seront divisibles par $2 \cdot 2$, si $s = 3$, ces quantités seront divisibles par $2 \cdot 2 \cdot 2$ &c.; donc en général y & $x - 1$ seront toujours divisibles par 2^s.

Par le moyen de ces théorèmes on peut résoudre le cas de l'*Art.* 14; car quel que soit le nombre donné, il est clair qu'on pourra toujours le réduire à cette forme $2^s N$, N étant impair; par conséquent, en connoissant deux nombres p & q qui satisfassent à l'équation $1 = p^2 - fq^2$, on pourra toujours en trouver deux autres, & même une infinité tels que x & y qui y satisfassent aussi, & dont l'un y soit multiple d'un nombre quelconque donné; au reste ces théorèmes nous seront encore fort utiles dans la suite.

Appliquons maintenant les méthodes précédentes à quelques exemples.

EXEMPLE I

22 Soit proposé de trouver deux nombres x & y tels que $x^2 - 13y^2 = 1$.

Je commence par extraire la racine carrée de 13 en fractions décimales; & je trouve, en poussant l'approximation jusqu'à neuf caractères, ce qu'on faira aisément à l'aide des grandes tables de logarithmes d'Ulacq; je trouve dis-je $\sqrt{13} = 3,605\ 519\ 50 = \frac{36055195}{10000000}$.

Je divise le numérateur de cette fraction par son dénominateur, ensuite le dénominateur par le reste, & ainsi de suite, comme si je voulois trouver la plus grande commune mesure entre le numérateur & le dénominateur, & ces différentes divisions me donnent ces quotiens 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1 &c. à l'aide des-

quels je forme, en commençant par $\frac{1}{0}$, les fractions suivantes

$$\frac{1}{0},\ \overset{1}{\frac{3}{1}},\ \overset{1}{\frac{4}{1}},\ \overset{1}{\frac{7}{2}},\ \overset{1}{\frac{11}{3}},\ \overset{6}{\frac{18}{5}},\ \overset{1}{\frac{119}{33}},\ \overset{1}{\frac{137}{38}},\ \overset{1}{\frac{256}{71}}\ \&c.$$

où l' on voit que le numérateur de chaque fraction est égal à la somme du numérateur de la fraction précédente multiplié par le nombre qui est au dessus (ces nombres ne sont autre chose que les quotiens dont il s' agit écrits de suite, & suivant l'ordre dans lequel on les a trouvés), & du numérateur de la fraction qui est avant celle-ci ; & il en est de même des dénominateurs; ce qui s'accorde avec ce que l' on a dit dans l' *Art.* 1.

Je substitüe maintenant les numérateurs de ces différentes fractions à la place de x, & les dénominateurs correspondans à la place de y dans la formule $x^2 - ay^2 = R$, j' ai

x	y	R
1	0	1
3	1	-4
4	1	3
7	2	-3
11	3	4
18	5	-1
119	33	4
137	38	-3
256	71	3
&c.	&c.	&c.

Je remarque ici deux valeurs de x & de y, savoir $x = 4$, $y = 1$, & $x' = 256$, $y' = 71$, lesquelles donnent également $R = 3$; qui est un nombre premier; ainsi je puis faire usage de la méthode de l'*Art.* 6.

J' aurai donc $a = 13$, $R = 3$, $x = 4$, $y = 1$, $x' = 256$, $y' = 71$; donc $xy' + yx' = 540$ qui eſt diviſible par 3; de ſorte que j'aurai d'abord $q = \frac{540}{3} = 180$; enſuite $xx' + ayy' = 1947$ qui eſt auſſi diviſible par 3; d'où je tire $p = \frac{1947}{3} = 649$; ainſi les nombres cherchés ſeront $x = 649$, & $y = 180$; en effet le carré de 649 eſt 421201, & celui de 180 eſt 32400, lequel étant multiplié par 13 donne 421200; de ſorte qu'on aura $(649)^2 - 13(180)^2 = 1$.

On auroit pû trouver d'abord ces mêmes valeurs de x & de y à l'aide de la ſuppoſition qui donne $R = -4$, & qui eſt par conſéquent dans le cas de la méthode de l'*Art.* 11. En effet, puiſque $x = 3$, & $y = 1$, on aura, en prenant le ſigne inférieur, $p = \frac{x^2 + 3}{2} = 6$, $q = \frac{x^2 + 1}{2} = 5$; & par conſéquent $xp = 18$, $yq = 5$, & $(xp)^2 + a(yq)^2 = 649$, $2xypq = 180$.

Au reſte, en continuant la ſérie des fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{3}{1}$ &c., on trouvera celle-ci $\frac{393}{109}$, $\frac{649}{180}$ &c., d'où l'on aura

x	y	R
393	109	-4
649	180	1

d'où l'on voit que les nombres 649 & 180 ſont les plus petits qui ſatisfaſſent à l'équation propoſée $x^2 - 13y^2 = 1$ (*Art.* 18); de ſorte qu'en ſubſtituant ces nombres à la place de p & q dans les formules de l'*Art.* 16 ou 17, on trouvera toutes les autres valeurs poſſibles de x & de y, ainſi déſignant ces valeurs par x, x', x'' &c., & par y, y', y'' &c., on aura

$x = 649$ $\quad y = 180$
$x' = 842401$ $\quad y' = 253640$
$x'' = 1093435849$ $\quad y'' = 303264540$
&c. &c.

& l' on pourra être aſſuré qu'il n' y a pas d' autres nombres plus petits que ceux-ci qui reſolvent le *Problême* (*Art.* 17).

EXEMPLE 2

23 Soit propoſé de trouver deux nombres x & y qui ſatisfaſſent à l' équation $x^2 - 19y^2 = 1$.

La racine carrée de 19 ſe trouve par les grandes tables des logarithmes, 4, 35889494, enſorte qu'on a $\sqrt{19} = \frac{435889494}{100000000}$; d'où l'on tire par l' opération indiquée dans l' *Exemple précédent*, les quotiens 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2 &c. leſquels fourniſſent ces fractions

$$\frac{1}{0}, \overset{2}{\frac{4}{1}}, \overset{1}{\frac{9}{2}}, \overset{3}{\frac{13}{3}}, \overset{1}{\frac{48}{11}}, \overset{2}{\frac{61}{14}}, \overset{8}{\frac{170}{39}} \text{ \&c.}$$

dont les numérateurs étant ſubſtitués pour x, & les dénominateurs pour y dans l' équation $x^2 - 19y^2 = R$, on aura

x	y	R
1	0	1
4	1	-3
9	2	5
13	3	-2
48	11	5
61	14	-3
170	39	1
&c.	&c.	&c.

d'où l'on voit que 170, & 39 sont les plus petits nombres qui satisfassent à l'équation proposée; & par le moyen de ceux-ci on pourra trouver tous les autres nombres possibles qui resolvent la question.

EXEMPLE 3

24 On demande deux nombres x, & y qui satisfassent à cette équation $x^2 - 109y^2 = 1$.

Je trouve d'abord $\sqrt{109} = 10,4403065 = \frac{104403065}{10000000}$;
d'où je tire le quotiens suivans 10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 2 &c.; à l'aide desquels je forme ces fractions

$$\frac{1}{0},\ \overset{2}{\frac{10}{1}},\ \overset{3}{\frac{21}{2}},\ \overset{1}{\frac{73}{7}},\ \overset{2}{\frac{94}{9}},\ \overset{4}{\frac{261}{25}},\ \overset{1}{\frac{1138}{109}},\ \overset{6}{\frac{1399}{134}},\ \overset{6}{\frac{9532}{913}}\ \&c.$$

dont les numérateurs étant substitués pour x, & les dénominateurs pour y dans l'équation $x^2 - 109y^2 = R$, j'aurai

x	y	R
1	0	1
10	1	-9
21	2	5
73	7	-12
94	9	7
261	25	-4
1138	109	15
1399	134	-3
9532	913	3
&c.	&c.	&c.

Ici il faudroit pousser la série asses loin pour trouver les valeurs de x & de y qui donnent $R = 1$; ainsi il vaudra mieux se servir des méthodes de l'*Art.* 6 & *suiv.*

Pour cela j' obſerve qu'il y a deux ſuppoſitions dont l' une donne $R = 3$, & l' autre $R = -3$; de ſorte qu'à cauſe que 3 eſt un nombre premier, on pourra faire uſage de la méthode des *Art.* 6 & 12.

J' aurai donc $a = 109$, $R = 3$, $x = 1399$, $y = 134$, $x' = 9532$, $y' = 913$; donc $xy' + yx' = 2554575$, qui étant diviſible par 3, j' aurai d' abord

$q = \frac{2554575}{3} = 851525$; enſuite $xx' + ayy' = 26670546$, qui étant auſſi diviſé par 3 donnera

$p = \frac{26670546}{3} = 8890182$.

Or comme dans les équations $x^2 - ay^2 = R$, & $x'^2 - ay'^2 = -R$ la quantité R a des ſignes différens, le produit de ces deux équations ſera, en prenant le ſigne +, $(xx' + ayy')^2 - a(xy' + yx')^2 = -R^2$; de ſorte qu'en diviſant par A^2 on aura $p^2 - aq^2 = -1$; d' où l' on voit que les valeurs trouvées de p & q ne ſatisfont pas à l' équation propoſée ; mais en prenant le carré de l'équation $p^2 - aq^2 = -1$, on aura $(p^2 + aq^2)^2 - a(2pq)^2 = 1$, de ſorte que les valeurs de x & de y qui reſolvent le *Problême*, ſont $x = p^2 + aq^2$, & $y = 2pq$, ſavoir

$2 = 158070671986249$, & $y = 15140424455100$

& ces valeurs ſont en même tems les plus petites qui ſatisfaſſent à l' équation $x^2 - 109y^2 = 1$, comme on peut facilement s' en convaincre en pouſſant la ſérie des fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{10}{1}$ &c. juſqu'à ce que l' on en trouve une qui ſoit formée de ces mêmes nombres, & en calculant toutes les valeurs de la formule $x^2 - ay^2$ qui répondent à ces mêmes fractions.

Ces exemples ſont ſuffiſans pour faire connoitre l'uſage & l'eſprit de nos méthodes ; nous ajouterons ſeulement quelques remarques, qui pourront mériter l'attention des Géomètres.

Remarque 1re

25 En examinant les valeurs de R des deux premiers *Exemples*, on voit que dans le premier les mêmes nombres ſe trouvent ſucceſſivement avec les ſignes $+$ & $-$, au lieu que dans le ſecond, les nombres qui ont le ſigne $+$ ſont tous différens de ceux qui ont le ſigne $-$.

Pour trouver la raiſon de cette différence, ſuppoſons en général $x^2 - ay^2 = R$, & $x'^2 - ay'^2 = -R$, ce qui eſt le cas de l'*Exemple* 1 ; & l'on aura $x^2 - ay^2 = -x'^2 - ay'^2$; ſavoir $x^2 + x'^2 = a(y^2 + y'^2)$; d'où l'on voit que $x^2 + x'^2$ doit être diviſible par a. Or l'on ſait que la ſomme de deux carrés n'eſt diviſible que par les nombres qui ſont auſſi la ſomme de deux carrés ; donc pour que les deux équations dont il s'agit ayent lieu en même tems, il faut néceſſairement que le nombre donné a ſoit la ſomme de deux carrés ; c'eſt ce qui a lieu dans l'*Exemple premier*, où $a = 13 = 9 + 4$; au lieu que dans l'*Exemple ſecond*, $a = 19$ qui n'eſt point la ſomme de deux carrés. Ainſi toutes les fois que a ne ſera point la ſomme de deux carrés, ce qui arrive, comme l'on ſait, lorſque quelqu'un des facteurs premiers de a eſt de cette forme $4m + 3$, on pourra être aſſuré qu'aucun nombre ne pourra être en même tems de la forme $x^2 - ay^2$, & de celle-ci $ay'^2 - x'^2$, quels que puiſſent être x, y ; x', & y'.

Mais on ne peut pas dire réciproquement que lorſque a eſt la ſomme de deux carrés tout nombre qui eſt de la forme de $x^2 - ay^2$ eſt auſſi de la forme de $ay'^2 - x'^2$;

au moins je n' ai pû parvenir jufqu'à préfent à m' affurer en général de la vérité de cette propofition; quoique je l' aye d' ailleurs trouvée vraie dans un grand nombre de cas particuliers.

Au refte il eft évident que fi -1 eft de la forme de $x^2 - a y^2$ tout nombre pofitif qui fera de la même forme, fera auffi de la forme de $a y'^2 - x'^2$; car foit $-1 = p^2 - a q^2$, & $R = x^2 - a y^2$, on aura, en multipliant enfemble, ces deux équations, & changeant les fignes des deux membres $R = a(yp \pm x q)^2 - (xp \pm a y q)^2$. Or fi on trouve dans deux feuls cas particuliers $R = x^2 - a y^2$, & $-R = x'^2 - a y'^2$, & que R foit un nombre premier, alors on parviendra toujours à cette équation $-1 = p^2 - a q^2$, comme nous l' avons vû dans l' *Exemple troifiéme*; de forte qu'on en pourra conclure d' abord que tout nombre qui fera de la forme de $x^2 - a y^2$, fera auffi de la forme de $a y'^2 - x'^2$.

Remarque 2^de^

26 Suppofons maintenant que l' on ait l' équation $t^2 - a u^2 = -1$ en prenant les carrés, on aura $(t^2 + a u^2)^2 - a(2 t u) = 1$, d' où l' on voit que $t^2 + a u^2$ eft une des valeurs de x qui fatisfont à l' équation $x^2 - a y^2 = 1$, & que $2 t u$ eft la valeur correfpondante de y; mais nous avons démontré (*Art.* 17) que toutes les valeurs de x & de y qui fatisfont à cette équation font renfermées dans ces formules

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

m étant un nombre quelconque pofitif, & p, q étant les plus

plus petites valeurs qui ſatisfaſſent à la même équation $x^2 - a y^2 = 1$; donc il faudra que l'on ait

$$t^2 + a u^2 = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$2 t u = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}$$

équations qui ſe réduiſent à celle-ci

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (p \pm q\sqrt{a})^m.$$

Or je dis d'abord que m ne ſauroit être un nombre pair; car ſoit $m = 2n$, on aura $(t \pm u\sqrt{a})^2 = (p \pm q\sqrt{a})^{2n}$, & extrayant la racine carrée $t + u\sqrt{a} = \pm (p \pm q\sqrt{a})^n$; or $(p \pm q\sqrt{a})^n$ ſe réduit à cette forme $p' \pm q'\sqrt{a}$ en faiſant (*Art.* 15)

$$p' = \frac{(p + q\sqrt{a})^n + (p - q\sqrt{a})^n}{2}$$

$$q' = \frac{(p + q\sqrt{a})^n - (p - q\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}}$$

donc puiſque t & u ſont (*hip.*) des nombres poſitifs, & que p' & q' le ſont auſſi, on aura $t = p'$ & $u = q'$; mais à cauſe de $p^2 - a q^2 = 1$, on aura auſſi $p'^2 - a q'^2 = 1$; donc on auroit $t^2 - a u^2 = 1$; ce qui eſt contradictoire; donc m doit néceſſairement être un nombre impair.

Soit donc $m = 2n + 1$, & l'on aura

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (p \pm q\sqrt{a})^{2n} \times (p \pm q\sqrt{a});$$

d'où l'on voit que $p \pm q\sqrt{a}$ doit être un carré, or quelle que puiſſe être la racine carrée de $p \pm q\sqrt{a}$; il eſt clair, à cauſe de la quantité irrationelle $\sqrt{a}$, qu'elle ne peut être que de cette forme $r \pm s\sqrt{a}$; de ſorte que l'on aura $p \pm q\sqrt{a} = (r \pm s\sqrt{a})^2 = r^2 + a s^2 \pm 2 r s\sqrt{a}$; & par conſéquent $p = r^2 + a s^2$, & $q = 2rs$.

Ainſi à moins que les quantités p & q ne ſoient de cette forme, il eſt impoſſible que l'équation $t^2 - a u^2 = -1$ ait lieu; or connoiſſant les valeurs de ces quan-

tités il eſt facile de vérifiêr ſi elles ſont de la forme dont il s'agit ; car premiérement il faudra que q ſoit un nombre pair ; enſuite il eſt évident que r & s ne peuvent être que les facteurs de la moitiê de q; de ſorte qu'il ne s'agira que de chercher tous ces facteurs, & de les ſubſtituer à la place de r & s dans l'équation $r^2 + a s^2 = p$.

Si on peût par ce moyen trouver deux valeurs de r & s, alors, comme $p \pm q \sqrt{a} = (r + s\sqrt{a})^2$, on aura $(t \pm u\sqrt{a})^2 = (r + s\sqrt{a})^{2m}$, & faiſant

$$r' = \frac{(r + s\sqrt{a})^m + (r - s\sqrt{a})^m}{2}$$

$$s' = \frac{(r + s\sqrt{a})^m - (r - s\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}$$

on aura $(t + u\sqrt{a})^2 = (r' \pm s'\sqrt{a})^2$; d'où $t \pm u\sqrt{a} = r' + s'\sqrt{a}$ & $t = r'$, $u = r'$

Or il eſt facile de voir que les valeurs de r' & s' ſont les plus petites lorſque $m = 1$; auquel cas on a $r' = r$, & $s' = s$; donc les plus petites valeurs de t & de u ſeront $t = r$, & $u = s$; donc r & s ſeront les plus petites valeurs qui ſatisfaſſent à l'équation $t^2 - au^2 = -1$.

USAGE

DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES

Pour la résolution des équations du second dégré à deux inconnües, par des nombres entiers.

27. Soit proposée l'équation

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

dans laquelle α, β, γ, δ, ε, & ζ sont des nombres donnés entiers positifs, ou négatifs, & x, & y sont deux nombres inconnus qu'il s'agit de déterminer de manière qu'ils soient rationels & entiers.

Qu'on multiplie toute l'équation par 4α, & qu'on la mette sous cette forme

$$(2\alpha x + \beta y + \delta)^2 = (\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Soit pour abreger

$$2\alpha x + \beta y + \delta = u$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = a$$

$$\beta\delta - 2\alpha\varepsilon = b$$

$$\delta^2 - 4\alpha\zeta = c$$

& l'équation précédente deviendra

$$u^2 = ay^2 + 2by + c.$$

Cette équation étant multipliée par a peut se mettre sous la forme suivante

$$au^2 = (ay + b)^2 + ac - b^2$$

ou bien, en faisant

$$ay + b = t,$$

$$b^2 - ac = R,$$

sous celle-ci

$$t^2 - au^2 = R;$$

d'où l'on voit d'abord que le nombre donné R doit être de cette forme $t^2 - a u^2$ pour que le *Problême* admette une solution rationelle.

J'ai donné ailleurs la méthode de reconnoitre si un nombre donné est de la forme de $t^2 - a u^2$, a étant aussi donné; & j'ai fait voir que pour qu'un nombre quelconque R soit de cette forme, il faut que chacun de ses facteurs premiers que je désignerai par r, soit tel que $a^{\frac{r-1}{2}} - 1$ soit divisible par r; si cette condition n'a pas lieu on peut assurer hardiment que R n'est pas de la forme dont il s'agit, & qu'ainsi le *Problême* n'admet aucune solution rationelle.

28 Supposons maintenant qu'on ait reconnu que le nombre R est en effet de la forme de $t^2 - a u^2$, & qu'on ait trouvé en même tems deux nombres P & Q tels que $R = P^2 - a Q^2$, en ce cas le *Problême* sera résoluble en nombres, & il pourra même l'être de plusieurs manières; c'est ce que nous allons examiner.

Il est d'abord clair que puisque $R = P^2 - a Q^2 = t^2 - a u^2$, il n'y aura qu'à supposer $t = P$, & $u = Q$; ce qui donnera $a y + b = P$, & $2 \alpha x + \beta y + \delta = Q$, & par conséquent

$$y = \frac{P - b}{a},\ x = \frac{Q - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta (P - b)}{2 \alpha a}.$$

Or je remarque 1° que les nombres P & Q peuvent êtres pris positivement ou négativement à volonté; ce qui donnera d'abord quatre solutions différentes.

2° Si le nombre R est le produit de deux, ou de plusieurs nombres de la forme de $P^2 - a Q^2$, il sera aussi plusieurs fois de cette même forme; de sorte qu'on pourra trouver différentes valeurs de P & de Q.

En effet si R est le produit de deux facteurs tels que $p^2 - a q^2$, & $p'^2 - a q'^2$, on aura (*Art.* 5) $R = (p p' \pm a q q')^2$

$- a(pq' \pm qp')^2$; ainſi on pourra ſuppoſer $P = pp' + aqq'$, & $Q = pq' + qp'$, ou $P = pp' - aqq'$, & $Q = pq' - qp'$.

En général ſi R eſt exprimé par $A^m B^n C^r D^s$ . . . . , A, B, C, D &c. étant des nombres de la forme de $P^2 - aQ^2$, mais qui ne ſoient qu'une ſeule fois de cette forme ; le nombre R ſera (comme je l' ai démontré ailleurs) de la même forme autant de fois ni plus, ni moins qu'il y a d'unités dans la moitié de ce nombre $(m+1)$ $(n+1)$ $(r+1)$ $(s+1)$ . . . . s' il eſt pair, ou dans la moitié de ce même nombre augmenté de l' unité s' il eſt impair. Ainſi les quantités P & Q auront chacune autant de valeurs différentes qu'il y a d' unités dans $\frac{(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)\ldots}{2}$ ou dans $\frac{(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)\ldots+1}{2}$ & chacune de ces valeurs fournira par conſéquent quatre ſolutions du *Problême.*

29 Examinons ſéparément le cas, où a eſt un nombre poſitif, & celui où a eſt un nombre négatif.

Soit 1° a un nombre négatif $= -e$, enſorte que e ſoit poſitif, & la forme du nombre R ſera $P^2 + eQ^2$; donc puiſque il eſt impoſſible que l' unité ſoit de cette forme, le nombre des facteurs A, B, C, D &c. (*Art. préc.*) qui ſont ſuppoſés être de cette forme ſera néceſſairement limité ; donc le nombre des valeurs de P & de Q le ſera auſſi ; par conſéquent le *Problême* ne pourra avoir qu'un certain nombre de ſolutions rationelles, qu'il ſera aiſé de trouver par la méthode précédente ; & s' il arrive qu'aucune de ces ſolutions ne donne des nombres entiers pour les valeurs des inconnües x & y, on en devra conclure que le *Problême* n'admet point de ſolution en entiers.

Suppoſons 2° que a ſoit un nombre poſitif; dans ce cas comme l' unité eſt toujours de la forme de $P^2 - aQ^2$

quel que ſoit le nombre a, il eſt clair que le nombre des facteurs de R de la forme dont il s'agit ſera infini, parcequ'on peut toujours regarder le nombre R comme multiplié par une puiſſance quelconque de l'unité ; ainſi ou le *Problême* n'admettra point de ſolution du tout, ou bien il en admettra néceſſairement une infinité.

Pour comprendre toutes ces ſolutions dans deux formules générales, ſoient p' & q' deux nombres tels que $p'^2 - a q'^2 = 1$, & multipliant cette équation par l'équation $P^2 - a Q^2 = R$ on aura $(P p' \pm a Q q')^2 - a (P q' \pm Q p')^2 = R$; d'où l'on voit qu'ayant trouvé deux nombres P & Q qui ſatisfaſſent à l'équation $P^2 - aQ^2 = R$, on pourra mettre dans les formules de l'*Art.* 28 $Pp' \pm aQq'$ à la place de P, & $Pq' \pm Qp'$ à la place de Q; ce qui donnera en faiſant abſtraction de l'ambiguité des ſignes, à cauſe que les nombres P & Q peuvent toujours être pris poſitivement ou négativement,

$$y = \frac{Pp' - b}{a} + Qq'$$

$$x = \frac{(P + \beta Q)q' + Qp' - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta(Pp' - b)}{2\alpha a}$$

Or nous avons démontré (*Art.* 17) que ſi p & q ſont les plus petits nombres qui ſatisfaſſent à l'équation $p'^2 - a q'^2 = 1$ tous les autres nombres poſſibles ſont renfermés dans ces formules

$$p' = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$q' = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}$$

en prenant pour m tous les nombres naturels 1, 2, 3 &c. à l'infini ; donc ſi on ſubſtitüe ces valeurs de p' & q' dans les formules précédentes, on aura

$$y = \frac{P + Q\sqrt{a}}{2a}(p + q\sqrt{a})^m + \frac{P - Q\sqrt{a}}{2a}(p - q\sqrt{a})^m - \frac{b}{a}$$

$$x = \frac{\alpha Q - \beta P + (P + \beta Q)\sqrt{a}}{4a\alpha}(p + q\sqrt{a})^m$$

$$- \frac{\alpha Q - \beta P - (P + \beta Q)\sqrt{a}}{4a\alpha}(p + q\sqrt{a})^m$$

$$- \frac{\delta - \frac{\beta b}{a}}{2\alpha}.$$

Donc si on met dans ces formules les différentes valeurs de P & Q qui naissent des facteurs de R qui sont de la forme de $P^2 - a\,Q^2$, & qui sont plus grands que l' unité ; & qu'on fasse successivement $m = 1, 2, 3$ &c., on aura absolument toutes les solutions rationelles possibles de l' équation proposée.

30 Soit pour plus de simplicité

$$\alpha Q - \beta P = P',$$
$$P + \beta Q = Q',$$

& l' on aura

$$y = \frac{P p' + a Q q' - b}{a}$$

$$x = \frac{P' p' + a Q' q' + b\beta - a\delta}{2a\alpha};$$

donc, à moins que les numérateurs de ces deux fractions ne soient divisibles exactement par leurs dénominateurs, les inconnûes x & y ne pourront être des nombres entiers.

Supposons

$$y' = \frac{P'(p' - 1) + a Q' q'}{a}$$

$$x' = \frac{P'(p' - 1) + a Q' q'}{\alpha 2a}$$

& nous aurons

$$y = \frac{P - b}{a} + y'$$

$$x = \frac{P' + b\beta - a\delta}{2a\alpha} + x'.$$

Or je dis que l' on peut toujours prendre l' expoſant m, dans les valeurs de p' & q', tel que x' & y' ſoient des nombres entiers.

Pour cela on décompoſera le nombre α en ſes facteurs premiers, enſorte que l' on ait $\alpha = 2^s m' m'' m''' \ldots\ldots$ (m', m'', m''' &c. étant des nombres premiers) enſuite on diviſera $a^{\frac{m'-1}{2}}$ par m', & on nommera le reſte r', on diviſera de même $a^{\frac{m''-1}{2}}$, & on nommera le reſte r'', & ainſi de ſuite; ces reſtes étant trouvés, on fera m égal à un multiple quelconque de $2^{s+1} (m' - r')(m'' - r'')(m''' - r''') \ldots\ldots$; car, par ce que nous avons démontré plus haut (*Art.* 21), il eſt clair que $p' - 1$, & q' ſeront diviſibles par 2α; de plus il eſt facile de voir par les formules de l' *Art.* 16 que $p' - 1$ ſera auſſi diviſible par a, à cauſe que m eſt pair; par conſéquent x' & y' ſeront néceſſairement des nombres entiers.

Donc ſi les quantités $\frac{P - b}{a}$ & $\frac{P' + b\beta - a\delta}{2a\alpha}$ ſont des nombres entiers, on pourra trouver une infinité de valeurs de x & de y en nombres entiers; or ces quantités ne ſont autre choſe que les valeurs de x & de y qui répondent à $m = 0$, ce qui donne $p' = 1$, $q' = 0$, & par conſéquent $x' = 0$, & $y' = 0$; c'eſt-à-dire les mêmes valeurs de x & de y que nous avons trouvées d'abord (*Art.* 28); d' où il s'enſuit que ſi l'on trouve une ſeule ſolution du *Probléme* en nombres entiers, dans le cas de a poſitif, on pourra par nos formules en trouver une infinité

finité d' autres en prenant pour P & Q les nombres qui répondent à la ſolution donnée, & pour m un multiple quelconque de $2^{s+1}(m'-r')(m''-r'')(m'''-r''')\ldots$

Au reſte il eſt bon de remarquer encore qu'il ne ſera pas toujours néceſſaire que m ſoit un multiple de ce nombre pour que x' & y' ſoient des nombres entiers; car il eſt viſible, par exemple, que ſi P' & Q' étoient diviſibles par α, il ſuffiroit alors que m fût un multiple de 2, c'eſt-à-dire un nombre pair; & ainſi des autres cas ſemblables.

A Berlin ce 20 Septembre 1768.

SUR L' INTÉGRATION

De quelques équations différentielles dont les indéterminées ſont ſéparées, mais dont chaque membre en particulier n' eſt point intégrable.

PAR M. DE LA GRANGE.

1 La ſéparation des indéterminées eſt regardée avec raiſon comme un des meilleurs moyens que les Géomètres ayent imaginés pour intégrer les équations différentielles du premier ordre. En effet il eſt clair que quand on a ſéparé les indéterminées dans une équation, on peut alors regarder chacun de ſes membres comme une différentielle particulière qui ne contient qu'une variable; de ſorte qu'il n' y a plus qu'à prendre ſéparément l'intégrale de l'un & de l'autre membre, en y ajoutant une conſtante arbitraire. Delà il ſemble qu'on pourroit conclure que lorſque les deux membres de l' équation ainſi ſéparée ne ſont point intégrables, l' équation elle même ne doit pas l' être non plus; c' eſt ce qui eſt vrai en effet dans la plus part des équations différentielles; mais il ſe trouve néanſmoins des cas, où cette concluſion ſeroit fauſſe, & qui vont faire la matière de ce *Mémoire.*

2 Pour commencer par les cas les plus ſimples nous prendrons l' équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

dans laquelle tout eſt ſéparé comme l' on voit. Il eſt d' abord évident que les deux membres de cette équation ne ſont point intégrables, au moins algébriquement; cependent on ſait que l' équation en elle même admet une in-

tégrale algébrique. En effet, comme $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ eſt la différentielle de l' arc dont le *ſinus* eſt x, de même que $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ eſt la différentielle de l' arc dont le *ſinus* eſt y, on aura, en prenant les arcs au lieu de leurs différentielles, & ajoutant une conſtante quelconque C,

$$Arc.\ \text{ſin.}\ x = Arc.\ \text{ſin.}\ y + C;$$

donc ſi on ſuppoſe que C ſoit auſſi exprimé par un arc dont le *ſinus* ſoit a, on aura

$$Arc.\ \text{ſin.}\ x = Arc.\ \text{ſin.}\ y + Arc.\ \text{ſin.}\ a,$$

c'eſt-à-dire que l'arc qui répond au *ſinus* x doit être égal à la ſomme des arcs qui répondent aux *ſinus* y & a; de ſorte qu'on aura par les théorémes connus

$$x = y\sqrt{(1-a^2)} + a\sqrt{(1-y^2)} \quad . \; . \; . \quad (B)$$

c' eſt l' intégrale de l' équation propoſée, dans laquelle a eſt la conſtante arbitraire.

3 J' avoüe qu'on peut trouver cette intégrale ſans le ſecours des théorémes ſur les *ſinus*, en intégrant chaque membre de l' équation (A) par les *logarithmes* imaginaires, & paſſant enſuite des *logarithmes* aux nombres. De cette manière on aura

$$l[x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-x^2)}] = l[y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-y^2)}] + l[a\sqrt{-1} + \sqrt{(1-a^2)}],$$

d' où l' on tire

$$x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-x^2)} = [y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-y^2)}] \times [a\sqrt{-1} + \sqrt{(1-a^2)}] = [y\sqrt{(1-a^2)} + a\sqrt{(1-y^2)}]\sqrt{-1} + \sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-a^2)} - ay;$$

& comparant la partie imaginaire du premier membre à la partie imaginaire du ſecond, & la partie réelle avec la réelle; on aura comme ci-deſſus

$$x = y\sqrt{(1-a^2)} + a\sqrt{(1-y^2)},$$

ou bien encore, ce qui revient au même dans le fond

$$\sqrt{(1-x^2)} = \sqrt{(1-a^2)}\sqrt{(1-y^2)} - ay.$$

4 Mais ſi d'un coté cette méthode eſt un peu plus directe que la précédente, de l'autre elle a auſſi l'inconvénient de dépendre des quantités tranſcendantes; en effet puiſque l'intégrale de l'équation propoſée eſt abſolument algébrique, n'eſt-il pas naturel de penſer qu'il y ait auſſi une voie purément algébrique pour y parvenir?

Qu'on multiplie les deux membres de l'équation (*A*) en croix, on aura

$$dx\sqrt{(1-y^2)} = dy\sqrt{(1-x^2)}$$

& intégrant par parties

$$x\sqrt{(1-y^2)} + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{(1-y^2)}} =$$

$$y(\sqrt{1-x^2}) + \int \frac{vx\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + C$$

Or l'équation (*A*) étant multipliée par xy, & enſuite intégrée donne

$$\int \frac{xy\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

donc l'équation précédente deviendra

$$x\sqrt{(1-y^2)} = y\sqrt{(1-x^2)} + C;$$

équation algébrique, qui en faiſant $C = a$ revient au même que l'équation (*B*) de l'*Art.* 2.

5 On pourroit auſſi appliquer la même méthode à l'intégration de l'équation générale

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}} \quad \ldots\ldots\ (C)$$

car multipliant d'abord en croix, & prenant enſuite l'intégrale de chaque membre par parties on a

$$x\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)} - \int \frac{(\beta+2\gamma y)\,x\,dy}{2\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}} =$$

$$y\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} - \int \frac{(\beta+2\gamma x)\,y\,dx}{2\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} + C.\ (D)$$

Or l' équation (C) étant multipliée par xy, & enſuite intégrée donne

$$\int \frac{xy\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}}$$

De plus on a par la même équation

$$\int \frac{y\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)} - \frac{\beta}{2\gamma}\int \frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}}$$

& de même

$$\int \frac{x\,dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} - \frac{\beta}{2\gamma}\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} - \frac{\beta}{2\gamma}\int \frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}}.$$

Donc faiſant ces ſubſtitutions dans l' équation (D), & effaçant ce qui ſe détruit on aura cette équation algébrique

$$x\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)} - \frac{\beta}{2\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} =$$

$$y\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} - \frac{\beta}{2\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)} + C,$$

ou bien

$$(x+\frac{\beta}{2\gamma})\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)} =$$

$$(y+\frac{\beta}{2\gamma})\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} + C$$

qui eſt l' intégrale de l' équation propoſée.

6 Voila donc, comme l'on voit, une méthode bien ſimple pour intégrer ces ſortes d'équations, dont chaque membre en particulier dépend de la quadrature du cercle ou de l' hiperbole; mais il y a encore d' autres équations plus gé-

nérales que les précédentes qui admettent aussi des intégrales algébriques, quoique chacun de leurs membres ne soit en aucune façon intégrable.

Ces équations sont comprises dans la formule suivante

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}} =$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}},$$

dont l'intégrale est exprimée en général par l'équation $A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy + E(x^2y + y^2x) + Fx^2y^2 = 0$.

En effet si on différentie cette équation on a
$[B + 2Cx + Dy + E(2xy + y^2) + 2Fxy^2]\,dx +$
$[B + 2Cy + Dx + E(2yx + x^2) + 2Fyx^2]\,dy = 0$.

Mais en tirant de la même équation la valeur de x en y, & ensuite celle de y en x, on trouvera

$$2x(C + Ey + Fy^2) + B + Dy + Ey^2 = \sqrt{[(B + Dy + Ey^2)^2 - 4(A + By + Cy^2)(C + Ey + Fy^2)]}$$

& de même

$$2y(C + Ex + Fx^2) + B + Dx + Ex^2 = \sqrt{[(B + Dx + Ex^2)^2 - 4(A + Bx + Cx^2)(C + Ex + Fx^2)]}$$

de sorte qu'en faisant

$$\alpha = B^2 - 4AC$$
$$\beta = 2BD - 4(AE + BC)$$
$$\gamma = 2BE + D^2 - 4(AF + C^2 + BE)$$
$$\delta = 2DE - 4(BF + CE)$$
$$\varepsilon = E^2 - 4CF$$

on aura

$$dx\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)} = dy\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)},$$

& par conséquent

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}} =$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}};$$

qui eſt l' équation différentielle propoſée. Or comme les coéficiens donnés α, β, γ, δ, ε ne ſont qu'au nombre de cinq, & que les coéficiens indéterminées A, B, C, D, E, F ſont au nombre de ſix, il eſt clair qu'il en reſtera toujours un d' indéterminé qui tiendra lieu de la conſtante arbitraire qui doit ſe trouver dans l' intégrale.

Cette intégration eſt d' autant plus remarquable qu'elle n'eſt dûe qu'à une eſpèce de hazard heureux, & qu'il ne ſeroit pas même poſſible d'y arriver par les méthodes connües des Géomètres juſqu'à préſent (*voyez dans les Tômes VI. & VII. des nouveaux Commentaires de Petersbourg pluſieurs excellens Mémoires de* M. Euler *ſur ce ſujet*). J' ai donc crû que ce ſeroit un travail avantageux aux progrès de l' analiſe que de chercher une méthode directe pour intégrer les équations de cette eſpèce, & voici celle que j' ai trouvée. Elle eſt fondée ſur le principe ſuivant.

7 Quand on a une équation différentielle du premier dégré dont on ne peut trouver l' intégrale, il faut la différentier & examiner ſi en combinant cette nouvelle équation avec la propoſée, on pourroit trouver une équation intégrale du premier dégré autre que l'équation propoſée; car alors en chaſſant par le moyen de ces deux équations les premières differences, on aura une équation algébrique qui ſera l' intégrale cherchée.

Si l' intégration ne réuſſit pas de cette manière, il faut paſſer à la différentielle du troiſiéme dégré, & chercher ſi on pourroit ainſi parvenir à une nouvelle équation du ſecond dégré; en ce cas il n' y auroit plus qu'à éliminer les différences ſecondes & troiſiémes par le moyen de l' équation propoſée, & de ſa différentielle. Et ainſi de ſuite.

8 Cela posé je vais commencer par chercher l'intégrale de l'équation (C) de l'*Art.* 5; pour cela je fais $dt = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$, ensorte que l'on ait les deux équations suivantes

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$$

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2)}}.$$

Je multiplie ces deux équations en croix, & je les quarre pour les délivrer du signe radical, ce qui me donne ces deux-ci

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \alpha + \beta y + \gamma y^2.$$

Je différentie maintenant ces équations en prenant dt pour constante, & divisant la première par dx, & la seconde par dy j'aurai

$$\frac{2\,d^2x}{dt^2} = \beta + 2\gamma x$$

$$\frac{2\,d^2y}{dt^2} = \beta + \gamma y.$$

Or en ajoutant ces deux équations ensemble, & faisant $x + y = p$, on aura l'équation

$$\frac{2\,d^2p}{dt^2} = 2\beta + 2\gamma p,$$

laquelle étant multipliee par dp, & ensuite intégrée donne

$$\frac{dp^2}{dt^2} = k + 2\beta p + \gamma p^2$$

k étant la constante arbitraire; d'où l'on tire

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{(k + 2\beta p + \gamma p^2)}.$$

Mais

Mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx + dy}{dt} =$

$\surd(a + \beta x + \gamma x^2) + \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)$,

donc on aura enfin

$$\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) + \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)$$
$$= \surd[k + 2\beta(x + y) + \gamma(x + y)^2].$$

9 Si au lieu d' ajouter les deux équations différentio-différentielles on avoit retranché l'une de l'autre on auroit eû (en faisant $x - y = q$) celle-ci

$$\frac{2\,d^2q}{dt^2} = 2\gamma q,$$

qui étant multipliée par dq, & intégrée ensuite donne

$$\frac{dq^2}{dt^2} = H + \gamma q^2,$$

& par conséquent

$$\frac{dq}{dt} = \surd(H + \gamma q^2).$$

Donc puisque $q = x - y$ on aura $\frac{dq}{dt} = \surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)$; de sorte que l'équation intégrale sera

$$\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)$$
$$= \surd[H + \beta(x - y)^2].$$

H étant la constante arbitraire.

10 Les intégrales que nous venons de trouver ne diffèrent point, quant au fond, de celle de l'*Art.* 5, comme il est facile de s' en assurer par le calcul; mais on peut en trouver encore d'autres plus simples, en donnant seulement un peu plus de généralité à notre méthode.

En effet si au lieu de supposer $dt = \frac{dx}{\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ on suppose $\frac{dt}{T} = \frac{dx}{\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ T étant une fonction quelconque de x & y, on aura ces deux équations-ci

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$$

$$\frac{dt}{T} = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2)}};$$

d' où l' on tire, en multipliant en croix & quarrant,

$$\frac{T^2 dx^2}{dt^2} = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$\frac{T^2 dy^2}{dt^2} = \alpha + \beta y + \gamma y^2$$

de ſorte qu'en différentiant, & regardant dt comme conſtante, on aura

$$\frac{2 T dT dx + 2 T^2 d^2 x}{dt^2} = \beta + 2 \gamma x$$

$$\frac{2 T dT dy + 2 T^2 d^2 y}{dt^2} = \beta + 2 \gamma y$$

équations qui étant ajoutées enſemble, en ſuppoſant $x + y = p$, donnent celle-ci

$$\frac{T dT dp + T^2 d^2 p}{dt^2} = \beta + \gamma p.$$

Or ſoit $x - y = q$, & ſuppoſons T une fonction de p & q, enſorte que l' on ait $dT = M dp + N dq$, on aura $\frac{dT\, dp}{dt^2} = \frac{M dp^2}{dt^2} + \frac{N dp dq}{dt^2}$; mais $\frac{dp\, dq}{dt^2} = \frac{dx^2 - dy^2}{dt^2} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{T^2} - \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{T^2} = \frac{\beta q + \gamma p q}{T^2}$; donc ſubſtituant ces valeurs dans l' équation ci-deſſus elle deviendra, après l' avoir multipliée par T,

$$\frac{T^2 (M dp^2 + T d^2 p)}{dt^2} = (\beta + \gamma p)(T - N q).$$

Or puiſque la valeur de T eſt indéterminée, on peut la ſuppoſer telle que $T - N q = 0$; c' eſt-à-dire (à cauſe que $N = \frac{dT}{dq}$) $\frac{dT}{T dq} = \frac{1}{q}$, ce qui donne en multipliant par dq & intégrant, $T = P q$, P étant une fon-

ction quelconque de P ſans q. Ainſi on aura en ſuppoſant $dP = P' dp$, $M = P'q$, $N = P$, & l'équation différentielle deviendra

$$\frac{T^2 (P'q\, dp^2 + T d^2 p)}{dt^2} = 0,$$

c'eſt-à-dire, en mettant pq au lieu de T, dP au lieu de $P' dp$, & diviſant enſuite par qT^2, $\frac{dP\, dp + P\, d^2p}{dt^2} = 0$, ou bien $\frac{d \cdot P\, dp}{dt^2} = 0$; de ſorte qu'on aura, en prenant une conſtante arbitraire quelconque G, $\frac{P\, dp}{dt} = G$; d'où en mettant au lieu de $\frac{dp}{dt} = \frac{dx + dy}{dt}$ ſa valeur $\frac{\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{T} + \frac{\surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)}{T}$, & faiſant attention que $T = Pq = P(x - y)$, on aura l'équation finale

$$\frac{\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) + \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)}{x - y} = G.$$

C'eſt-là ce me ſemble la forme la plus ſimple à laquelle on puiſſe réduire l'intégrale de l'équation propoſée (C).

11 Puiſque la différence des deux quantités qui ſont ſous le ſigne eſt $\beta(x - y) + \gamma(x^2 - y^2)$, il eſt clair qu'on aura

$$\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)$$
$$= \frac{\beta(x - y) + \gamma(x^2 - y^2)}{\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) + \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)}.$$

Donc mettant au lieu du dénominateur du ſecond membre ſa valeur $G(x - y)$, & diviſant enſuite le haut & le bas de la fraction par $x - y$, on aura

$$\surd(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \surd(\alpha + \beta y + \gamma y^2)$$

$$= \frac{\beta + \gamma(x + y)}{G}.$$

Equation qui étant combinée avec la précédente donnera celle-ci

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = \frac{\beta + (\gamma + G^2)x + (\gamma - G^2)y}{2G}$$

laquelle étant multipliée par $2G$, & ensuite quarrée deviendra

$$\beta^2 - 4\alpha G^2 + 2\beta(\gamma - G^2)(x + y) + 2(\gamma^2 - G^4)xy + (\gamma - G^2)^2(x^2 + y^2) = 0.$$

La méthode que nous venons d'employer dans l'*Art.* 10 peut s'appliquer avec le même succès à intégrer l'équation dont nous avons parlé plus haut (*Art.* 6).

Soit donc

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}}$$

ensorte que l'on ait aussi

$$\frac{dt}{T} = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}}$$

& ces deux équations étant traitées comme celles de l'*Art.* 10 deviendront d'abord

$$\frac{2TdTdx + 2T^2d^2x}{dt^2} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3$$

$$\frac{2TdTdy + 2T^2d^2y}{dt^2} = \beta + 2\gamma y + 3\delta y^2 + 4\varepsilon y^3$$

J'ajoute ensemble ces deux dernières équations, & je fais comme ci-dessus $x + y = p$, $x - y = q$, & $dT = Mdp + Ndq$, j'aurai en divisant par 2

$$\frac{TMdp^2 + TNdpdq + T^2d^2p}{dt^2} =$$

$$\beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + 3pq^2)$$

& mettant au lieu de $\frac{dp\,dq}{dt^2}$ sa valeur $\frac{dx^2 - dy^2}{dt^2} =$

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}{T^2} -$$

$$\frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}{T^2} =$$

$$\frac{\beta q + \gamma pq + \frac{\delta}{4}\,(3p^2q + q^3) + \frac{\varepsilon}{2}\,(p^3 q + p\,q^3)}{T^2}$$

on aura après avoir multiplié par T, & ordonné les termes

$$\frac{T^2\,(M\,dp^2 + T d^2p)}{dt^2} = (\beta + \gamma p)(T - Nq)$$

$$+ \frac{\delta}{4}\,[\,3\,T\,(p^2 + q^2) - N(3\,p^2\,q + q^3)\,]$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\,[\,T\,(p^3 + 3\,p\,q^2) - N(p^3\,q + p\,q^3)\,]$$

Soit fait, comme dans l' *Art.* 10, $T - Nq = 0$, & par conséquent, $T = P\,q$, $N = P$, & $M = \frac{q\,dP}{dp}$ on aura

$$\frac{P^2\,q^3\,(dP\,dp + P\,d^2p)}{dt^2} = P\,q^3\,(\frac{\delta}{2} + \varepsilon p),$$

ou bien en divisant par $P\,q^3$

$$\frac{P\,dP\,dp + P^2\,d^2p}{dt^2} = \frac{\delta}{2} + \varepsilon p.$$

Cette équation étant multipliée par $2\,dP$ devient intégrable, & l' intégrale sera

$$\frac{P^2\,dp^2}{dt^2} = G^2 + \delta p + \varepsilon p^2.$$

G étant la constante arbitraire; de sorte qu'on aura, en tirant la racine quarrée,

$$\frac{P\,dp}{dt} = \sqrt{(G^2 + \delta p + \varepsilon p^2)};$$

mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx + dy}{dt} =$

$$\frac{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}}{1} + \frac{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}}{T};$$

donc ſubſtituant cette valeur, & mettant à la place de p, $x + y$, & à la place de T, Pq, ou bien $P(x - y)$, on aura, après avoir multiplié par $x - y$,

$$(D) \ldots\ldots \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)} + \sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)} = (x - y)\sqrt{[G^2 + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2]}$$

pour l'intégrale cherchée de l'équation

$$(E) \ldots\ldots \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}}.$$

13 Si l'équation à intégrer étoit

$$(F) \ldots\ldots \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}} = 0$$

il n'y auroit qu'à changer le ſigne du ſecond radical de l'équation (D), & l'on auroit

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)} - \sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)} = (x - y)\sqrt{[G^2 + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2]}.$$

14 La différence des deux quantités qui ſont ſous le ſigne étant

$$= \beta(x - y) + \gamma(x^2 - y^2) + \delta(x^3 - y^3) + \varepsilon(x^4 - y^4)$$

on aura par l'équation (E)

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)} - \sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)} =$$

$$\frac{\beta(x-y)+\gamma(x^2-y^2)+\delta(x^3-y^3)+\varepsilon(x^4-y^4)}{(x-y)\surd(G^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2)}$$

$$=\frac{\beta+\gamma(x+y)+\delta(x^2+xy+y^2)+\varepsilon(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{\surd(G^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2)}$$

donc combinant cette équation avec celle que nous venons de citer, on aura

$$\surd(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)=$$

$$\frac{(x-y)\surd(G^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2)}{2}+$$

$$\frac{\beta+\gamma(x+y)+\delta^2(x^2+xy+y^2)+\varepsilon(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{2\surd(G^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2)}$$

$$=\frac{\beta+\gamma(x+y)+G(x-y)+\delta(2x^2+xy)+2\varepsilon(x^3+x^2y)}{2\surd(G^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2)}$$

d'où en multipliant en croix, & quarrant les deux membres de cette équation il viendra

$$\beta^2-4\alpha G+(2\beta\gamma+4\alpha\delta-2\beta G)(x+y)+(\gamma^2-4\alpha\varepsilon)(x+y)^2+G^2(x-y)^2-2\beta\delta xy-2\gamma G(x^2+y^2)+(2\gamma\delta-4\beta\varepsilon-2\delta G)(x+y)xy+(\delta^2-4\varepsilon G)x^2y^2=0,$$

ou bien

$$\beta^2-4\alpha G+(2\beta\gamma+4\alpha\delta-2\beta G)(x+y)+(\gamma^2-4\alpha\varepsilon-2\gamma G+G^2)(x^2+y^2)+2(\gamma^2-4\alpha\varepsilon-\beta\delta-G^2)xy+2(\gamma\delta-2\beta\varepsilon-\delta G)(x+y)xy+(\delta^2-4\varepsilon G)x^2y^2=0;$$

& cette équation sera également l' intégrale de l'équation (E) & de l' équation (F) (*Articles* 12 & 13; ce qui s' accorde avec ce qu'on a démontré dans l' *Art.* 6.

15 Considérons maintenant en général l' équation

$$\frac{dx}{\surd X}=\frac{dy}{\surd Y}$$

X étant une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y. On aura d' abord les deux équations

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{\sqrt{X}},\ \frac{dt}{T} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

d' où l' on tire

$$\frac{T^2 dx^2}{dt^2} = X,\ \frac{T^2 dy^2}{dt^2} = Y$$

& différentiant (en faisant $dX = X'dx$, $dY = Y'dy$)

$$\frac{2TdTdx + 2T^2 d^2x}{dt^2} = X'$$

$$\frac{2TdTdy + 2T^2 d^2y}{dt^2} = Y'$$

Soit $x + y = p$, $x - y = q$, & $dT = Mdp + Ndq$, on aura en ajoutant les deux équations précédentes, ensemble

$$\frac{2T(Mdp^2 + Ndpdq) + 2T^2 d^2p}{dt^2} = X' + Y'$$

Or $dpdq = dx^2 - dy^2 = \frac{(X - Y)dt^2}{T^2}$; donc substituant cette valeur on aura

$$\frac{2T(Mdp^2 + Td^2p)}{dt^2} = X' + Y' - \frac{2N(X - Y)}{T}.$$

Maintenant, puisque $x + y = p$, $x - y = q$, on aura $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$, de sorte qu'en ne considérant que la variabilité de q on aura $X' = \frac{dX}{dx} = \frac{2dX}{dq}$ & $Y' = \frac{dY}{dy} = -\frac{2dY}{dq}$; de plus on a $M = \frac{dT}{dp}$ $N = \frac{dT}{dq}$; donc faisant ces substitutions dans l' équation précédente, elle se réduira à cette forme

$$\frac{d\cdot\left(\frac{T\,dp^2}{dt}\right)}{dp} = \frac{2T\,d\cdot\left(\frac{X-Y}{T}\right)}{dq}.$$

Or pour qu'on puiſſe tirer de cette équation la valeur de $\frac{dp}{dt}$ il faut faire enſorte qu'elle ne contienne que les ſeules variables p & q; c'eſt ce qu'on ne ſauroit obtenir, ce me ſemble, qu'en faiſant 1° $T = PQ$, P étant une fonction quelconque de p & Q une fonction quelconque de q, pour avoir en diviſant par Q^2

$$\frac{d\cdot\left(\frac{P\,dp}{dt}\right)^2}{dp} = \frac{2\,d\cdot\left(\frac{X-Y}{Q}\right)}{Q\,dq}$$

2° Il faudra que l'on ait

$$\frac{d\cdot\left(\frac{X-Y}{Q}\right)}{Q\,dq} = \text{fonct. } p.$$

Suppoſons donc que $\varphi\cdot p$ repréſente une fonction quelconque de p, on aura

$$\frac{d\cdot\left(\frac{X-Y}{Q}\right)}{Q\,dq} = \varphi\cdot p;$$

donc multipliant par $Q\,dq$, & intégrant, en regardant p comme conſtant, on aura

$$\frac{X-Y}{Q} = \varphi\cdot p\int Q\,dq + \psi\cdot p,$$

$\psi\,p$ dénotant une autre fonction quelconque de p; donc on aura

$$X - Y = Q\,(\varphi\cdot p\int Q\,dq + \psi\cdot p).$$

Si cette condition a lieu, alors on aura

$$\frac{d\cdot\left(\frac{P\,dp}{dt}\right)^2}{dp} = 2\,\varphi\cdot p;$$

donc en multipliant par $d\,p$, & intégrant

$$\left(\frac{P\,dp}{dt}\right)^2 = G^2 + 2\int\varphi\cdot p\,dp$$

G étant une conſtante quelconque ; d' où l' on tire

$$\frac{P\,dp}{dt} = \sqrt{(G^2 + 2\int\varphi\cdot p\,dp)} ;$$

mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{T} = \frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{PQ}$; donc ſubſtituant cette valeur on aura

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = Q\sqrt{(G^2 + 2\int\varphi\cdot p\,dp)}$$

c' eſt l' intégrale de l' équation propoſée $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$.

16 Voyons à préſent quelle doit être la nature des quantités X & Y pour que l' équation de condition

$$X - Y = Q(\int Q\,dq\,X\varphi\cdot p + \psi p)$$

ait lieu ; & ſuppoſons d' abord que ces quantités ſoient de la forme ſuivante

$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 +$ &c.
$Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \zeta y^5 + \eta y^6 +$ &c.

enſorte que l' on ait

$X - Y = \beta(x-y) + \gamma(x^2-y^2) + \delta(x^3-y^3) + \varepsilon(x^4-y^4) + \zeta(x^5-y^5) + \eta(x^6-y^6) +$ &c. ;

en faiſant $x + y = p$, $x - y = q$, c' eſt - à dire $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$, on aura

$X - Y = \beta q + \gamma pq + \frac{\delta}{4}(3p^2+q^2)q + \frac{\varepsilon}{8}(4p^3 + 4pq^2)q + \frac{\zeta}{16}(5p^4 + 10p^2q^2)q + \frac{\eta}{32}(6p^5 + 20p^3q^2 + 6pq^4)q +$ &c.

& comme cette quantité doit être égale, ou plutôt identique avec la quantité $Q(\int A\,dq\,X\varphi\cdot p + \psi p)$, dans laquelle Q eſt une fonction de q ſeulement, il eſt viſible qu'il faut 1° que l' on ait $Q = q$, ce qui donne $\int Q\,dq$

$= \frac{1}{2} q^2$. 2° que l' on ait

$$\beta - \gamma p + \frac{3\delta p^2}{4} + \frac{4\varepsilon p^3}{8} + \frac{5\zeta p^4}{16} + \frac{6\eta p^5}{32} + \&c. = \psi \cdot p,$$

$$\left(\frac{\delta}{4} + \frac{4\varepsilon p}{8} + \frac{10\zeta p^2}{16} + \frac{20\eta p^3}{32} + \&c.\right) q^2 = \frac{q^2 \varphi p}{2},$$

$$\left(\frac{\zeta}{16} + \frac{6\eta p}{32} + \&c.\right) q^4 = 0.$$

C' eſt-à-dire

$\zeta = 0$, $\eta = 0$ &c., & par conſéquent

$$\psi p = \beta + \gamma p + \frac{3\delta p^2}{4} + \frac{4\varepsilon p^3}{8}, \ \varphi p = \frac{\delta}{2} + \varepsilon p.$$

Donc $2\int \varphi p \, dp = \delta p + \varepsilon p^2$; de ſorte que l' intégrale de l' équation ſera dans ce cas

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = q\sqrt{(G^2 + \delta p + \varepsilon p^2)}.$$

C' eſt le cas que nous avons déja examiné (*Art.* 12).

Au reſte on voit par-là que les quantités X & Y ne ſauroient contenir d' autres puiſſances de x & de y que celles qui ne paſſent point le quatrième dégré.

17 Suppoſons maintenant en géneral $X = \Phi \cdot 2x$, & $Y = \Psi \cdot 2y$, enſorte que l' on ait $X = \Phi(p+q$, & $Y = \Psi(p-q)$; & l' équation de condition ſera

$$\Phi \cdot (p+q) \Psi (p-q) = Q (\int Q \, dq \, X \varphi \cdot p + \psi p);$$

ſoient différentiés les deux membres de cette équation deux fois de ſuite en faiſant varier p ſeulement, on aura

$$\Phi''(p+q) - \Psi''(p-q) = Q(\int Q \, dq \, X \varphi'' \cdot p + \psi'' \cdot p);$$

ſoient enſuite différentiés les deux membres deux fois, en faiſant varier q ſeulement, nous aurons

$$\Phi''(p+q) - \Psi''(p-q) = \frac{d^2 \cdot Q \int Q \, dq}{dq^2} X \varphi \cdot p + \frac{d^2 Q}{dq^2} X \psi p;$$

donc

$$Q\psi''p + Q\int Q\,dq\,X\varphi''\cdot p = \frac{dQ^2}{dq^2}X\psi\cdot p + \frac{d^2\cdot Q\int Q\,dq}{dq^2}X\varphi\cdot p.$$

Cette équation devant être identique ; je ſuppoſerai d'abord $\frac{d^2Q}{dq^2} = -m^2Q$ (m étant un coéficient conſtant quelconque), d'où l'on a en intégrant

$$Q = A\,\text{ſin.}\,(mq + \alpha)$$

A & α étant auſſi des conſtantes quelconques, & par conſéquent, en intégrant, de nouveau,

$$\int Q\,dq = -\frac{A}{m}\,\text{coſ.}\,(mq + \alpha)\ \&$$

$$Q\int Q\,dq = -\frac{A^2}{2m}\,\text{ſin.}\,2\,(mq + \alpha)\,;$$

de ſorte que l'équation précédente deviendra

$$A\,\text{ſin.}\,(mq + \alpha)\times(\psi''\cdot p + m^2\psi\cdot p) -$$
$$\frac{A^2}{2m}\,\text{ſin.}\,2\,(mq + \alpha)\times(\varphi''\cdot p + 4m^2\varphi\cdot p) = 0,$$

laquelle devant être vraie indépendamment d'aucune équation entre q & p, il faudra que l'on ait

$$\psi''\cdot p + m^2\psi\cdot p = 0,\quad \varphi''\cdot p + 4m^2\varphi\cdot p = 0\,;$$

ce qui donne, en prenant des conſtantes quelconques B, β & C, γ,

$$\psi\cdot p = B\,\text{ſin.}\,(mp + \beta)$$
$$\varphi\cdot p = C\,\text{ſin.}\,(mp + \gamma).$$

Subſtituant donc toutes ces valeurs dans l'équation de condition trouvée ci-deſſus, on aura

$$\Phi\,(p + q) - \Psi\,(p - q) = AB\,\text{ſin.}\,(mp + \beta)\times\text{ſin.}\,(mq + \alpha)$$
$$-\frac{A^2C}{2m}\,\text{ſin.}\,2\,(mp + \gamma)\times\text{ſin.}\,2\,(mq + \alpha) -$$
$$-\frac{AB}{2}\left(\text{coſ.}\,[m(p + q) + \beta + \alpha] - \text{coſ.}\,[m\,(p - q) + \beta - \alpha]\right)$$
$$+\frac{A^2C}{2m}\left(\text{coſ.}\,2\,[m\,(p + q) + \gamma + \alpha] - \text{coſ.}\,2\,[m\,(p - q) + \gamma - \alpha]\right).$$

Donc faiſant pour plus de ſimplicité $-\frac{AB}{2} = b$, $\frac{A^2C}{2m} = c$, & prenant une conſtante quelconque a, on aura

$$\Phi(p+q) = a + b \text{ coſ. } [m(p+q) + \beta + \alpha] + c \text{ coſ. } 2[m(p+q) + \gamma + \alpha],$$

$$\Psi(p-q) = a + b \text{ coſ. } [m(p-q) + \beta - \alpha] + c \text{ coſ. } 2[m(p-q) + \gamma - \alpha];$$

donc en mettant $2x$ à la place de $p+q$, $2y$ à la place de $p-q$, & n à la place de $2m$, on aura

$$X = a + b \text{ coſ. } (nx + \beta + \alpha) + c \text{ coſ. } 2(nx + \gamma + \alpha)$$

$$Y = a + b \text{ coſ. } (ny + \beta - \alpha) + c \text{ coſ. } 2(ny + \gamma - \alpha).$$

Ce ſont, ce me ſemble, les valeurs les plus générales que l' on puiſſe donner aux quantités X & Y pour que l' équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ ſoit intégrable par notre méthode; & l' intégrale ſera

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = A \text{ ſin. } (mq + \alpha) \sqrt{\left[G^2 - \frac{C}{m} \text{ coſ. } 2(mp + \gamma)\right]}$$

ou bien, en mettant $\frac{2c}{A^2}$ au lieu de $\frac{C}{m}$, & faiſant $G^2 = \frac{H^2}{A^2}$,

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \text{ſin.}\left[\frac{n(x-y)}{2} + \alpha\right] \times \sqrt{\left(H^2 - 2c \text{ coſ.}[n(x+y) + 2\gamma]\right)}.$$

18 Soit fait

$$\text{coſ. } nx + \text{ſin. } nx \sqrt{-1} = u,$$

$$\text{coſ. } ny + \text{ſin. } ny \sqrt{-1} = v,$$

on aura

$$\text{coſ. } nx = \frac{1+u^2}{2u}, \quad \text{ſin. } nx = \frac{1-u^2}{2u}\sqrt{-1}$$

$$\text{coſ. } 2nx = \frac{1+u^4}{2u^2}, \quad \text{ſin. } 2nx = \frac{1-u^4}{2u^2}\sqrt{-1},$$

& de même

$$\text{coſ.}\ ny = \frac{1 + v^2}{2v},\quad \text{ſin.}\ ny = \frac{1 - v^2}{2v}\sqrt{-1}$$

$$\text{coſ.}\ 2ny = \frac{1 + v^4}{2v^2},\quad \text{ſin.}\ 2ny = \frac{1 - v^4}{2v^2}\sqrt{-1},$$

on aura de plus

$$\text{coſ.}\ n(x + y) = \frac{1 + u^2 v^2}{2nv}$$

$$\text{ſin.}\ n(x + y) = \frac{1 - u^2 v^2}{2uv}\sqrt{-1},$$

$$\text{coſ.}\ \frac{n(x - y)}{2} = \frac{v + u}{2\sqrt{vu}},$$

$$\text{ſin.}\ \frac{n(x - y)}{2} = \frac{v - u}{2\sqrt{vu}}\sqrt{-1}.$$

Enfin on aura

$$dx = \frac{du}{nu\sqrt{-1}},\quad dy = \frac{dv}{nv\sqrt{-1}}.$$

Suppoſons outre cela

$$\text{coſ.}\ (\beta + \alpha) = A,\quad \text{coſ.}\ 2(\gamma + \alpha) = B$$
$$\text{coſ.}\ (\beta - \alpha) = E,\quad \text{coſ.}\ 2(\gamma - \alpha) = E,$$

on aura

$$\text{coſ.}\ 2\alpha = AE + \sqrt{(1 - A^2)} \times \sqrt{(1 - E^2)}$$
$$\text{coſ.}\ 4\alpha = BF + \sqrt{(1 - B^2)} \times \sqrt{(1 - F^2)};$$

donc

$$1 + BF + \sqrt{(1 - B^2)} \times \sqrt{(1 - F^2)} =$$
$$2\left[AE + \sqrt{(1 - A^2)} \times \sqrt{(1 - E^2)}\right] \ldots (G)$$

Enſuite on aura, en faiſant pour abreger,

$$AE + \sqrt{[(1 - A^2)(1 - E^2)]} = M,$$
$$BF - \sqrt{[(1 - B^2)(1 - F^2)]} = N,$$

$$\text{coſ.}\ \alpha = \sqrt{\frac{1 + M}{2}},\quad \text{ſin.}\ \alpha = \sqrt{\frac{1 - M}{2}}$$

$$\text{coſ.}\ 2\gamma = \sqrt{\frac{1 + N}{2}},\quad \text{ſin.}\ 2\gamma = \sqrt{\frac{1 - N}{2}},$$

donc en faisant toutes ces substitutions dans les formules de l' *Art. préc.*, on aura d' abord

$$X = a + b \times \frac{A(1+u^2) - \sqrt{(A^2-1)} \times (1-u^2)}{2u} + c \times \frac{B(1+u^4) - \sqrt{(B^2-1)} \times (1-u^4)}{2u^2}$$

$$Y = a + b \times \frac{E(1+v^2) - \sqrt{(E^2-1)} \times (1-v^2)}{2v} + c \times \frac{F(1+v^4) - \sqrt{(F^2-1)} \times (1-v^4)}{2v^2},$$

ou bien, en supposant pour plus de simplicité,

$U = c[B - \sqrt{(B^2 - 1)}] + b[A - \sqrt{(A^2 - 1)}]u + 2au^2 + b[A + \sqrt{(A^2 - 1)}]u^3 + c[B + \sqrt{(B^2 - 1)}]u^4$,

$V = c[F - \sqrt{(F^2 - 1)}] + b[E - \sqrt{(E^2 - 1)}]v + 2av^2 + b[E + \sqrt{(E^2 - 1)}]v^3 + c[F + \sqrt{(F^2 - 1)}]v^4$,

$X = \frac{U}{2u^2}$ & $Y = \frac{V}{2v^2}$; de sorte que l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ deviendra $\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dv}{\sqrt{V}}$.

Dont l' intégrale sera

$$\frac{\sqrt{U}}{u} + \frac{\sqrt{V}}{v} = \frac{(v+u)\sqrt{(1-M)} + (v-u) \times \sqrt{(-1-M)}}{2\sqrt{vu}} \times \sqrt{\left(H^2 - c \times \frac{(1+u^2v^2)\sqrt{(1+N)} - (1-u^2v^2)\sqrt{(N-1)}}{uv\sqrt{2}}\right)}.$$

Il est clair que l' équation $\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dv}{\sqrt{V}}$ est un peu plus générale que l' équation (E) que nous avons appris à intégrer dans l' *Art.* 12; car dans cette dernière équation il n' y a que cinq coéficiens indéterminés, au lieu que dans celle dont il s' agit; il y en a six; je dis six quoique les quantités a, b, c, A, B, E, F soient au nombre de sept; car nous avons vû ci-dessus qu'il doit y avoir entre les quatre dernières de ces quantités un rapport exprimé par l' équation (G).

19 Pour généraliser, s'il est possible, la méthode que je viens d'expliquer, je reprends les équations $\frac{dt}{T} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$, $\frac{dt}{T} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, & j'en prends les différentielles logarithmiques, en regardant toujours dt comme constante, j'ai

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{X' dx}{2X} - \frac{dT}{T dx} dx - \frac{dT}{T dy} dy$$

$$\frac{d^2y}{dy^2} = \frac{Y' dy}{2Y} - \frac{dT}{T dx} dx - \frac{dT}{T dy} dy,$$

donc

$$d^2 x = (\frac{X'}{2X} - \frac{dT}{T dx}) dx^2 - \frac{dT}{T dy} dx dy$$

$$d^2 y = (\frac{Y'}{2Y} - \frac{dT}{T dy}) dy^2 - \frac{dT}{T dx} dx dy,$$

ou bien en mettant au lieu de dx^2, $\frac{X dt^2}{T^2}$, & au lieu de dy^2, $\frac{Y dt^2}{T^2}$

$$d^2 x = \frac{d \cdot \frac{X}{T^2}}{2 dx} dt^2 - \frac{d \cdot l T}{dy} dx dy$$

$$d^2 y = \frac{d \cdot \frac{Y}{T^2}}{2 dy} dt^2 - \frac{d \cdot l T}{dx} dx dy.$$

Soit maintenant Z une fonction quelconque de x & de y, & supposons $dZ = P dx + Q dy$, on aura, en différentiant de nouveau $d^2 Z = P d^2 x + Q d^2 y + \frac{dP}{dx} dx^2 + 2 \frac{dP}{dy} dx dy + \frac{dQ}{dy} dy^2$; donc substituant au lieu de $d^2 x$, $d^2 y$, dx^2 & dy^2 leurs valeurs, on aura

$d^2 Z$,

$$d^2 Z = \left(P \frac{d \cdot \frac{Y}{T^2}}{2\,dx} + \frac{X\,dP}{T^2\,dx}\right) dt^2$$

$$+ \left(Q \frac{d \cdot \frac{Y}{T^2}}{2\,dy} + \frac{Y\,dQ}{T^2 dy}\right) dt^2$$

$$+ \left(\frac{2\,dP}{dy} - \frac{P\,d \cdot lT}{dy} - \frac{Q\,d \cdot lT}{dx}\right) dx\,dy.$$

Donc ſi on ſuppoſe

$$\frac{2\,dP}{dy} - \frac{P\,d \cdot lT}{dy} - \frac{Q\,d \cdot lT}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

&

$$P \frac{d \cdot \frac{X}{T^2}}{2\,dx} + \frac{X\,dP}{T^2\,dx} + Q \frac{d \cdot \frac{Y}{T^2}}{2\,dy} + \frac{Y\,dQ}{T^2 dy} = \varphi \cdot Z \quad (I)$$

on aura l' équation

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \varphi \cdot Z$$

laquelle étant multipliée par $2\,dZ$, & enſuite intégrée donnera $\frac{dZ^2}{dt^2} = G^2 + 2\int \varphi \cdot Z\,dZ$, & par conſéquent

$$\frac{dZ}{dt} = \surd\,(G^2 + 2\int \varphi \cdot Z\,dZ);$$

mais $\frac{dZ}{dt} = \frac{P\,dx + Q\,dy}{dt} = \frac{P \surd X + Q \surd Y}{T}$; donc l' intégrale de l' équation $\frac{dx}{\surd X} = \frac{dy}{\surd Y}$ ſera en faiſant $\int \varphi \cdot Z\,dZ = \Phi \cdot Z$, $P \surd X + Q \surd Y = T \surd\,(G^2 + 2\int \Phi Z)$, G^2 étant la conſtante arbitraire.

20 Toute la difficulté ſe réduit donc à déterminer les quantités T & Z; enſorte que les équations (H) & (I) aient lieu.

Si on fait $lT = u$, l'équation (H) deviendra $\frac{P\,du}{dy}$

$+ Q \frac{du}{dx} = 2 \frac{dP}{dy}$, d'où l'on tire $\frac{du}{dy} = \frac{2\,dP}{P\,dy} - \frac{Q}{P} \times \frac{du}{dx}$, de ſorte qu'on aura $du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = \frac{2\,dP}{P\,dy} dy + (dx - \frac{Q\,dy}{P}) \frac{du}{dx}$.

Soit R le facteur par lequel il faudroit multiplier la différentielle $P\,dx - Q\,dy$ pour la rendre intégrable, enſorte que l'on ait $R\,(P\,dx - Q\,dy) = dz$, & l'on aura $du = \frac{2\,dP}{P\,dy} dy + \frac{du}{RP\,dx} dz$; donc regardant u comme une fonction de y, & z, & ſuppoſant z conſtant, on aura $du = \frac{2\,dP}{P\,dy} dy$, & par conſéquent

$$u = 2 \int \frac{dP}{P\,dy} dy + \psi z,$$

en prenant l'intégrale $\int \frac{dP}{P\,dy} dy$ dans la ſuppoſition de z conſtante; donc puiſque $u = l\,T$ ſi on fait auſſi $\psi z = l \Psi z$, on aura

$$T = \Psi \cdot z \times e^{2 \int \frac{dP}{P\,dy} dy}$$

$\Psi \cdot z$ dénotant une fonction quelconque de z.

Ayant ainſi déterminé la quantité T, il ne reſtera plus qu'à ſatisfaire à l'équation (I) qui peut ſe réduire à cette forme plus ſimple

$$\frac{d \cdot \frac{P^2 X}{T^2}}{P\,dx} + \frac{d \cdot \frac{Q^2 T}{T^2}}{Q\,dy} = 2\,\varphi \cdot Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (K)$$

21 Suppoſons que P ſoit une fonction de x ſeul, & Q une fonction de y ſeul; enſorte que l'on ait $Z = \int P\,dx + \int Q\,dy$, & $Z = \int P\,dx - \int Q\,dy$, & l'on

aura d' abord à cause de $\frac{dP}{dy} = 0$

$$T = \Psi\,(\int P\,dx - \int Q\,dy);$$

ensuite l' équation (k) étant multipliée par $P\,dx$, & ensuite intégrée en regardant y comme constante donnera, à cause de $P\,dx = dZ$,

$$\frac{P^2 X}{T^2} + \int \frac{d \cdot \frac{Q^2 Y}{T^2}}{Q\,dy} P\,dx = 2\,\Phi \cdot Z + \Pi \cdot y;$$

mais $\frac{d \cdot \frac{Q^2 Y}{T^2}}{dy} = \frac{d \cdot Q^2 Y}{dy} \times \frac{1}{T^2} - 2\,Q^2 Y \times \frac{dT}{T^3\,dy}$; donc on aura $\int \frac{d \cdot \frac{Q^2 Y}{T^2}}{Q\,dy} P\,dx = \frac{d \cdot Q^2 Y}{Q\,dy} \int \frac{P\,dx}{T^2} -$ $2\,Q Y \int \frac{dT}{T^3\,dy} P\,dx = \frac{d \cdot Q^2 Y \int \frac{P\,dx}{T^2}}{Q\,dy}$; de sorte que l' équation précédente deviendra

$$\frac{P^2 X}{T^2} + \frac{d \cdot Q^2 Y \int \frac{P\,dx}{T^2}}{Q\,dy} = 2\,\Phi \cdot Z + \Pi \cdot y,$$

laquelle étant multipliée par $Q\,dy$, & intégrée de rechef en regardant x comme constante, donnera, à cause de $dZ = Q\,dy$,

$$P^2 X \int \frac{Q\,dy}{T^2} + Q^2 Y \int \frac{P\,dx}{T^2} = 2 \int \Phi \cdot Z\,dZ$$
$$+ \Gamma \cdot x + \Delta \cdot y,$$

$\Gamma \cdot x$, & $\Delta \cdot y$ étant des fonctions quelconques de x & de y.

Or puisque $T = \Psi\,(\int P\,dx - \int Q\,dy)$, si on suppose en général $\Sigma \cdot p = -\int \frac{dp}{(\Psi \cdot p)^2}$, on aura

$$\int \frac{P\,dx}{T^2} = -\Sigma \cdot (\int P\,dx - \int Q\,dy) \text{ \&}$$

$$\int \frac{Q\,dy}{T^2} = \Sigma \cdot (\int P\,dx - \int Q\,dy);$$

donc on aura enfin pour l' équation de condition.

$$(P^2 X - Q^2 Y)\Sigma(\int P\,dx - \int Q\,dy) = 2\int \Phi \cdot Z dZ + \Gamma \cdot x + \Delta \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (L).$$

Quoique cette équation ne soit qu'un cas particulier de l' équation (k), elle est cependant en quelque sorte plus générale que celle que nous avons trouvée par la méthode de l' *Art.* 15.

22 Si on fait comme dans l' *Art.* 16

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \theta x^7 + \lambda x^8 + \text{\&c.}$$

$$Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \zeta y^5 + \eta y^6 + \theta y^7 + \lambda y^8 + \text{\&c.}$$

on trouvera que l' on peut satisfaire à l' équation (L) dans les cas suivans;

1° en faisant $P = 1$, $Q = 1$, $\Sigma(x - y) = \frac{1}{x-y}$ $2\int \Phi \cdot Z dZ =$ (à cause de $Z = x + y$) $\beta + \gamma Z + \frac{\delta Z^2}{2} + \frac{\varepsilon Z^3}{3}$, $\Gamma \cdot x = \frac{\delta x^2}{2} + \frac{2\varepsilon x^3}{3}$, $\Delta \cdot y = \frac{\delta y^2}{2} + \frac{2\varepsilon y^3}{3}$; & $\zeta = 0$, $\eta = 0$ &c.; c' est le cas que nous avons resolu dans le même *Article.*

2° en faisant $P = x$, $Q = y$, $\Sigma(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}) = \frac{1}{x^2 - y^2}$, $2\int \Phi \cdot Z dZ =$ (à cause de $Z = \frac{x^2 + y^2}{2}$) $\alpha + 2\gamma Z + 2\varepsilon Z^2 + \frac{8\eta Z^3}{3}$, $\Gamma \cdot x = -\frac{\varepsilon x^4}{2} + \frac{2\eta x^6}{3}$,

$\Delta \cdot y = \frac{\varepsilon y}{2} + \frac{2 \eta y^6}{3}$; & $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\zeta = 0$, $\theta = 0$, $\lambda = 0$ &c.,

3° en faiſant $P = x^2$, $Q = y^2$, $\Sigma \left(\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{1}{x^3 - y^3}$, $2 \int \Phi \cdot Z \, dZ =$ (à cauſe de $Z = \frac{x^3 + y^3}{3}$) $3 \gamma Z + \frac{9 \zeta Z^2}{2} + 9 \lambda Z^3$, $\Gamma \cdot x = \frac{\zeta x^6}{2} + \frac{2 \lambda x^9}{3}$, $\Delta \cdot y = \frac{\zeta y^6}{2} + \frac{2 \lambda y^9}{3}$, & $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, & ainſi des autres.

Au reſte tous ces différens cas peuvent ſe déduire du premier par des ſubſtitutions convenables ; c' eſt de quoi on ſe convaincra aiſément, en mettant dans l' équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, x^2, x^3 &c. à la place de x, & y^2, y^3 &c. à la place de y; de ſorte qu'à proprement parler les ſuppoſitions de $P = x^m$, & $Q = y^m$, ne donnent point d' autres cas que ceux de $P = 1$, & $Q = 1$. Mais comme ces ſuppoſitions ſont très-particulières, & que l' équation (L) n' éſt elle même qu'un cas très-particulier de l' équation (k) de l' *Art.* 19, il n' eſt pas impoſſible qu'on ne puiſſe découvrir encore par le moyen de cette équation d' autres cas d' intégrabilité de l' équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$; ce qui ouvre, comme l' on voit, un vaſte champ aux Recherches des Analiſtes.

A Berlin ce 20 Septembre 1768.

RECHERCHES

Mathématiques ſur différens ſujets.

PAR M. D'ALEMBERT.

---

§. I

Sur les triangles ſphériques, formés par des arcs de petits cercles.

1 Il y a, ce me ſemble, dans la Trigonométrie ſphérique un objet qui n'a point encore été traité, & qui mériteroit de l'être ; c'eſt l'analiſe des triangles ſphériques qui ont pour côtés des arcs de petits cercles. Imaginons un pareil triangle, & tirons les cordes des trois arcs qui le compoſent ; ces cordes appartiendront auſſi à des arcs de grands cercles ; & le premier pas à faire dans la recherche dont il s'agit, eſt de déterminer les angles que forment ces arcs de grands cercles avec les petits arcs qui ont la même corde, & la portion de ſurface ſphérique qu'ils renferment entr'eux.

2 Soit $EDAO$ (*fig.* 1) un grand cercle de la ſphère, AE un de ſes diamètres, DC une corde quelconque ; le rayon où *ſinus* total $GA = 1$, l'angle où arc AO (dont le *ſinus* eſt BO) $= \omega$, l'angle $ABC = \pi$, & GL perpendiculaire à DC. On aura $GB =$ coſ. ω, $BO =$ ſin. ω, $AB = 1 -$ coſ. ω, $KG =$ coſ. ω ſin. π, $KC = \sqrt{(1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2)}$ $KB =$ coſ. ω coſ. π, $LK = 1 -$ coſ. ω ſin. π. Imaginons préſentement perpendiculairement au plan $EDAO$, le grand

cercle dont le diamètre eſt AE, & le petit cercle dont le diamètre eſt DC; leur corde commune ſera évidemment $2BO = 2$ ſin. ω, que j'appelle α, & imaginant la ligne $BO' = BO$ & perpendiculaire au plan $EAQO$, nous aurons un triangle ſphérique ordinaire LAO', formé de trois arcs de grands cercles, lequel ſera rectangle en A. L'angle ALO', que j'appelle β, aura évidemment pour *tangente* $\frac{BO}{KB}$, & pour *coſinus* $\frac{KB}{KC} = \frac{\text{coſ. } \omega \text{ coſ. } \pi}{\sqrt{(1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2)}}$ l'arc LO' ſera $= LC$; & la propriété des triangles ſphériques ordinaires donnera encore d'une autre manière la valeur de *coſ.* $\beta = \frac{\text{tang. } LA}{\text{tang. } LO'} = \frac{KB}{KG} \times \frac{KG}{KC} = \frac{KB}{KC} = \frac{\text{coſ. } \omega \text{ coſ. } \pi}{\sqrt{(1 - \text{ſin. } \pi^2 \text{ coſ. } \omega^2)}}$, & *ſin.* $\beta = \frac{\text{ſin. } \omega}{\sqrt{(1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2)}}$. Le *ſinus* de l'angle $O' =$ (*par la propriété des triangles ſphériques*) $\frac{\text{ſin. } LA}{\text{ſin. } LO'} = \frac{\text{ſin. } LA}{\text{ſin. } LC} = \frac{KB}{BG} \times \frac{1}{KC} = \frac{\text{coſ. } \pi}{\sqrt{(1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2)}}$ & le *coſinus* de l'angle $O' = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{coſ. } \pi^2 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2}{1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2}\right)}$ $= \frac{\text{ſin. } \pi \text{ ſin. } \omega}{\sqrt{(1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2)}}$. Maintenant il eſt clair que l'arc de grand cercle LO' eſt perpendiculaire à l'arc de petit cercle qui a la même corde $O'\omega = 2BO'$, que l'arc de grand cercle $O'A\omega = 2AO'$. D'où il s'enſuit évidemment que l'angle entre l'arc de grand cercle, & l'arc de petit cercle qui a la même corde, eſt $90° - O'$, & que par conſéquent le *ſinus* de cet angle eſt $=$ *coſ.* O' $= \frac{\text{ſin. } \pi \text{ ſin. } \omega}{\sqrt{(1 - \text{coſ. } \omega^2 \text{ ſin. } \pi^2)}}$.

3. Quant à la ſurface de l'eſpèce de *côte de melon* $O'K'\omega$ (*fig.* 3 & 1) renfermée entre l'arc de grand cercle $O'\omega$, & l'arc de petit cercle $O'K'\omega$, on conſidérera pour la trouver 1° que la ſurface $LO'K'\omega' = LK \times 2\beta =$ (1 —

$= (1 - \text{cof.}\ \omega\ \text{fin.}\ \pi) \times 2\beta$; 2° qu'on connoit par la trigonométrie ſphérique, l'aire du triangle ſphérique ordinaire & iſoſcele $LO'\omega$; ainſi la ſurface $O'K'\omega O' =$ $2\beta(1 - \text{cof.}\ \omega\ \text{fin.}\ \pi)$ — triangle ſphérique $LO'\omega$.

4 Soit donc α la corde commune aux deux arcs, l'un de grand, l'autre de petit cercle, ρ le rayon du petit cercle, on aura $2\ \text{fin.}\ \omega = \alpha$; $\text{cof.}\ \omega = \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$, $\rho =$ $\sqrt{(1 - \text{cof.}\ \omega^2\ \text{fin.}\ \pi^2)}$, d'où fin. π (*c. à-d.* le *ſinus* de l'angle que font entr'eux les plans des deux cercles) $=$ $\frac{\sqrt{(1-\rho^2)}}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)}}$; & l'angle des deux arcs a pour *ſinus* $\frac{\alpha\sqrt{(1-\rho^2)}}{\rho\sqrt{(4-\alpha^2)}}$; enfin l'aire compriſe entre les deux arcs de cercle, eſt $= 2\beta[1 - \sqrt{(1-\rho\rho)}]$ — l'aire d'un triangle ſphérique iſoſcele dont l'angle au ſommet eſt 2β, & le côté LC, *c. à-d.*, dont l'angle au ſommet eſt tel que le *ſinus* de la moitié de cet angle $= \frac{\alpha}{2\rho}$, & dont le côté LC a pour *ſinus* ρ. Or l'aire de ce triangle ſphérique eſt égale, comme on ſait, à $(2\beta + 2O' - 180°) \times 1$; & on a

$$\text{fin.}\ O' = \frac{\text{cof.}\ \pi}{\rho} = \frac{\sqrt{\left(\rho^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)}}{\rho\sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\rho^2}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)}} = \frac{\text{cof.}\ \beta}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)}}$$

Donc l'aire dont il s'agit $= 180° \times 1 - 2O' \times 1 -$ $2\beta\sqrt{(1-\rho\rho)}$, β étant l'angle dont le *ſinus* eſt $\frac{\alpha}{2\rho}$, & O' l'angle dont le *ſinus* eſt $\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\rho^2}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)}}$.

5 A cette occasion, voici une manière bien simple de trouver l'aire d'un triangle sphérique ordinaire ABD. Soit (*fig.* 4) achevé le cercle $DBD'B'D$, & les demi-cercles DAD', BAB', dans lesquels il est évident que $D'A$ & AB' sont les complemens des arcs DA & AB à 180°, & que $D'B' = DB$. Soit x l'aire cherchée ADB; & soient continués les arcs AB, AD, de manière qu'ils se coupent en O; on verra évidemment que ABO & ADO sont deux demi-cercles, & le triangle $BDO =$ & semblable à $AD'B'$. Maintenant on aura la demi-surface sphérique $= DAD'BD + BAB'DB - x + D'AB' = DAD'BD + BAB'DB - x + OABDO - x$; donc $\frac{\text{surface sphérique}}{2} = -2x +$ surface sphérique $\times \left(\frac{\text{angl. } D + \text{angl. } B + \text{angl. } A}{360°}\right)$. Donc $x = \frac{\text{surface sphérique totale}}{2} \times \left(\frac{D + B + A - 180°}{360°}\right)$. Donc &c

6 Je reviens aux triangles sphériques, composés d'arcs de petits cercles. Il s'agit de déterminer l'angle que les plans de ces arcs font entr'eux. J'ai déja nommé π l'angle que fait le plan du grand cercle AO, (*fig.* 5) avec le plan du petit cercle qui a ρ pour rayon, & $\alpha = 2$ sin. ω pour corde. Soit OF un autre arc de grand cercle, ensorte qu'on connoisse l'arc $O'F$ & l'angle $AO'F$ de cet arc avec l'arc AO'. Soit $O'F$ la corde commune à ce grand arc, & à un arc de petit cercle qui fasse avec le plan du grand arc OF un angle $= \pi$. Soit l'angle $AGC' = ABC = \pi$; le cercle ZNC' perpendiculaire au plan $AQEP$ sera évidemment parallele au petit cercle qui fait l'angle π avec le plan AOE; de même, après avoir achevé le demi cercle $VFOLP$, soit mené dans ce demi-cercle GF' parallele à $O'F$, & soit imaginé l'arc de grand cercle $F'N$ dont le plan soit parallele au

plan de l'arc de petit cercle qui a pour corde $O' F$; il eſt évident que l'angle $L F' N$ ſera $= \pi'$, & que l'angle des plans des deux arcs de petit cercle, ſera = à l'angle $C' N F'$ des grands cercles paralleles à ces deux plans. Or dans le triangle ſphérique $O' A P$, rectangle en A, on connoit l'arc $O' A$ & l'angle $A O' P$, complement de l'angle donné & connu $A O' F$. Donc on aura 1° $A P$, & par conſéquent $C' P = A P - \pi$, 2° l'angle $O' P A$. Donc dans le triangle $L C' P$ rectangle en C', on aura l'angle L & le côté $L P$. De plus la corde $O' F$, que j'appelle α', étant donnée, & l'arc $O' P$ étant connu dans le triangle $A O' P$ rectangle en A, il eſt très-aiſé de déterminer l'arc $F' P$, puiſque $G F'$ (*hip.*) eſt parallele à $O' F$. On aura donc $F' P$, & par conſéquent $L F'$. Ainſi dans le triangle ſphérique $L F' N$, on connoit 1° le côté $L F'$, 2° l'angle $F' = \pi'$. 3° l'angle L trouvé ci-deſſus. Donc on connoitra l'angle $L N F'$, & ſon complement $C N' F$, qui eſt l'angle cherché des plans des deux arcs de petits cercles. En voilà aſſez pour mettre ſur la voie ceux qui déſireront achever ce calcul.

7 Au reſte, il ne faut pas oublier de remarquer qu'une même corde appartient toujours dans la ſphére à deux arcs de petit cercle, égaux entr' eux, & dont les plans font entr'eux un angle $= 2\pi$ ou $2\pi'$. C'eſt pourquoi ſi on a les trois arcs d'un triangle ſphérique formé de petits cercles, le problème ſera évidemment ſuſceptible de huit ſolutions, à cauſe de la double poſition dont chacun des trois arcs eſt ſuſceptible, ſa corde étant donnée.

8 Je dois obſerver encore, qu'ayant déterminé ci-deſſus l'angle de l'arc de petit cercle avec l'arc de grand cercle qui ſoutend la même corde, on aura toujours l'angle de deux arcs de petits cercles, puiſqu'on a néceſſairement la

poſition, & l' angle des deux arcs de grand cercle qui ont les mêmes cordes que ces arcs de petit cercle.

9 Tels ſont les principes généraux de l' analiſe des triangles ſphériques qui ſont formés par des arcs de petits cercles, analiſe, par laquelle on détermine les angles de ces arcs avec les arcs de grand cercle correſpondans; les angles des plans de ces arcs; les angles des arcs de petit cercle entr'eux; & les angles de leurs plans; enfin l' aire de ces triangles qui ſe réduit évidemment à l' aire d' un triangle ſphérique ordinaire, plus ou moins *les côtes de melon* dont j' ai donné plus haut la meſure (*a*).

10 Outre cette nouvelle branche qu'on pourroit ajouter à la trigonométrie ſphérique, je remarquerai encore qu'on pourroit étendre la trigonométrie rectiligne ordinaire, en faiſant entrer dans les Elémens du triangle rectiligne (dont trois ſont ſuppoſé connus) la ſomme de ſes côtés, & ſa ſurface. Le calcul analitique pourra quelque fois être utile dans la ſolution de ces problêmes, par exemple dans celui où le trois côtés a, b, c ſont donnés, & où l'on trouve le *coſinus* de l' angle oppoſé au côté c, par la formule $\frac{aa+bb-cc}{2ba}$; mais en général il ſera ſouvent plus ſimple d' employer la méthode ſynthétique; & cette obſervation a lieu dans la plus part des problèmes où il y a des angles à chercher, parcequ'on ne peut exprimer analitiquement ces angles que par leurs *ſinus*, & que l' expreſſions de ces *ſinus* enferme ſouvent des radicaux dont la valeur eſt équivoque, à cauſe du double ſigne qui les affecte.

(*a*) On trouveroit de la même manière l'analiſe des triangles ſphériques formés par des arcs de grand & de petit cercle.

§. 2

Sur l' arc-en-ciel.

1 Voici quelques recherches ſur *l'arc-en-ciel*, qui, par leur ſimplicité, & par les remarques nouvelles qu'elles renferment pourront n' être pas indignes de l'attention des Géomètres, quoique la matière ſoit déja preſque uſée. Soit (*fig.* 6) SA le rayon incident ſur la goutte ſphérique de pluie, & AC le rayon refracté, l'arc $AB = 2\omega$, l'arc $AC = 2\omega'$, m le rapport de refraction, *c. à d.* du *ſinus* de l' angle de refraction au *ſinus* de l' angle d' incidence, en paſſant de l' air dans l' eau; on aura m coſ. ω = coſ. ω'. De plus il eſt clair que CD étant le rayon reflechi de AC, on aura l' angle $ACD = 180^\circ - 2\omega'$; & comme l' angle $BAC = \omega' - \omega$, l' angle de CD avec AE ſera $= 180^\circ - 2\omega' - (\omega' - \omega)$, & l'angle du rayon rompu DL, avec AE, ſera $180^\circ - 2\omega' - (\omega' - \omega) - \omega + \omega'$.

2 Par la même raiſon, après deux reflexions, l' angle du rayon rompu avec AE ſeroit $180^\circ - 2\omega' - (\omega' - \omega) - 2\omega' - (\omega' - \omega)$
après trois reflexions . . . $180^\circ - 2\omega' - (\omega - \omega) - 4\omega' - (\omega' - \omega)$
après quatre reflexions . . . $180^\circ - 2\omega - (\omega' - \omega) - 6\omega' - (\omega' - \omega)$
après n reflexions . . . . $180^\circ - 2n\omega' - (2\omega - 2\omega)$.

3 Puis donc que les rayons émergens infiniment proches ſont paralleles ainſi que les rayons incidens, la différentielle de l' angle ſuſdit = 0; donc $(n + 1)\, d\omega' = d\omega$. Or l'équation m coſ. ω = coſ. ω' donne $d\omega'$ ſin. $\omega = m\, d\omega$ ſin. ω. Donc $m(n + 1)$ ſin. ω = ſin. $\omega' = \surd(1 - m^2$ coſ. $\omega^2)$. D' où l' on tire aiſément l' angle ω, par l'équation ſin. ω^2

$$= \frac{1 - mm}{m^2(nn + 2n)};\ \text{donc coſ. } \omega^2 = \frac{m^2(n + 1)^2 - 1}{m^2(nn + 2n)}.$$

4 Soit $\frac{1}{m^2} = p^2$, $nn + 2n = k^{-1}$, on aura fin. $\omega = \sqrt{k} \cdot \sqrt{(p^2 - 1)}$ & $d\omega$ cof. $\omega = \frac{\sqrt{k} \cdot p\,dp}{\sqrt{(p^2-1)}}$, ou $d\omega = \frac{p\,dp\sqrt{k}}{\sqrt{(p^2-1)} \cdot \sqrt{(1+k-kp^2)}}$.

5 Suppofant donc que m varie d' une petite quantité finie dm, on aura $dp = -\frac{dm}{m^2} = -p^2\,dm$, l' angle ω deviendra $\omega - \frac{p^3\,dm\sqrt{k}}{\sqrt{(p^2-1)} \cdot \sqrt{(1+k-kp^2)}}$, ou $- \frac{p^3\,dm \times k}{\text{fin.}\,\omega\ \text{cof.}\,\omega} = -\frac{2p^3k\,dm}{\text{fin.}\,2\omega}$; & pour trouver ce que deviendra l'angle ω', on fe fervira de la formule m cof. ω = cof. ω' qui donne $- m\,d\omega$ fin. $\omega + dm$ cof. $\omega = - d\omega'$ fin. $\omega' = - m\,d\omega'\,(n + 1)$ fin. ω; d' où l' on tire $d\omega' = \frac{d\omega}{n+1} - \frac{p\,dm\ \text{cof.}\,\omega}{(n+1)\ \text{fin.}\,\omega}$.

6 Si donc dm eft la différence du rapport de refraction entre les rayons violets & les rayons rouges, la largeur de *l' arc-en-ciel* après n refractions (laquelle eft exprimée par la différence des angles de *l'. Art.* 2, en fuppofant que ω croiffe de $d\omega$, & ω' de $d\omega'$) fera $= - 2(n+1)\,d\omega' + 2\,d\omega = \frac{2p\,dm\ \text{cof.}\,\omega}{\text{fin.}\,\omega}$ ou $\frac{2p\,dm}{\text{tang.}\,\omega}$, ou $\frac{2\,dm}{m\ \text{tang.}\,\omega}$; c' eft-à-dire pour le premier *arc-en-ciel* $\frac{2\,dm\sqrt{(4m^2-1)}}{m\sqrt{(1-mm)}}$, pour le fecond $\frac{2\,dm\sqrt{(9m^2-1)}}{m\sqrt{(1-mm)}}$, & ainfi de fuite.

7 Ces formules au refte font d' autant moins rigoureufes, comme il eft aifé de le voir, que fin. ω eft plus

petit, & par conséquent que n eſt plus grand. Mais 1° comme il eſt rare que n ſoit > 2, puiſqu'il eſt rare de voir plus de deux *arcs-en-ciel*, elles ſeront ſuffiſamment exactes pour la phyſique. 2° ſi on vouloit avoir des valeurs plus exactes, on feroit $\text{ſin.} (\omega + d\omega) - \text{ſin.}\, \omega = \frac{p\, dp \sqrt{k}}{\sqrt{(pp-1)}}$, ou $\text{ſin.}\, \omega\, (\text{coſ.}\, d\omega - 1) + \text{ſin.}\, d\omega\, \text{coſ.}\, \omega$ $= \frac{p\, dp \sqrt{k}}{\sqrt{(pp-1)}}$; ce qui donneroit toujours ſenſiblement la même valeur de $d\omega$ que dans *l' Art.* 5, $\text{ſin.}\, \omega$ étant ſuppoſé ici peu conſidérable. A l' égard de l' équation $m\, \text{coſ.}\, \omega = \text{coſ.}\, \omega'$, elle deviendra $(m + dm)\, \text{coſ.}\, (\omega + d\omega) = \text{coſ.}\, (\omega' + d\omega')$, d' où l' on tire $dm\, \text{coſ.}\, \omega\, \text{coſ.}\, d\omega - dm\, \text{ſin.}\, \omega\, \text{ſin.}\, d\omega + m\, \text{coſ.}\, \omega\, \text{coſ.}\, d\omega - m\, \text{ſin.}\, \omega\, \text{ſin.}\, d\omega = \text{coſ.}\, \omega'\, \text{coſ.}\, d\omega' - \text{ſin.}\, \omega'\, \text{ſin.}\, d\omega'$; mettant dans cette équation au lieu de $\text{ſin.}\, d\omega$ ſa valeur approchée $d\omega$, & au lieu de $\text{coſ.}\, d\omega$ ſa valeur auſſi approchée, $1 - \frac{d\omega^2}{2}$, on aura $dm\, \text{coſ.}\, \omega - \frac{dm \cdot d\omega^2}{2}\, \text{coſ.}\, \omega - dm\, d\omega\, \text{ſin.}\, \omega + m\, \text{coſ.}\, \omega \times - \frac{d\omega^2}{2} - m\, d\omega\, \text{ſin.}\, \omega = - \frac{d\omega'^2\, \text{coſ.}\, \omega'}{2} - d\omega'\, \text{ſin.}\, \omega'$; d' où l' on tirera, en négligeant les termes très-petits par rapport aux autres, $2\, dm\, \text{coſ.}\, \omega - m\, d\omega^2\, \text{coſ.}\, \omega - 2\, m\, d\omega\, \text{ſin.}\, \omega = - d\omega'^2\, \text{coſ.}\, \omega' - 2\, d\omega'\, \text{ſin.}\, \omega' = - m\, d\omega'^2\, \text{coſ.}\, \omega - 2\, m\, (n + 1)\, d\omega'\, \text{ſin.}\, \omega$, & par conſéquent $d\omega' = - \frac{(n+1)\, \text{ſin.}\, \omega}{\text{coſ.}\, \omega} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{n+1}^2 \cdot \text{ſin.}\, \omega^2}{\text{coſ.}\, \omega^2} + \frac{2\, d\omega\, \text{ſin.}\, \omega}{\text{coſ.}\, \omega} + d\omega^2 - \frac{2dm}{m} \right)}$ double valeur de $d\omega'$, de laquelle il ne faut prendre que celle où le ſigne radical a $+$.

8 Ayant trouvé par les méthodes précédentes l'arc $AB = 2\, \omega$ pour le nombre donné n, & l' arc $AC = 2\, \omega'$, ſoit pris, à commencer du point C, cet arc AC, n fois

ſur la circonférence; & ſoit C' (*fig.* 7) le point où ſe terminera l'arc $COC' = n \, . \, AC$. Enſuite ſoit tirée la ligne $C'Q'$, telle que l'angle $Q'CB$ ſoit égal à l'angle SAR, & pris dans un ſens contraire, c'eſt-à-dire, de manière que la direction de l'arc $C'B$ ſoit dans un ſens contraire à celle de l'arc AR; il eſt viſible par ce qui précède, que $C'Q'$ ſera le rayon rompu qui entre dans l'œil, SA étant le rayon incident qui vient du ſoleil, & qui ſouffre dans la goutte de pluie n reflexions avant que de ſe rompre. Cela poſé, ſoit Aq parallele à $C'Q'$; la plus ſimple géométrie fait voir que l'angle $qAS = 180° - 2\,SAR + AC'$. Si cet angle qAS eſt $< 90°$, le ſpectateur de *l'arc-en-ciel* aura le dos tourné au ſoleil. Si l'angle qAS eſt entre 90 & 270 degrés, le ſoleil & *l'arc en-ciel* feront tous deux du même côté par rapport au ſpectateur. Or l'angle $2\,SAR = 2\,\omega$, comme il eſt aiſé de le voir. Donc pour que qAS ſoit $< 90°$, il faut que AC' ſoit $< 2\,\omega - 90°$ ou $AC' < AB - 90°$; & pour que qAS ſoit $> 270°$ il faut que AC' ſoit $> 2\,\omega + 90°$, ou $AB + 90°$. Soient donc pris de part & d'autre du point B les arcs BZ & BZ', chacun de 90 dégrés; le ſpectateur aura le dos tourné au ſoleil, toutes les fois que le point C' tombera hors de l'arc ZCZ'; & il aura le viſage tourné au ſoleil, toutes les fois que le point C' tombera ſur cet arc. Au reſte cette ſpéculation eſt preſque uniquement de pure curioſité, puiſqu'il eſt rare qu'il y ait plus de deux *arcs-en-ciel* viſibles.

9 L'arc AC' étant viſiblement égal à $2\,\omega'\,(n+1) - k \cdot 360°$, k exprimant un nombre entier poſitif, il s'enſuit que l'angle $qAS = 180° - 2\,\omega + 2\,\omega'\,(n+1) - k \cdot 360°$. Cet angle qAS eſt l'angle entre l'axe de *l'arc-en-ciel*, axe parallele au rayon ſolaire, & le cercle coloré qui répond au rapport de refraction m. Si les cercles colorés

colorés extrèmes ſont tous deux tels, que $q A$ tombe d'un même côté de l' axe, alors on aura comme dans l'*Art.* 7 la largeur de *l'arc-en-ciel* par la différence des angles $q A S$ répondans aux deux couleurs extrèmes. Si $q A$ tombe de de deux différens côtés de l' axe, la largeur de *l' arc-en-ciel* ſera encore déterminée par la différence des angles $q A S$, & ſi ces angles étoient égaux, la largeur de *l'arc-en-ciel* ſeroit $= 0$, le cercle coloré violet tombant ſur le cercle coloré rouge.

10 Il peut très-bien arriver que les angles $q A S$ pour les deux couleurs extrèmes ſe trouvent de différens côtés de l' axe AS. Par exemple ſi pour les rayons rouges l'angle $q A S$ étoit peu conſidérable, il pourroit très-bien arriver qu'en prenant les valeurs de ω & de ω' convenables aux rayons violets, $q A$ tombât alors de l' autre côté de $A S$. Il pourroit arriver auſſi qu'une ou pluſieurs couleurs diſparuſſent; ce qui arriveroit ſi l'angle $q A S$ étoit $= 0$ pour quelqu'une des couleurs, ou ſi l' on trouvoit pour deux couleurs différentes deux angles égaux $q A S$ placés de deux côtés différens de l' axe $A S$. Car alors le mélange de deux couleurs occaſionné par la coincidence des cercles, formeroit une couleur unique, différente des deux primitives. C'eſt même ce qui arrivera preſque infailliblement, quand le rayon $q A$ ſera de deux différens côtés de l' axe pour les couleurs extrèmes. Car alors un cercle coloré couvrira preſque néceſſairement un cercle d'une autre couleur, & même en couvrira un néceſſairement, ſi on admet des nuances & des gradations d' une couleur primitive & priſmatique à la couleur ſuivante. Sur quoi voyez le Tom. III. de nos *opuſc. Mathém.* p. 392 & ſuiv.

11 Soit A l' œil du ſpectateur, qu'on ſuppoſe placé ſur la circonférence de la terre, $S A E$ (*fig.* 8) le rayon venant du ſoleil, RAP une ligne droite qui touche la terre en A, $q' A$ le rayon viſuel pour un des cercles colorés, il eſt

clair que ſi l' angle $q' A E$ eſt aigu, c'eſt-à-dire ſi le ſpectateur a le dos tourné au ſoleil, & qu'on méne $q' K$ perpendiculaire à $A E$, le ſpectateur verra la partie du cercle coloré répondante au *ſinus verſe* $\frac{q'i}{q K}$. Mais ſi l'angle $q' A E$ eſt obtus, c'eſt-à-dire ſi le ſpectateur a le viſage tourné vers le ſoleil, alors on pourra voir le cercle coloré tout entier, pourvu que l' angle $q' A S$, qui pour lors eſt aigu, ſoit $=$ ou $<$ $R A S$.

12 Si le ſoleil eſt ſous l' horiſon, on pourra voir au moins une petite partie de *l' arc-en-ciel* (*fig.* 9), pourvu que les rayons ſolaires puiſſent arriver à la région des nuages. Soit $C B$ le rayon de la terre que je ſuppoſe a ou 1, $B V = \alpha$ la plus grande hauteur des nuages, on ceſſera d' appercevoir *l'arc-en-ciel* quand le rayon $S V$, tangent à la terre en O, formera avec le rayon $V A$ tiré à l' œil A du ſpectateur, un angle $S V A =$ à l' angle de *l'arc-en-ciel*, c' eſt-à-dire à l' angle que fait avec l' axe la cercle coloré extérieur, ſoit rouge, ſoit violet. Soit $C Z = x$, on aura ſin. $C V Z = \frac{x}{a + \alpha}$, & coſ. $C V Z = \sqrt{(1 - \frac{x}{(a+\alpha)^2})}$; ſin. $C V O = \frac{a}{a + \alpha}$, & coſ. $C V O = \sqrt{(1 - \frac{a^2}{(a+\alpha)^2})}$. Donc le *ſinus* de l' angle connu $S V A$, lequel *ſinus* j'appelle b, ſera $=$ ſin. $(C V O - C V Z)$ $= \frac{a}{a + \alpha} \sqrt{(1 - \frac{x^2}{(a+\alpha)^2})} - \frac{x}{a + \alpha} \sqrt{(1 - \frac{a^2}{(a+\alpha)^2})}$.

Or ſi $\alpha = 0$ on a $b^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, & $\frac{x}{a} = \sqrt{(1 - bb)}$ ou coſ. $S V A$, que j' appelle β pour abreger. Suppoſant donc α très-petit par rapport à a, on aura à très-peu-près, en faiſant $\frac{x}{a} = \rho + \beta$, l' équation $b = (1 - \frac{\alpha}{a})$

$\sqrt{(1 - \beta^2 - 2\beta\rho + \frac{2\alpha\beta^2}{a})} - (\beta + \rho)(1 - \frac{\alpha}{a})\sqrt{(\frac{2\alpha}{a})}$

ou en négligeant ce qu'on peut négliger, $O = - \frac{\alpha b}{a}$

$\frac{-\beta\rho + \frac{\alpha\beta^2}{a}}{b} - \beta\sqrt{(\frac{2\alpha}{a})}$; d'où l'on tire à très-peu-près

$\rho = -b\sqrt{(\frac{2\alpha}{a})}$. *CZ* étant connüe, on aura l'angle *ACV* ou l'arc *AB*, & par conséquent l'angle *OCA* $=$ *VCO* $-$ *ACV*, qui sera $=$ à la hauteur négative *LKS* du soleil, c'est-à-dire à son abaissement au dessous de l'horison. L'angle *ACV* sera à très-peu-près égal à $\frac{VB \cdot CZ}{ZV \cdot BC}$ ou à peu-près $\frac{\alpha\beta}{ab}$, & si on appelle δ l'angle très-petit & connu *OCV*, on aura l'angle $LKS = \delta - \frac{\alpha\beta}{ab}$; valeur qui ne suppose point celle de ρ trouvée ci dessus, & qui est d'ailleurs d'une grande simplicité. On trouvera ci-dessous une solution encore plus simple de ce problème.

13 Nous avons dit plus haut que lorsque le soleil *S* est au dessus de l'horison, le spectateur de *l'arc-en-ciel*, placé en *A* voyoit (*Art.* 11) la partie répondante au *sinus verse* $\frac{q'i}{q'K}$ (*fig.* 8), ou au *cosinus* $\frac{Ki}{q'K}$. Cette partie n'est pas la seule visible.

Pour déterminer la partie totale que le spectateur apperçoit de *l'arc-en-ciel*, soit *SAE* le rayon venant du soleil, ensorte que *PAV* soit la hauteur de cet astre, que j'appelle h; soit $q'AV$ l'angle de *l'arc en ciel*, que j'appelle β, & qui est connu par la théorie; imaginons un petit cercle qui coupe la terre, & qui passe par *AV*, faisant avec le plan du grand cercle *AVM* un angle que j'ap-

pelle α; si la tangeante de ce petit cercle au point A fait avec la corde AV un angle $= q'AV = \beta$, je dis que l'arc visible de *l'arc-en-ciel* sera évidemment déterminé par un *cosinus* $\frac{\lambda}{q'K}$, tel que $\lambda = Ki$ cos. α. Il s'agit donc de trouver l'angle α. Or il est d'abord évident, en menant la perpendiculaire CL à AV, que $CL =$ cos. h, & $AL =$ sin. h; il est de plus évident que si on nomme x la distance du point L au centre du cercle cherché qui fait avec le plan AVM l'angle α, & dont la tangente en A fait avec AV l'angle β, on aura $\frac{AL}{x}$ ou $\frac{\text{sin. } h}{x} = \text{tang. } \beta$, & que CL ou cos. h sera à $x :: 1 : \text{cos. } \alpha$, d'où l'on tire $\text{cos. } \alpha = \frac{x}{\text{cos. } h} = \frac{\text{tang. } h}{\text{tang. } \beta}$. Donc $\lambda = \frac{Ki \text{ tang. } h}{\text{tang. } \beta}$. Or comme $\frac{\text{tang. } h}{\text{tang. } \beta} = \frac{Ki}{q'K}$; il s'ensuit que $\lambda = \frac{Ki^2}{Kq'}$. La plus grande différence entre λ & Ki sera évidemment lorsque $Ki = \frac{Kq'}{2}$. L'arc répondant à $q'i$, comme *sinus verse*, sera pour lors de 60°, & l'arc visible aura pour *cosinus* le quart du *sinus* total, c'est-à dire que la moitié de *l'arc-en-ciel* visible sera d'environ 75° à 76°.

14 Lorsque le soleil S est au dessous de l'horison, on aura de même $AL =$ sin. h (*fig.* 10), h étant l'abaissement du soleil, $CL =$ cos. h, $LV' =$ (en nommant α' la hauteur de l'atmosphère, & 1 le rayon de la terre) $\sqrt{[(1 + \alpha')^2 - \text{cos. } h^2]} = \sqrt{(\text{sin. } h^2 + 2\alpha')}$ à très-peu-près; & si C' (*fig.* 11) est le centre des deux cercles formés dans la terre, & dans l'atmosphère par le plan cherché, on aura $C'L =$ cos. h cos. α'; $C'A$, rayon du cercle formé à la surface de la terre $= \sqrt{(\text{cos. } h^2 \text{ cos. } \alpha^2 + \text{sin. } h^2)} =$ à très-peu-près $\text{cos. } h \text{ cos. } \alpha + \frac{\text{sin. } h^2}{2 \text{ cos. } h \text{ cos. } \alpha}$

parceque h eſt ici fort petit ; & $C'V''$, rayon du cercle formé à la ſurface de l'atmoſphère, $= \sqrt{(C'L^2 + LV''^2)}$ $= \sqrt{(\text{coſ.}\, h^2\, \text{coſ.}\, \alpha^2 + \text{ſin.}\, h^2 + 2\alpha')} = C'u$; d'où Gu $= \sqrt{(C'u^2 - C'A^2)} = \sqrt{(2\alpha')}$; & $AO = \sqrt{(2\alpha')}$ $- \text{ſin.}\, h$. Or AO doit être à Ou ou $C'A - CL$: : le *ſinus* total à la tangente de l'angle β ; donc tang. $\beta =$ $\dfrac{\text{ſin.}\, h^2}{2\, \text{coſ.}\, h\, \text{coſ.}\, \alpha\, (\sqrt{(2\alpha')} - \text{ſin.}\, h)}$; d'où coſ. $\alpha =$ $\dfrac{\text{ſin.}\, h^2}{2\, \text{tang.}\, \beta\, \text{coſ.}\, h\, (\sqrt{2\alpha'} - \text{ſin.}\, h)}$. Ce ſera le *coſinus* de la moitié de l'arc viſible.

§. 3

Sur le mouvement des nœuds des ſatellites.

1 Dans les Recherches qui ont étés faites juſqu'à-préſent pour déterminer le mouvement des nœuds de la lune, on a ſuppoſé ſon orbite peu différente d'un cercle, & fort inclinée à l'écliptique. Voici une manière plus générale de réſoudre ce Problème, quelque ſoit l'angle d'inclinaiſon de l'orbite, & le rapport de ſes axes.

2 Suivant la théorie de la lune que nous avons donnée dans nos *Recherches ſur le ſyſtème du monde*, *T.* 1 *Art.* 29, la différentielle du mouvement des nœuds de la lune eſt $- \dfrac{3\, S\, dt^2}{B^3\, dz'}\, \text{ſin.}\, (\zeta' - \zeta)\, \text{ſin.}\, (nZ - \zeta)\, \text{coſ.}\, (\zeta' - nZ)$, S exprimant la maſſe du ſoleil, B la diſtance moyenne de la terre au ſoleil, ζ' l'angle parcouru par la lune (dans l'écliptique) pendant le tems t, ζ le mouvement du nœud pendant ce même tems, nZ celui du ſoleil, qu'on regarde comme à peu près uniforme, Z étant ſuppoſé le mouvement moyen de la lune.

3 Maintenant soit z l'argument de la latitude, u l'angle de l'orbite avec l'écliptique, y le rayon de l' orbite réelle de la lune, x celui de l' orbite projettée, on aura 1° sin. $(z' - \zeta) = \frac{y \text{ sin. } z \text{ cos. } u}{x}$; 2° cos. $(z' - \zeta) = \frac{y \text{ cos. } z}{x}$; 3° cos. $(z' - nZ) =$ cos. $[(z' - \zeta) - (nZ - \zeta)]$ $=$ cos. $(z' - \zeta)$ cos. $(nZ - \zeta)$ + sin. $(z' - \zeta)$ sin. $(nZ - \zeta)$; d' où il s' ensuit que la différentielle du mouvement des nœuds est $- \frac{3 S d t^2}{B^3 d z'} \times \frac{y \text{ sin. } z \text{ cos. } u}{x} \times$ sin. $(nZ - \zeta) \times [\frac{y \text{ cos. } z \text{ cos. } (nZ - \zeta) + y \text{ sin. } z \text{ cos. } u \text{ sin. } (nZ - \zeta)}{x}]$.

4 Or $dt = \frac{x x d z'}{g h}$ à très - peu - près, en nommant h le *sinus* de l' angle de projection initiale, rapporté à l' écliptique, & g la vitesse initiale de la lune, aussi dans l' écliptique. D' où il s' ensuit, en supposant pour plus de simplicité $h = 1$, c'est-à-dire l'angle de projection droit, que $\frac{y^2 d t^2}{x^2 d z'} = \frac{y y x x d z'}{g^2}$. Or il est très-aisé de voir que $x x d z' = y y d z$ cos. u, & que la vitesse initiale g' dans l' orbite réelle est telle que $g = g'$ cos. k, k étant l' inclinaison initiale de l' orbite.

5 Donc la différentielle du mouvement des nœuds sera $- \frac{3 S y^4 \text{ cos. } u^2 d z}{B^3 g' g' \text{ cos. } k^2} \times$ sin. $z \times$ sin. $(nZ - \zeta) \times [$cos. z cos. $(nZ - \zeta)$ + sin. z cos. u sin. $(nZ - \zeta)]$.

6 Maintenant soit a la distance moyenne de la lune à la terre, dans son orbite réelle, e l'excentricité de cette orbite considérée comme une ellipse, z'' la somme des angles ou arcs circulaires infiniment petits parcourus par la lune dans son orbite réelle durant le tems t (voyez Tom. V. de nos

opusc. math. p. 298), on aura $y = \frac{aa - ee}{a - e \text{ cos. } z}$, & $\frac{S}{B^{i}} = \frac{n^2 (T + L)}{a^3}$; $z = z'' - \int d\zeta$ cos ψ (voyez *l'ouvrage cité*) ; ou à très-peu-près $z = z'' - \zeta$ cos. ψ ; & au lieu de l'équation $x\,x\,d\,z' = y\,y\,d\,z$ cos. ψ qui n'est pas rigoureusement vraie, nous aurons $x\,x\,d\,z' = y\,y\,d\,z''$ cos. ψ; d'où il s'ensuit qu'il faut mettre à la rigueur dans la formule de *l'Art.* 5, $z'' - \zeta$ cos. ψ à la place de z, & $d\,z'' - d\,\zeta$ cos. ψ à la place de $d\,z$. Cependant comme nous négligeons ici les quantités très-petites, nous conserverons cette formule telle qu'elle est.

7 Pour la simplifier encore, nous considérerons que la distance initiale de la lune à la terre, qu'on prend ici pour l'unité, est $a + e$, & que par la théorie des trajectoires éliptiques $\frac{g'g'}{T + L} = \frac{2}{a + e} - \frac{1}{a}$. C'est pourquoi supposant encore $\frac{\text{cos. } \psi^2}{\text{cos. } k^2} = 1$, & substituant, on aura la différentielle du mouvement des nœuds $= - \frac{3\,n^2}{a^2} \times \frac{(aa - ee)^3 dz}{(a - e \text{ cos. } z)^4} \left(\frac{\text{sin. } z \text{ cos. } z \text{ sin. } (2\,n\,Z - 2\,\zeta)}{2} + \text{sin. } z^2 \text{ cos. } \psi \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{cos. } (2\,n\,Z - 2\,\zeta)}{2} \right] \right)$. On pourra dans cette quantité mettre $z'' - \zeta$ cos. ψ au lieu de z; ou même simplement z'', puisqu'on ne négligera par cette substitution, comme il est aisé de le voir, que des quantités très-petites de l'ordre de n^4.

8. Maintenant soit $a - e$ cos. z'' ou $a - e$ cos. $z = \frac{aa}{y'}$, & $\left(\frac{a^3}{a^2 - e^2} - y'\right) : \left(\frac{a^2 e}{aa - ee}\right) = \text{sin. } K$, on aura $\frac{dz}{(a - e \text{ cos. } z)^4} = \frac{dK}{a^6 \sqrt{(aa - ee)}} \left(\frac{a^3}{aa - ee} - \frac{a^2 e \text{ sin. } K}{aa - ee} \right)^3 =$

$\frac{dK}{(aa - ee)^{\frac{7}{2}}} \times (a - e \text{ fin. } K)^3$. Donc (*Art.* 7) la différentielle du mouvement des nœuds fera égale à $- \frac{3 n^2 dK (a - e \text{ fin. } K)^3}{a^2 \sqrt{(aa - ee)}} \times \left(\frac{\text{fin } z \text{ cof. } z \text{ fin. } (2nZ - 2\zeta)}{2} + \text{fin. } \zeta^2 \right.$ $\left. \text{cof. } \psi \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{cof. } (2nZ - 2\zeta)}{2} \right] \right)$.

9 Dans cette quantité il n' eft pas difficile de voir que $dK \times (a - e \text{ fin. } K)^3 \text{ fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta$ ne donnera point d'arcs de cercle puifque cette quantité fera proportionnelle à $\frac{dz \text{ fin. } z \text{ cof. } z}{(a - e \text{ cof. } z)^4}$, ou en faifant cof. $\zeta = u$ à $\frac{u\,du}{(a - eu)^4}$ qui eft abfolument intégrable, & ne renfermera point d' arcs de cercle ; fans compter que cette quantité fe trouve encore multipliée par fin. $2nZ - 2\zeta$, qui empêchera encore davantage, fi on peut parler ainfi, qu'il ne fe trouve d' arcs de cercle dans ces termes-là.

10 En fecond lieu fin. ζ^2 étant $= 1 - \text{cof. } \zeta^2$, cof. $\zeta = \frac{a}{e} - \frac{aa}{ey'}$, & $\frac{a^3}{aa - ee} - y' = \frac{aae \text{ fin. } K}{aa - ee}$, on aura fin. $\zeta^2 = \frac{(aa - ee)(1 - \text{fin. } K^2)}{(a - e \text{ fin. } K)^2}$; d' où il s' enfuit qu'on aura un terme de cette forme $- \frac{3 n^2 dK (a - e \text{ fin. } K)}{a^2 \sqrt{(aa - ee)}}$ $\times (aa - ee)(1 - \text{fin. } K^2) \times \text{cof. } \psi \times \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{cof.}(2nZ \;\; 2n\zeta)}{2} \right]$; ce qui produit un terme de cette forme $- \frac{3 n^2 dK \text{ cof. } \psi}{4}$ $\times \frac{a \sqrt{(aa - ee)}}{a^2}$. Donc puifque dK eft le mouvement moyen de la lune, comme il réfulte de la théorie des planètes, il s' enfuit que le mouvement moyen des nœuds fera au mouvement moyen de la lune comme $- \frac{3 n^2 \text{ cof. } \psi \sqrt{(aa - ee)}}{4a}$

eft

eſt à l'unité; où l'on remarquera que a & $\sqrt{(aa-ee)}$ ſont les deux demi-axes de l'ellipſe.

11 L'élément de l'équation principale du mouvement des nœuds ſera $-\frac{3n^2dK}{aa\sqrt{(aa-ee)}}\times(aa-ee)(1-\text{ſin.}\,K^2)$ $\text{coſ.}\,y\times\text{ſin.}\,z^2\times-\frac{\text{coſ.}\,(2nZ-2\zeta)}{2}$; d'où il eſt aiſé de voir que cette équation ſera au moyen mouvement de la lune (à cauſe de $Z=K$) à peu-près comme $-\frac{3n\,\text{ſin.}\,(2nK-2\zeta)\,\text{coſ.}\,y\sqrt{(aa-ee)}}{8a}$ eſt à K. Quant à l'élément de l'inclinaiſon, il ne diffère de celui du mouvement des nœuds, qu'en ce qu'il contient (*Art.* 2) $m\,\text{coſ.}\,(nZ-\zeta)$ au lieu de ſin. $(nZ-\zeta)$, m étant la tangente de l'inclinaiſon; d'où il eſt aiſé de voir que la plus grande équation de l'inclinaiſon ſera $\frac{3nm\,\text{coſ.}\,y\sqrt{(aa-ee)}}{8a}$ $\times\,\text{coſ.}\,(2nK-2\zeta)$.

12 Un ſavant Géomètre croit que le mouvement moyen de nœuds de la lune ſeroit le même dans une ellipſe dont la terre occupe le foyer, & dans un cercle qui auroit pour rayon le demi-grand axe de cette ellipſe; nos calculs donnent ces tems en raiſon de $\sqrt{(aa-ee)}$ à a, c'eſt-à-dire du petit axe au grand. Mais il me ſemble que notre Savant ſe trompe lorſqu'il conclut, de ce que les quarrés des ſecteurs infiniment petits ſont comme les y^4, dz étant le même, que les ſommes des y^4 ſeroient comme les quarrés des ſecteurs totaux; car $\int y^4dz$ n'eſt pas proportionnel à $(\int yydz)^2$.

13 Si l'orbite, au lieu d'avoir ſon foyer au point de tendance de la force centrifuge, comme on l'a ſuppoſé dans les calculs précédens, y avoit ſon centre, & que cette orbite fut elliptique, alors au lieu de $y=\frac{aa-ee}{a-e\,\text{coſ.}\,z}$

on auroit $yy = \frac{aa - ee}{\frac{1 - e^2 \text{ſin.} z^2}{a^2}}$; & l'élément du mouvement des nœuds feroit $- \frac{3 S y^4 dz}{B^3 g' g' (aa - ee)} \times \left(\text{ſin.} \zeta \text{ coſ.} \zeta \times \frac{\text{ſin.} (2nZ - 2\zeta)}{2} + \text{ſin.} \zeta^2 \text{ coſ.} \psi \left[\frac{1}{2} - \frac{\text{coſ.} (2nZ - 2\zeta)}{2} \right] \right)$ où le dénominateur $aa - ee$ vient de ce qu'on ſuppoſe que la planete part de l'extrémité du petit axe. Dans cette différentielle la quantité $\frac{dz \text{ ſin.} z \text{ coſ.} z}{(a^2 - e^2 \text{ ſin.} z^2)^2}$ eſt évidemment intégrable, comme il eſt aiſé de le voir en mettant au lieu de ſin. ζ^2 ſa valeur $1 - \text{coſ.} \zeta^2$, & en ſuppoſant coſ. $\zeta^2 = u$, & $1 - uu = s$, ce qui donnera une transformée de la forme $\frac{A\, ds}{ss}$. Maintenant pour intégrer $\frac{d\zeta \text{ ſin.} \zeta^2}{(1 - \frac{e^2}{a^2} \text{ ſin.} \zeta^2)^2}$, on fera ſin. $\zeta = x$, $\frac{e^2}{a^2} = n^2$, $1 - n^2 x^2 = u^2$, & $u^2 = \frac{1}{t}$, & on aura pour transformée $- \frac{dt}{2n^2 \sqrt{(t-1)} \cdot \sqrt{((u^2 - 1)t + 1)}} + \frac{t\, dt}{2n^2 \sqrt{(t-1)} \cdot \sqrt{((n^2 - 1)t + 1)}}$ Soit $n^2 - 1 = - \alpha$, à cauſe que $n^2 < 1$; il eſt facile de voir que l'intégrale renfermera un arc de cercle qui ſera $\frac{1}{2n^2 \sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \int \frac{dt}{\sqrt{\left[(1 + \frac{1}{\alpha}) t - tt - \frac{1}{\alpha} \right]}}$. La quantité qui eſt ſous le ſigne $\int$ eſt $= 0$ quand $x = 0$, c'eſt-à-dire quand $t = 1$, & $= 180°$ lorſque $t = \frac{1}{\alpha}$, & par conſéquent lorſque $x = 1$, c'eſt-à-dire lorſque $\zeta = 90°$. D'où il eſt aiſé de voir que la moitié de cette

quantité eſt $= 360°$ lorſque $z = 360°$, c'eſt-à-dire après une révolution entière.

14 On a ſuppoſé dans les calculs précédens que la diſtance initiale étoit $\sqrt{(aa - ee)}$; mais ſi c'étoit le grand axe a, alors il faudroit mettre dans le dénominateur du mouvement des nœuds $g'g'aa$ au lieu de $g'g'(aa - ee)$, & ſuppoſer $yy = \frac{aa-ee}{\frac{1-e^2 \operatorname{coſ.} z^2}{a^2}}$ ou $\frac{a^2}{\frac{1+e^2 \operatorname{ſin.} z^2}{a^2-e^2}}$.

Ainſi dans le premier cas le coéficient conſtant qui multiplie dz ſera $-\frac{3S(aa-ee)^2}{B^3 g'g'(aa-ee)}$, & la quantité à intégrer $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-xx)}(1-n^2x^2)^2}$ en ſuppoſant $n^2 = \frac{e^2}{a^2}$; & dans le ſecond, le coéficient conſtant eſt $-\frac{3S \cdot a^2}{B^3 g'g'}$, & la quantité à intégrer $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-xx)}(1+n^2x^2)^2}$ en ſuppoſant $n^2 = \frac{e^2}{aa-ee}$.

15 De plus ſi on nomme F la force centrale à la diſtance a, on aura dans le premier cas le quarré de la viteſſe $= g'g' - \frac{Fyy}{a} + \frac{F(aa-ee)}{a}$, & à l'extrémité du grand axe, $g'g' - \frac{Fee}{a}$. Or par la théorie des trajectoires $\frac{g'g'}{g'g' - \frac{Fee}{a}} = \frac{aa}{aa-ee}$, d'où l'on tire $g'g' = Fa$.

Dans le ſecond cas on trouvera de même $g'g' = \frac{F(aa-ee)}{a}$.

On aura de plus par la théorie des forces centrifuges $\frac{S}{B} : Fa :: \frac{B^3}{T^2} : \frac{a^3}{t^2}$, T & t étant les tems périodiques de la planete principale & du ſatellite. Ce qui donne le

moyen de faire difparoitre B, S, & F, en mettant pour F fa valeur $\frac{Sa \cdot T^2}{t^2 B^3}$.

16 Delà il eft aifé de voir, après avoir achevé les calculs, 1° que quand le fatellite part de l'extrémité du petit axe, le nœud parcourt durant une révolution un efpace $= - \frac{3 t^2}{4 T^2} \times \frac{\sqrt{(aa-ee)}}{\sqrt{(aa-ee)}} \times 360°$ cof. y, 2° que quand le fatellite part de l' extrémité du grand axe, le nœud parcourt durant une révolution un efpace $= - \frac{3 t^2}{T^2} \times \frac{\sqrt{(aa-ee)}}{a} \times - 1 \times - 360°$ cof. y, ou $- \frac{3 t^2 \text{cof.} y \sqrt{(aa-ee)} \cdot 360°}{4 T^2 a}$, ou il faut remarquer que j' ai mis $- 360°$ parceque dans ce fecond cas l' intégrale $\int \frac{dt}{\sqrt{[(1 + \frac{1}{\alpha}) t - tt - \frac{1}{\alpha}]}}$ doit être prife négativement, attendu que quand $x = 0$, $t = 1$; & quand $x = 1$, $t = \frac{aa - ee}{a^2} < 1$.

17 Delà il s' enfuit que le mouvement des nœuds eft retrograde dans les deux cas, & que le mouvement moyen eft plus grand dans le premier cas que dans le fecond, en raifon de a^2 à $aa - ee$. On voit auffi que le mouvement moyen des nœuds dans le fecond cas, eft le même que dans *l' Art.* 10 ci-deffus, pourvu que le rapport $\frac{t}{T}$ foit le même dans les deux cas. Or il l'eft en effet, car T eft le même dans ces deux cas, & de plus les valeurs de t font égales; puifque le tems de la révolution dans une ellipfe, les forces tendantes au foyer, eft le mê-

me que dans un cercle qui auroit pour diamètre le grand axe de cette ellipſe, & que le tems de la révolution dans ce dernier cercle eſt le même que dans une ellipſe qui auroit ſon diamètre pour grand axe, & pour petit axe une ligne quelconque, les forces étant ſuppoſées dirigées au centre.

18 Nous avons ſuppoſé dans la première & la ſeconde ſolution (*Artt.* 13 & 14) que le point de départ du ſatellite étoit le lieu même du nœud. Pour avoir une ſolution générale qui renferme à la fois ces deux cas & tous les autres, ſuppoſons comme dans la première ſolution que l' extrémité du petit axe ſoit le point de départ, & qu'elle ſoit éloignée du nœud de l' angle β, alors il faudra mettre $z + \beta$ au lieu de z dans le terme ſin. z^2 coſ. ψ, en regardant ici z comme l'angle parcouru par le ſatellite depuis le moment du départ, ce qui donne $z + \beta$ au lieu de z pour l'argument de la latitude; & la difficulté ſe réduira à intégrer une quantité de cette forme $\frac{dz\, \text{ſin.}\, (z + \beta)^2}{(1 - \frac{e^2\, \text{ſin.}\, z^2}{a^2})^2}$;

difficulté qui ſe réduit encore à intégrer une quantité de cette forme $\frac{dz\, \text{ſin.}\, z^2}{(1 - \frac{e^2}{a^2}\, \text{ſin.}\, z^2)^2} \times (\text{coſ.}\, \beta^2 - \text{ſin.}\, \beta^2) +$

$\frac{\text{ſin.}\, \beta^2\, dz}{(1 - \frac{e^2}{a^2}\, \text{ſin.}\, z^2)^2}$. Or ayant fait les mêmes transformations

que dans *l'Art.* 13, on trouvera que l' intégrale renferme une quantité de cette forme $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int \frac{dt}{\sqrt{[(1 + \frac{1}{\alpha})t - tt - \frac{1}{\alpha}]}}$

multipliée par $\frac{1}{n^2} (\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) \times (\text{coſ.}\, \beta^2 - \text{ſin.}\, \beta^2) + \text{ſin.}\, \beta^2$

$(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2})$. Si $\beta = 0$, c'est-à-dire si l'extrémité du petit axe tombe sur le nœud, comme on l'a supposé (*Art.* 13), on aura la formule même de cet Article. Si $\beta = 90°$, c'est-à-dire si l'extrémité du grand axe tombe sur le nœud, on aura le coéficient $- \frac{1}{n^2} \times (\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} =$ (à cause de $\alpha = 1 - n^2 = 1 - \frac{e^2}{a^2}$) $\frac{a^2 - e^2}{a^2 - e^2} = 1$; d'où il est aisé de voir que le mouvement des nœuds dans le premier cas sera $- \frac{3t^2}{4T^2} \times \frac{360° \cdot (aa-ee)^2 \cdot a}{\sqrt{(aa-ee)} \cdot (aa-ee)^2}$ & dans le second $- \frac{3t^2}{4T^2} \times \frac{(aa-ee)^2 \cdot a}{\sqrt{(aa-ee)} \cdot (aa-ee) \cdot a^2}$; d'où il résulte, comme dans *l'Art. préc.*, que le mouvement moyen des nœuds dans le premier cas est au mouvement moyen des nœuds dans le second, comme aa est à $aa - ee$.

19 On voit assez parcequi a déja été remarqué ci-dessus (*Art.* 6), que cette solution ainsi que les précédentes ne sont qu'approchées, parcequ'on n'y a point eu d'égard à à la double courbure de l'orbite, ni aux forces perturbatrices très-petites qui agissent dans l'orbite même, & qui empêchent les aires d'être exactement proportionnelles aux tems, comme nous l'avons supposé dans toutes ces solutions. Mais il est facile d'avoir égard à toutes ces circonstances, en suivant d'ailleurs la méthode que nous venons d'indiquer dans ces solutions, & dont l'usage est principalement de faire voir comment on peut trouver le mouvement des nœuds, en supposant que l'angle de l'orbite du satellite avec celle de la planete principale ne soit pas très-petit, & que l'orbite du satellite ne soit pas à peu-près circulaire.

§. 4

Sur une différentielle réductible à des arcs des sections coniques.

1 Dans le Tome V *de mes opuscules* p. 242, j'ai donné une méthode pour se délivrer des quantités infinies qui entrent dans l'intégrale $\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$, lorsque $u = \infty$. Il ne sera pas inutile de développer un peu davantage cette méthode, d'autant qu'il s'est glissé dans le calcul quelques erreurs légères, qui à la vérité ne nuisent en rien au résultat.

Soit donc; comme on l'a vu dans l'endroit cité,

$$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}} = -\frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}.$$

en prenant $z = \frac{b^2}{u}$, & supposant $uu \pm fu - bb = (u + 1)(u - q)$, & $u = \frac{qy + q}{y - q}$, le second membre de l'équation précédente se réduit à $-\frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}}$ $+ \frac{2\sqrt{(1 + u)}\sqrt{((q + 1)u)}}{\sqrt{(u - q)} \cdot \sqrt{(1 + q)}} - \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy \pm fy - bb)}}$. Cette intégrale sera $= 0$, comme elle le doit être, lorsque $z = 0$, ou $u = \infty$, ou $y = q$, pourvu que $\int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy \pm fy - bb)}}$ ou $\int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(y + 1)} \cdot \sqrt{(y - q)}}$ soit supposé $= 0$, lorsque $z = 0$, ou $y = q$. C'est ce qui a été démontré dans l'endroit cité.

2 Ainsi la valeur de $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}$, depuis $z = 0$, ou $u = \infty$, jusqu'à une valeur arbitraire k de u (qui donnera $z = \frac{bb}{k}$ & $y = \frac{qk + q}{k - q}$) sera égale à $-\frac{2\sqrt{(kk \pm fk - bb)}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{((1+k)k)}}{\sqrt{(k-q)}} - \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy \pm fy - bb)}}$ cette dernière quantité qui est sous le signe $\int$, étant supposée $= 0$ lorsque $y = q$, & finissant lorsque $y = \frac{qk + q}{k - q}$.

3 Maintenant la valeur de $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}$, depuis $u = k$, ou $z = \frac{bb}{k}$, ou $y = \frac{qk + q}{k - q}$ jusqu'à la valeur de z qui donne $\sqrt{(bb \pm fz - zz)} = 0$, ou $u = q$, ou $y = \infty$, est $-\frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}} + \frac{2\sqrt{(kk \pm fk - bb)}}{\sqrt{k}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$, cette dernière quantité qui est sous le signe $\int$ étant supposée $= 0$ quand $u = k$, & finissant quand $u = q$.

4 Donc la valeur de $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}$ répondante à une valeur quelconque de z, est égale à la somme des deux précédentes, *c. à d.* à $\frac{2\sqrt{((1+k)k)}}{\sqrt{(k-q)}} - \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy \pm fy - bb)}} - \frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$, le second ter-

me

me commençant à $y = q$, & finiſſant à $y = \frac{qk + q}{k - q}$ & les deux ſuivans commençant à $u = k$, & finiſſant à $u = q$.

5 Soit donc imaginée la courbe NDF, dont les abſciſſes étant u, (*fig.* 12) les ordonnées ſoient $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$; ſoit pris $AB = q$, $AE = k$, $AC = \frac{qk + q}{k - q}$; $AP' = u$, $AP = y$; & les quantités $- \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy \pm fy - bb)}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$ feront repréſentées par — aire $BNMP$ — aire. $EFM'P'$, ou plutôt — aire. $BNDC$ — aire. $EFM'P'$; remarqués que je mets — aire. $EFM'P'$ pour exprimer $+ \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fuu - bb)}}$, parceque AP' (u) croiſſant, l'aire $EFM'P'$ diminue.

6 A l'égard des aires $BNMP$, $EFM'P'$, ou $\int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy \pm fy - bb)}}$ & $\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$; j'ai donné dans *les Mémoires de Berlin* de 1746, Tom. 2 p. 203, la manière de les réduire à la rectification de l'hyperbole, ainſi cet article ne fait aucune difficulté.

7 Maintenant pour ſimplifier la conſtruction précédente, ſoit ſuppoſée la conſtante arbitraire k tele, qu'on ait $\frac{qk + q}{k - q} = k$, c'eſt-à dire $AE = AC$, il eſt clair 1° que quand $u = q = AB$, le point M' tombe en N, & l'intégrale complette, depuis $u = \infty$ juſqu'à $u = q$, ou depuis $z = 0$ juſqu'à $\sqrt{(bb + fz - zz)} = 0$, devient $\frac{2\sqrt{((1 + k)k)}}{\sqrt{(k - q)}} - \frac{2\sqrt{(qq \pm fq - bb)}}{\sqrt{q}}$ — 2 aire. $BNCD$.

2° qu'en général u étant $= AP'$, l'intégrale est $\frac{2\sqrt{((1+k)k)}}{\sqrt{(k-q)}}$ $- \frac{2\sqrt{(uu+fu-bb)}}{\sqrt{u}} - BNM'P' - 2\,CDM'P'$ (on peut mettre encore au lieu des deux derniers termes $+ BNM'P' - 2 \cdot BNCD$). Or 1° la condition $\frac{qk+q}{k-q} = k$ donne $k = q + \sqrt{(qq+q)}$. 2° la condition de $u = q$, *donne* $\sqrt{(qq+fq-bb)} = 0$, puisque (*Art.* 1) $uu \pm fu - bb = (u+1)(u-q)$. Donc l'intégrale totale $+ \frac{2\sqrt{((1+k)k)}}{\sqrt{(k-q)}} - \frac{2\sqrt{(qq\pm fq-bb)}}{\sqrt{q}}$ $- 2 \times BNCD$ devient égale à $\frac{2\sqrt{kk}}{\sqrt{q}} - 2 \cdot BNCD$, en prenant $k = q + \sqrt{(qq+q)}$, ou $k = q + \sqrt{(qq+qa)}$, a étant supposé représenter l'unité, & telle que $qa = bb$, & $a - q = \pm f$, ce qui donne $\frac{bb}{q} - q = \pm f$; d'où l'on tire la valeur de q, celle de a, & celle de $k = q + \sqrt{(qq+bb)}$, exprimées l'une & l'autre en b & en f.

8 Il est bon de remarquer que u ne sauroit être $= 0$, puisque $u = 0$ rendroit $z = \infty$, & $\sqrt{(bb+fz-zz)}$ imaginaire; u ne sauroit non plus être $< q$, puisqu'autrement $\sqrt{(uu \pm fu - bb)}$ ou $\sqrt{(u+a)} \cdot \sqrt{(u-q)}$ seroit imaginaire. A l'égard de y, sa valeur s'étend depuis $u = \infty$ qui donne $y = q$, jusqu'à $u = q$, qui donne $y = \infty$. On doit observer aussi que la supposition de $\sqrt{(bb \pm fz - zz)} = 0$ donne $z = \pm \frac{f}{2} \pm \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}$, & comme z ne doit jamais être supposé négatif puisqu'autrement la différentielle $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}$ changeroit de for-

me, il s'ensuit que la vraie & seule valeur de z est alors $\pm \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}$, & celle de u ou $\frac{bb}{z} = \mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}$; d'où l'on tire (*Art.* 7) $q = \mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}$, $a = \pm \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}$ & $k = q + \sqrt{(qq + qa)} = q + b = b \mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}$.

9 Si l'on fait, comme dans le Tome V *de nos opusc.* p. 243, u égal en général à $\frac{ay + b'}{cy + e}$; & qu'on suppose comme dans l'endroit cité $\frac{l}{m} = \frac{b'}{a}$, & $-\frac{f'}{h} = \frac{b'}{e}$ on aura, ainsi que je l'ai fait voir $2d\,[\sqrt{(f' + hu)} \cdot \sqrt{(l + my)}] = \frac{h\sqrt{(lc - me)} \cdot du\sqrt{u}}{\sqrt{(hc)} \cdot \sqrt{(u + \frac{f'}{h})} \cdot \sqrt{(u - \frac{a}{c})}} + \frac{m\,dy\sqrt{(f'c + ha)} \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{(mc)} \cdot \sqrt{(y + \frac{l}{m})} \cdot \sqrt{(y + \frac{e}{c})}}$. Or il faut d'abord pour que les deux termes du second membre ne soient point imaginaires, que $\frac{lc - me}{hc}$ & $\frac{f'c + ha}{mc}$ soient positifs, c'est-à-dire que $\frac{l}{h} - \frac{me}{hc}$, & $\frac{f'}{m} + \frac{ha}{mc}$ soient positifs. Il faut de plus que $(\frac{u + f'}{h}) \times (u - \frac{a}{c}) = uu \pm fu - bb$, d'où l'on tire $\frac{f'}{h} - \frac{a}{c} = \pm f$, & $\frac{f'a}{hc} = bb$; donc à cause de $f'e + hb' = 0$, on aura

$-\frac{b'}{e} - \frac{a}{c} = \pm f$ & $-\frac{b'a}{ec} = bb$. Il faudra enfin, pour que la différentielle $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(y+\frac{l}{m})}\sqrt{(y+\frac{e}{c})}}$ soit de la forme $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy\pm\alpha y-\beta\beta)}}$, & par conséquent réductible à la rectification de l'hyperbole, que $\frac{le}{mc}$ soit négatif, c'est-à-dire que $\frac{b'e}{ac}$ soit négatif.

10 Les équations $\mp\frac{b'}{e} - \frac{a}{c} = \pm f$ & $-\frac{b'a}{ec} = bb$, donnent $\frac{a}{c} = \mp\frac{f}{2} \pm\sqrt{(\frac{ff}{4}+bb)}$, & $\frac{b'}{e} = \mp\frac{f}{2}\mp\sqrt{(\frac{ff}{4}+bb)}$; & puisque $\frac{b'e}{ac}$ doit être négatif, il faudra donc que $\mp\frac{f}{\mp\frac{f}{2}\pm\sqrt{(\frac{ff}{4}+bb)}} - 1$ soit négatif. Or c'est en effet ce qui a lieu évidemment; car $-\frac{f}{-\frac{f}{2}\pm\sqrt{(\frac{ff}{4}+bb)}}$ & $\frac{f}{\frac{f}{2}\pm\sqrt{(\frac{ff}{4}+bb)}}$ sont < 1.

11 Si on veut que les deux quantités radicales $\sqrt{(y+\frac{l}{m})}\cdot\sqrt{(y+\frac{e}{c})}$, & $\sqrt{(u+\frac{f'}{b})}\sqrt{(u-\frac{a}{c})}$ soient de la même forme, & qu'ainsi les deux quantités $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(y+\frac{l}{m})}\cdot\sqrt{(y+\frac{e}{c})}}$ & $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(u+\frac{f'}{b})}\cdot\sqrt{(u-\frac{a}{e})}}$ dépendent de la rectification de la même hyperbole, il

faudra que $\frac{f'}{b} - \frac{a}{c} = \frac{l}{m} + \frac{e}{c}$, & $- \frac{f'a}{bc} = \frac{el}{mc}$ c' est-à-dire (à cause de $\frac{f'}{b} = - \frac{b'}{e}$, & $\frac{l}{m} = \frac{b'}{a}$) qu'il faudra 1° que $+ \frac{b'a}{ec} = + \frac{b'e}{ac}$, d' où l' on tire $e = \pm a$, ou $b' = 0$. Or cette dernière suppofition ne peut avoir lieu, puifqu'elle donneroit $f' = 0$ & $l = 0$. On aura donc $e = \pm a$. 2° puifque $- \frac{b'}{e} - \frac{a}{c}$ ou $\frac{b'}{a} + \frac{e}{c} = + f$ (*Art.* 9), on aura $- b'ca - aae = b'ce + aee$, ou $ae(a + e) = - b'c(a + e)$. Donc $a + e = 0$, ou $- bc = ae$. Or les valeurs de $\frac{a}{c}$ & de $\frac{b'}{e}$ tirées de *l' Art.* 10, font voir que $- b'c$ ne fauroit être $= ae$. Donc il ne refte que $a = - e$; même condition que ci-deffus.

12 Donc les deux différentielles appartiendront à la même hyperbole fi on prend $u = \frac{a}{c} \frac{(y + \frac{b}{a})}{y - \frac{a}{c}} =$

$$\frac{a}{c} \frac{(y - \frac{b}{e})}{y - \frac{a}{c}} = \frac{[\mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}][y + \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}]}{y \pm \frac{f}{2} - \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}}$$

d' où l' on voit que la valeur de u en y ne renfermera point d' autres coefficiens conftans, que ceux qui dépendent de f & de b.

13 Voyons présentement si les deux hyperboles peuvent n'être pas les mêmes. On a en général $u = \frac{a}{c}$

$$\frac{(y + \frac{b'}{a})}{y + \frac{e}{c}} = (Art.\ 10)\ (\mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}) \times$$

$$\left\{ y + \frac{e}{c} \times \frac{(\mp \frac{f}{2} - \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)})}{\mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}} \right\} \times \frac{1}{y + \frac{e'}{c}}$$

quantité, dans laquelle on peut mettre au lieu de $\frac{\mp \frac{f}{2} - \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}}{\mp \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}}$ sa valeur $- \frac{1}{bb} [\pm \frac{f}{2} + \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)}]^2$. A l'égard des facteurs $y + \frac{l}{m}$, $y + \frac{e}{c}$, ils seront égaux à $y + \frac{b'}{a}$, $y + \frac{e}{c}$; & on aura $\frac{b'}{a} + \frac{e}{c} = \frac{e}{cbb} \times \mp \frac{f}{2} \times [+ \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)} \pm \frac{f}{2}]$, & $\frac{b'e}{ac} = - \frac{ee}{ccbb} \times [+ \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)} \pm \frac{f}{2}]^2$. D'où il s'ensuit que la différentielle $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(y + \frac{l}{m})} \cdot \sqrt{(y + \frac{e}{c})}}$ dépend de la rectification d'une hyperbole dont les demi-

axes (conjugué & tranſverſe) ſont $\pm \frac{e}{cb} [\sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)} \pm \frac{f}{2}]$ & une ligne ρ telle que $\rho\rho - \frac{e^2}{c^2 b^2} [+ \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)} \pm \frac{f}{2}]^2 = \frac{e\rho}{cbb} \times \mp \frac{f}{2} \times [+ \sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)} \pm \frac{f}{2}]$. Or l' hyperbole dont la rectification donne la valeur de $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(u + \frac{f}{b})} \cdot \sqrt{(u - \frac{a}{c})}}$ ou $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$ a pour demi-axes (conjugué & tranſverſe) b, & une quantité r, telle que $rr - bb = \pm fr$. Enfin la valeur générale de $y = \frac{b - eu}{cu - e}$ devant toujours être poſitive, quelque valeur qu'on donne à u, on verra, en faiſant $u = \infty$, que $- \frac{e}{c}$ doit être poſitif. Donc le demi-ſecond axe de la première des deux hyperboles doit être $- \frac{e}{cb} [\sqrt{(\frac{ff}{4} + bb)} \pm \frac{f}{2}]$; d' où il eſt aiſé de voir, en achevant le calcul, que les deux axes des deux hyperboles ont entr'eux le même rapport, & qu'ainſi les deux hyperboles ſont ſemblables, c' eſt-à dire les mêmes dans les deux cas.

14 Voici l' uſage des calculs précédens dans un Problême Phyſico-Mathématique. Soit propoſé de trouver le tems de l' oſcillation d' un pendule dans un arc de grandeur finie; en nommant r le rayon, β l' abſciſſe qui répond au commencement de l'arc décrit, & x les abſciſſes des portions variables de l' arc, ces abſciſſes étant priſes

depuis le point le plus haut du cercle décrit en entier, on trouve que le tems dont il s'agit est proportionnel à $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\beta)} \cdot \sqrt{(2rx-xx)}} = - \frac{dx\sqrt{(x-\beta)}}{\beta\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{dx\sqrt{x}}{\beta\sqrt{(2r-x)} \cdot \sqrt{(x-\beta)}}$. La seconde partie $\frac{dx\sqrt{x}}{\beta\sqrt{(2rx-\beta x-2r\beta-xx)}}$ dépend de la rectification d'une ellipse dont les demi axes sont $\sqrt{(2r\beta)}$ & β, & dont les abscisses prises sur le demi-axe β, à compter du centre, sont $\frac{\sqrt{(\beta x-\beta\beta)}}{\sqrt{(\frac{2r}{\beta}-1)}}$, & la valeur totale de cette partie est $\frac{1}{\beta\sqrt{\beta}}$ X deux fois le quart de la circonférence de cette ellipse. La première partie, en faisant $x-\beta=z$, $2r-2\beta=+f$, $2r\beta-\beta\beta=bb$ sera égale à $-\frac{2k}{\beta\sqrt{q}}+\frac{2 \cdot BNCD}{\beta}$ (*Art.* 7 *ci dessus*). Or 1° on trouvera par les formules précédentes appliquées au cas présent $q=\beta$, & $k=\beta+\sqrt{(2r\beta)}$. 2° on trouvera aussi par les mêmes calculs précédens, & par *les Mémoires de Berlin de* 1746, que $BNCD$ multiplié par $\sqrt{(2r-\beta)}$ est égal à deux fois un arc d'hyperbole, dont le demi-axe transverse est $2r-\beta$, le demi-axe conjugué $\sqrt{(2r\beta-\beta\beta)}$, & dont les abscisses prises sur le demi-axe transverse, sont k & β, c'est-à-dire $\beta+\sqrt{(2r\beta)}$ & β. D'où il est clair que l'intégrale cherchée est $-\frac{2}{\beta}[\sqrt{\beta}+\sqrt{2r}]+\frac{2}{\beta\sqrt{(2r-\beta)}}$ X 2 fois l'arc d'hyperbole qu'on vient de désigner.

15 Il

15 Il eſt aiſé de voir que le tems de l'oſcillation totale eſt au tems de la deſcente par le demi-diamètre r, comme le double de $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\beta)} \cdot \sqrt{(2rx-xx)}}$ multiplié par $\frac{r}{\sqrt{2p}}$ eſt à $\frac{2}{\sqrt{2pr}}$, c'eſt-à-dire, comme le double de $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\beta)} \cdot \sqrt{(2rx-xx)}}$ eſt à $\frac{2}{\sqrt{r}}$; c'eſt pourquoi ſi on nomme T le tems de la deſcente par le demi-diamètre r, A le quart d'ellipſe déſigné ci-deſſus (*Art. préc.*) & B l'arc d'hyperbole déſigné de méme, le tems d'une oſcillation totale du pendule ſera $= T\sqrt{r}$ multiplié par $\left(\frac{2A}{\beta\sqrt{\beta}} - \frac{2}{\sqrt{\beta}} - \frac{2\sqrt{2r}}{\beta} + \frac{2B}{\beta\sqrt{(2r-\beta)}}\right)$.

16 Comme on peut avoir aiſément par approximation la valeur des arcs elliptiques & hyperboliques dont il s'agit dans *l'Art. préc.*, on aura facilement par approximation le tems d'une vibration du pendule.

Paris ce 23 Novembre 1769.

SUR LA METHODE

Des variations

PAR M. DE LA-GRANGE.

I.

J'ai donné dans le fecond Volume (*) une nouvelle méthode pour la folution des Problèmes où il s' agit de trôuver les courbes qui jouiffent de quelque propriété du *maximum*, ou du *minimum*. Cette méthode qu'on peut très-bien appeller, d' après M. Euler, *méthode des variations*, avoit déja été communiquée dès 1755 à ce grand Géomètre qui l' avoit jugée digne de fon attention & de fon fuffrage, comme il paroit par les différentes lettres qu'il m'a écrites fur ce fujet, & que je conferve encore. Dans une de ces lettres datée du 2 Octobre 1759, il s' exprime en ces termes :

Analitica tua folutio Problematis ifoperimetrici continet, ut video, quidquid in hac materia defiderari poteft, & ego maxime gaudeo, hoc argumentum, quod fere folus, poft primos conatus, tractaveram, a te potiffimum ad fummum perfectionis faftigium effe erectum. Rei dignitas me excitavit, ut tuis luminibus adiutus ipfe folutionem analiticam confcripferim, quam autem celare ftatui, donec ipfe tuas meditationes publici juris feceris, ne ullam partem gloriæ tibi debitæ præripiam. En effet M. Euler a donné depuis dans le Tome X. des nou-

(*) Quoiqu'on ait mis dans le titre du fecond Volume des Mém. de la Société Royale la date des années, dans lefquelles ont été préfentés les Mémoires qui le compofent; nous devons cependant faire obferver qu'on a omis à la fin du frontifpice celle de l'année 1762, dans laquelle ce Volume a été imprimé & publié. *Note de M. le Comte de Saluces.*

veaux Commentaires de Petersbourg imprimé en 1766, deux Mémoires assez étendus sur cette matière, dans lesquels après m' avoir fait honneur de la méthode dont il s' agit, il en explique les principes, & les usages avec beaucoup de détail & de précision (*voyez les pages* 12 & 97 *du Tome cité*). Après des témoignages aussi formels de la part d' un Géomètre tel que M. Euler, j' ai dû être surpris du peu de justice que m'ont rendue d'autres Géomètres qui se sont depuis peu occupés du même sujet. M. Fontaine vient de donner dans le Volume de l' Académie des Sciences de Paris pour l' année 1767 un Mémoire intitulé *Addition à la méthode pour la solution des Problèmes de maximis & minimis*. L'auteur debute par avancer sans aucun fondement que *je me suis égaré dans la route nouvelle que j' ai prise pour n' en avoir pas connu la vraie théorie*; ensuite pour suppler au défaut prétendu de ma méthode, il en donne deux autres qu'il regarde comme nouvelles & fort supérieures à toutes les méthodes connues pour le même objet. Je ne crois pouvoir rien faire de mieux pour ma justification que d'inviter les connoisseurs à lire l' ouvrage même de M. Fontaine & à le comparer avec le mien, & avec celui de M. Euler. On verra, si je ne me trompe que des deux méthodes de M. Fontaine, l' une n' est autre chose que celle que M. Euler avoit donnée dans son excellent ouvrage intitulé *Methodus inveniendi lineas curvas &c.*, & qu'il a ensuite abandonnée pour adopter la mienne; & que l'autre est la même quant au fond que ma méthode, dont elle differe seulement par la manière vague & imparfaite dont elle est présentée.

Les autres Géomètres dont j' aurois aussi en quelque façon sujet de me plaindre quoique par une raison bien différente de la précédente, sont les Peres Le-Seur & Jacquier minimes qui viennent de publier à Parme un très-bon Traité de calcul intégral.

Ces Savants ayant eu pour objet de rassembler les principales méthodes rélatives au calcul intégral, n'ont pas oublié la nouvelle méthode des variations, à laquelle ils ont même destiné un Chapitre entier du second Volume de leur ouvrage. Il auroit été naturel, & même équitable qu'ils eussent fait quelque mention de mon Mémoire de 1762 surtout après en avoir transcrit, comme ils ont fait, plusieurs pages entières (*voyez les pages* 521 *& suiv. du Vol. cité, & la page* 174 *& suiv. Tom. II. des Mém. de Turin*); cependant je serois bien éloigné de leur reprocher cette omission, s' ils s' étoient contentés d' exposer la méthode dont il s'agit, sans citer personne, comme ils en ont usé dans d' autres endroits du même Volume (*voyez la page* 448 *& suiv. de ce Vol. & la page* 179 *& suiv. du Tom. III. des Mém. de Turin*); mais comme par la citation des Mémoires de M. Euler dont nous avons parlé plus haut, ils paroissent vouloir lui attribuer cette méthode, je crois pouvoir faire remarquer que j' en suis le premier Auteur, & que je n'en partage la possession avec personne.

Je dois encore observer que Mrs. Le-Seur & Jacquier ne s'expriment pas exactement quand ils disent (*pag.* 531 *du Tom. II.*) que M. Euler a démontré que dans les trajectoires décrites par un nombre de corps quelconque l' intégrale de la vitesse multipliée par l' élément de la courbe est toujours un *maximum*, ou un *minimum*. M. Euler n' a donné sur ce sujet que ce que l' on trouve dans une appendice ajoutée à son excellent Traité sur les isopérimètres, où il fait voir que la trajectoire qu'un corps doit décrire par des forces centrales quelconques est la même que la courbe qu'on trouveroit en supposant que l' intégrale de la vitesse multipliée par l' élément de la courbe fût un *maximum*, ou un *minimum*.

L'application de ce beau théorème a un ſiſtème quelconque de corps, & ſur tout la manière de s'en ſervir pour réſoudre avec la plus grande ſimplicité & généralité tous les problèmes de Dinamique, m'eſt entièrement dûe; & ce qui doit le prouver invinciblement, c'eſt que cette théorie dépend des mêmes principes que celle des *variations*, & que l'une & l'autre ont paru dans le même Volume des *Mémoires de Turin pour les années* 1760 *&* 1761. Je pourrois ajouter que j'avois auſſi communiqué cette découverte à M. Euler dès 1756, & comme ce grand Gèomètre a bien voulu l'honorer alors de ſon approbation, je ne doute pas qu'il ne fut très-porté, ſi l'occaſion s'en préſentoit, à me rendre ſur ce ſujet la même juſtice qu'il a bien voulu me rendre à l'égard de la méthode *de maximis & minimis*.

II.

Quoique la méthode donnée dans le Tome II. des *Mémoires de Turin* ſuffiſe pour trouver la variation de toute fonction compoſée d'un nombre quelconque de variables, & contenant autant de ſignes d'intégration qu'on voudra; voici comment elle peut encore être généraliſée & ſimplifiée à quelques égards.

Soit φ la fonction dont on propoſe de trouver la variation $\delta\varphi$, & ſuppoſons que cette fonction φ ſoit donnée par une équation différentielle d'un dégré quelconque entre φ, & x, y, z &c. & les différentielles de ces variables. Dénotons cette équation par $\Phi = 0$, & différentiant par δ on aura $\delta\Phi = 0$; or comme Φ eſt une fonction donnée de φ, x, y, z &c. $d\varphi$, dx, dy, dz &c. on différentiera cette fonction en regardant chacune des quantités φ, x, y &c. $d\varphi$, dx, dy &c. comme une variable particulière, & marquant les différences par δ on aura

$$\delta \Phi = p\,\delta\varphi + p'\,\delta d\varphi + p''\,\delta d^2\varphi + p'''\,\delta d^3\varphi + \&c.$$
$$+ q\,\delta x + q'\,\delta dx + q''\,\delta d^2 x + q'''\,\delta d^3 x + \&c.$$
$$+ r\,\delta y + r'\,\delta dy + r''\,\delta d^2 y + r'''\,\delta d^3 y + \&c.$$
$$+ s\,\delta z + s'\,\delta dz + s''\,\delta d^2 z + s'''\,\delta d^3 z + \&c.$$
$$+ \&c. = 0$$

où p, p', p'' &c. q, q', q'', &c. feront des fonctions données de φ, x, y &c. $d\varphi$, dx, dy &c.

Maintenant il eft affez facile de voir que $\delta d\varphi$, fera la même chofe que $d\delta\varphi$, $\delta d^2\varphi$ la même chofe que $d^2\delta\varphi$, & ainfi des autres expreffions femblables; d' où il s' enfuit que l' équation précédente pourra toujours fe mettre fous cette forme

$$p\,\delta\varphi + p'\,d\delta\varphi + p''\,d^2\delta\varphi + p'''\,d^3\delta\varphi + \&c.$$
$$+ q\,\delta x + q'\,d\delta x + q'\,d^2\delta x + q'''\,d^3\delta x + \&c.$$
$$+ r\,\delta y + r'\,d\delta y + r''\,d^2\delta y + r'''\,d^3\delta y + \&c.$$
$$+ s\,\delta z + s'\,d\delta z + s''\,d^2\delta z + s'''\,\delta^3\delta z + \&c.$$
$$+ \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

& toute la difficulté fera maintenant réduite à tirer la valeur de $\delta\varphi$ de cette même équation.

Pour y parvenir d' une manière générale je la multiplie par une indéterminée ξ, & je prends enfuite l' intégrale de chaque terme, ce qui me donne

$$\int p\xi\,\delta\varphi + \int p'\xi\,d\delta\varphi + \int p''\xi\,d^2\delta\varphi + \int p'''\xi\,d^3\delta\varphi + \&c.$$
$$+ \int q\xi\,\delta x + \int q'\xi\,d\delta x + \int q''\xi\,d^2\delta x + \int q'''\xi\,d^3\delta x + \&c.$$
$$+ \int r\xi\,\delta y + \int r'\xi\,d\delta y + \int r'\xi\,d^2\delta y + \int r'''\xi\,d^3\delta y + \&c.$$
$$+ \int s\xi\,\delta z + \int s'\xi\,d\delta z + \int s''\xi\,d^2\delta z + \int s'''\xi\,d^3\delta z + \&c.$$
$$+ \&c. = \textit{à une conftante.}$$

Or en intégrant par parties on aura

$$\int p'\xi\,d\delta\varphi + p'\xi\delta\varphi - \int d(p'\xi)\,\delta\varphi$$
$$\int p''\xi\,d^2\delta\varphi = p''\xi\,d\delta\varphi - d(p''\xi)\,\delta\varphi + \int d^2(p''\xi)\,\delta\varphi$$

& ainfi du refte; donc faifant ces fubftitutions dans l'équation précédente, & fuppofant pour abreger

$$P = p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - d^3(p'''\xi) + \&c.$$
$$P' = p'\xi - d(p''\xi) + d^2(p'''\xi) - \&c.$$

$P'' = p''\xi - d(p'''\xi) - \&c.$

$P''' = p'''\xi - \&c.$

&c.

$Q = q\xi - d(q'\xi) + d^2(q''\xi) - d^3(q'''\xi) + \&c.$

$Q' = q'\xi - d(q''\xi) + d^2(q'''\xi) - \&c.$

$Q'' = q''\xi - d(q'''\xi) + \&c.$

$Q''' = q'''\xi - \&c.$

&c.

$R = r\xi - d(r'\xi) + d^2(r''\xi) - d^3(r'''\xi) + \&c.$

$R' = r'\xi - d(r''\xi) + d^2(r'''\xi) - \&c.$

$R'' - r''\xi - d(r'''\xi) - \&c.$

$R''' = r'''\xi - \&c.$

&c.

$S = s\xi - d(s'\xi) + d^2(s''\xi) - d^3(s'''\xi) + \&c.$

$S' = s'\xi - d(s''\xi) + d^2(s''\xi) - \&c.$

$S'' = s''\xi - d(s'''\xi) + \&c.$

$S''' = s'''\xi - \&c.$

&c.

on aura

$$\begin{aligned}
&\int (P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z) + \&c.\\
&+ P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \&c.\\
&+ Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \&c.\\
&+ R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \&c.\\
&+ S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \&c.\\
&+ \&c. = \text{à une conſtante} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)
\end{aligned}$$

Suppoſons encore pour abreger davantage

$$\Psi = P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \&c.$$

&

$$\begin{aligned}
\Pi = &P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \&c.\\
&+ Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \&c.\\
&+ R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \&c.\\
&+ S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \&c.\\
&+ \&c.
\end{aligned}$$

enſorte

enſorte que l' équation précédente devienne

$$\Pi + \int \Psi = \text{à une conſtante};$$

& il eſt clair que cette conſtante ne ſera autre choſe que la valeur de Π lorſque l' intégrale $\int \Psi$ eſt nulle; or ſi on donne à cette intégrale une certaine étendue déterminée, il eſt viſible que la quantité Π recevra auſſi une valeur déterminée; ainſi nommant Γ la valeur de Π qui répond au commencement de l' intégrale $\int \Psi$, & Δ la valeur de Π qui répond à la fin de la même intégrale, on aura l' équation

$$\Delta = \Gamma - \int \Psi .$$

Maintenant, comme la quantité ξ eſt encore à volonté, je la ſuppoſe telle que l' on ait $P = 0$ dans toute l' étendue de l' intégrale $\int \Psi$; ce qui donne l'équation différentielle

$$p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - d^3(p'''\xi) + \&c. = 0.$$

Or la valeur de ξ renfermera autant de conſtantes arbitraires qu'il y a de termes dans cette équation moins un; & par conſéquent autant qu'il y a, dans l' expreſſion de Π, de termes qui contienne $\delta\varphi$, & ſes différences. Donc le nombre des conſtantes arbitraires de ξ ſera plus grand d'une unité que celui des quantités P'', P''', &c.; donc on pourra toujours prendre ces conſtantes telles que l'on ait, dans la quantité Δ, $P'' = 0$, $P''' = 0$ &c., enſorte que les différences de $\delta\varphi$ diſparoiſſent entiérement.

Donc en général ſi pour plus de ſimplicité on enferme entre des crochets carrés les quantités qui ſe rapportent au commencement de l' intégrale $\int \Psi$, & entre des crochets ronds celles qui ſe rapportent à la fin de cette même intégrale, on aura

$$\begin{aligned}(P'\delta\varphi) = [\, & P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \&c. + \\ & Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \&c. + \\ & R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \&c. + \\ & S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \&c. + \&c.\,]\end{aligned}$$

$$- (Q' \delta x + Q'' d \delta x + Q''' d^2 \delta x + \&c. + R' \delta y + R'' d \delta y + R''' d^2 \delta y + \&c. + S' \delta z + S'' d \delta z + S''' d^2 \delta z + \&c. + \&c.)$$

$$- \int (Q dx + R \delta y + S \delta z + \&c.) \quad (C)$$

& il faudra que variable ξ ſoit déterminée enſorte que l'on ait $P = 0$, ou bien

$$p \xi - d \cdot p' \xi + d^2 \cdot p'' \xi - d^3 \cdot p''' \xi - \&c. = 0$$

& que de plus $(P'') = 0$, $(P''') = 0$ &c.

III.

Voyons maintenant l' uſage qu'on doit faire de ces formules dans les queſtions *de maximis* & *minimis*, & ſuppoſons qu'il s' agiſſe de trouver la rélation qui doit être entre les variables x, y, z &c. pour que la fonction φ devienne la plus grande ou la plus petite. Nous obſerverons d'abord que comme cette fonction eſt ſuppoſée donnée par une équation différentielle $\Phi = 0$, elle renfermera néceſſairement un certain nombre de conſtantes arbitraires, lequel ſera égal à l' expoſant de la plus haute différentielle de φ dans l' équation $\Phi = 0$. De plus il faudra par la nature du problème que la fonction φ renferme des expreſſions intégrales indéfinies, & les circonſtances de la queſtion détermineront l'endroit où ces intégrales devront être ſuppoſées commencer. Suppoſons que ce ſoit lorſque $x = a$, $y = b$, $z = c$ &c.; il eſt clair que les valeurs correſpondantes de φ, & de ſes différentielles ſeront des fonctions données de a, b, c &c. da, db, dc &c. & des conſtantes arbitraires qui entrent dans l'expreſſion de φ; de ſorte que ſi le nombre de ces conſtantes eſt μ, c' eſt-à-dire, ſi la plus haute différentielle de φ dans la valeur de Φ eſt $d^\mu \varphi$, alors les valeurs des quantités φ, $d\varphi$, $d^2 \varphi$ &c. juſqu'à $d^{\mu - 1} \varphi$, lorſque $x = a$, $y = b$, $z = c$ &c., ſeront arbitraires, & pourront être ſuppoſées données.

Cela poſé, ſuppoſons que la valeur de φ qui doit être la plus grande ou la plus petite ſoit celle qui répond à

l'endroit où $x = l$, $y = m$, $z = n$ &c., il faudra donc que la variation de cette valeur de φ soit nulle, ensorte qu'en la désignant par la caractéristique δ, on ait dans le même endroit $\delta \varphi = 0$. Ainsi il n'y aura qu'à supposer dans la formule (C) que l'intégrale $\int (Q \delta x + R \delta y + \&c.)$ soit prise de manière qu'elle commence lorsque $x = a$, $y = b$, $z = c$ &c. & qu'elle finisse lorsque $x = l$, $y = m$, $z = n$ &c., de sorte que les quantités qui dans cette formule se trouvent enfermées entre des crochets carrés soient rapportées à l'endroit où $x = a$, $y = b$, $z = c$ &c. & que celles qui sont enfermées entre des crochets ronds soient rapportées à l'endroit où $x = l$, $y = m$, $z = n$ &c.; & comme la question demande que dans ce second endroit la variation $\delta \varphi$ soit nulle, on fera le terme $(P' \delta \varphi) = 0$; ce qui donnera l'équation cherchée pour le *maximum* ou *minimum*. Or cette équation étant composée de deux parties dont l'une contient tous les termes qui sont sous le signe intégral, & dont l'autre n'est composée que de ceux qui sont hors du signe, il faudra faire deux équations séparées de ces deux parties, ce qui donnera

$$0 = \int (Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \&c.) \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

$$\begin{aligned} 0 = \; & [P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \&c. + \\ & Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \&c. + \\ & R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \&c. + \\ & S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \&c. + \&c.] \\ & - (Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \&c. + \\ & R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \&c. + \\ & S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \&c. + \&c.) \quad . \quad . \quad . \quad (E) \end{aligned}$$

L'équation (D) donnera en général, pour toutes les valeurs de x, y, z &c. depuis $x = a$, $y = b$, $z = c$ &c. jusqu'à $x = l$, $y = m$, $z = n$ &c., celle-ci

$$Q \delta x + R \delta y + S \delta z + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad (F)$$

Or cette équation doit avoir lieu quelles que soient les dif-

férences marquées par δ; donc 1° si par la nature du problême il n'y a aucune rélation donnée entre les variables, x, y, z &c., les différentielles δx, δy, δz &c. seront indépendantes l'une de l'autre, & il faudra faire les équations particulières $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ &c. Mais si par exemple les variables x, y, z &c. devoient être telles que l'on eut toujours $X dx + Y dy + Z dz + \&c. = 0$, alors en changeant d en δ on auroit aussi $X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + \&c. = 0$, d'où $\delta x = - \frac{Y}{X} \delta y - \frac{Z}{X} \delta z - \&c.$ ce qui étant substitué dans l'équation (F) donneroit celle-ci $(RX - QY) \delta y + (SX - QZ) \delta Z + \&c. = 0$ de sorte qu'il faudroit faire ensuite les équations particulières $RX - QY = 0$, $SX - QZ = 0$ &c.

En général il faudra réduire les différentielles δx, δy, δz &c. au plus petit nombre possible, & égaler ensuite à zero le coefficient de chacune de celles qui restent, & ces équations jointes aux équations données (s'il y en a) par la nature du problème serviront à trouver la rélation nécessaire entre les variables x, y, z &c. pour que la fonction φ devienne la plus grande ou la plus petite.

Or il est facile de voir que cette rélation sera toujours donnée par une ou plusieurs équations différentielles, de sorte que l'intégration y introduira nécessairement des constantes arbitraires; ainsi il restera encore à trouver la rélation nécessaire entre ces constantes pour que la fonction φ devienne un *maximum* ou un *minimum*. C'est à quoi on parviendra à l'aide de l'équation (E); en effet comme cette équation se rapporte à des valeurs déterminées de x, y, z &c. il est clair qu'on y pourra satisfaire par le moyen des constantes dont nous parlons. Pour cela on observera que les différentielles $d\delta\varphi$, $d^2\delta\varphi$ &c., $d\delta x$, $d^2\delta x$ &c. sont les mêmes que celles-ci $\delta d\varphi$, $\delta d^2\varphi$ &c., δdx, $\delta d^2 x$ &c., comme nous l'avons vu plus haut; de

ſorte que ſi on déſigne par f la valeur de φ qui répond à l' endroit où $x = a$, $y = b$ &c., & que on déſigne de même par F', F'', F''' &c. A', A'', A''' &c. B', B'', B''' &c. C', C'', C''' &c. les valeurs de P', P'', P''' &c. Q', Q'', Q''' &c. R', R'', R''' &c. S', S'', S''' &c. au même endroit, & par L', L'', L''' &c. M', M'', M''' &c. N', N'', N''' &c. les valeurs de Q', Q'', Q''' &c. R', R'', R''' &c. S', S'', S''' &c. dans l'endroit où $x = l$, $y = m$, $z = n$ &c., on aura cette équation déterminée

$$\begin{aligned} & F'\delta f + F''\delta df + F'''\delta d^2 f + \&c. \\ & + A'\delta a + A''\delta da + A'''\delta d^2 a + \&c. \\ & + B'\delta b + B''\delta db + B'''\delta d^2 b + \&c. \\ & + C'\delta c + C''\delta dc + C'''\delta d^2 c + \&c. \\ & - L'\delta l - L''\delta dl - L'''\delta d^2 l - \&c. \\ & - M'\delta m - M''\delta dm - M'''\delta d^2 m - \&c. \\ & - N'\delta n - N''\delta dn - N'''\delta d^2 n - \&c. - \&c. \\ & = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G) \end{aligned}$$

Pour faire uſage de cette équation on verra d'abord s'il y a par la nature du problème des rélations données entre les quantités f, a, b, c &c. l, m, n &c. & leurs différentielles, & ſubſtituant la valeur d' une ou de pluſieurs des différences de ces quantités affectées du ſigne δ, tirée des rélations données, on égalera à zero le coefficient de chacune de celles qui reſtent, & l'on aura autant de conditions qu'il faudra pour la ſolution complette du problème.

I V.

Nous avons vu plus haut que les valeurs de φ, $d\varphi$ &c. lorſque $x = a$, $y = b$ &c., c' eſt-à-dire, les valeurs de f, df &c. doivent être ſuppoſées données; or ſi on les regarde comme données d' une manière indépendante des quantités a, b, c &c. alors il eſt clair qu'on aura $\delta f = 0$, $\delta df = 0$ &c.; mais on peut ſuppoſer que ces quantités doivent être des fonctions données de a, b, c &c. & de leurs différentielles; en ce cas, on aura $\delta f = \pi \delta a +$

$\rho\,\delta b + \sigma\,\delta c$ &c. $\delta df = \pi'\delta a + \rho'\delta b +$ &c. & il faudra ſubſtituer ces valeurs dans l'équation (G).

De plus il peut arriver que la fonction ϕ qui doit être la plus grande ou la plus petite renferme les quantités a, b, c &c. l, m, n &c. avec leurs différentielles; alors ces quantités entrant dans l'expreſſion de Φ, leurs variations donneront dans la valeur de $\delta\Phi$ les termes

$$\alpha\delta a + \alpha'\delta da + \alpha''\delta d^2 a + \&c. +$$
$$\beta\delta b + \beta'\delta db + \beta''\delta d^2 b + \&c. +$$
$$\gamma\delta c + \gamma'\delta dc + \gamma''\delta d^2 c + \&c. + \&c. +$$
$$\lambda\delta l + \lambda'\delta dl + \lambda''\delta d^2 l + \&c. +$$
$$\mu\delta m + \mu'\delta dm + \mu''\delta d^2 m + \&c. +$$
$$\nu\delta n + \nu'\delta dn + \nu''\delta d^2 n + \&c. + \&c.$$

de ſorte qu'il faudra ajouter ces termes au premier membre de l'équation (A). Delà il eſt facile de voir qu'il faudra ajouter au premier membre de l'équation (B) les termes

$$\delta a\int\alpha\xi + \delta da\int\alpha'\xi + \delta d^2 a\int\alpha''\xi + \&c. +$$
$$\delta b\int\beta\xi + \delta db\int\beta'\xi + \delta d^2 b\int\beta''\xi + \&c. +$$
$$\delta c\int\gamma\xi + \delta dc\int\gamma'\xi + \delta d^2 c\int\gamma''\xi + \&c. + \&c. +$$
$$\delta l\int\lambda\xi + \delta dl\int\lambda'\xi + \delta d^2 l\int\lambda''\xi + \&c. +$$
$$\delta m\int\mu\xi + \delta dm\int\mu'\xi + \delta d^2 m\int\mu''\xi + \&c. +$$
$$\delta n\int\nu\xi + \delta dn\int\nu'\xi + \delta d^2 n\int\nu''\xi + \&c. + \&c.$$

Par conſéquent il faudra ajouter tous ces termes à l'équation déterminée (E) ou (G) avec des ſignes contraires, en ayant ſoin de prendre toutes les intégrales $\int\alpha\xi$, $\int\alpha'\xi$ &c. de telle manière qu'elles ſoient nulles, lorſque $x = a$, $y = b$ &c. & qu'elles ſoient complettes lorſque $x = l$, $y = m$ &c. Ainſi l'équation (G) deviendra dans ce cas

(H) . . . . . $o = F'\delta f + F''\delta df + F'''\delta d^2 f +$ &c.
$+ (A' - \int\alpha\xi)\delta a + (A'' - \int\alpha'\xi)\delta da + (A''' - \int\alpha''\xi)\delta d^2 a +$ &c.
$+ (B' - \int\beta\xi)\delta b + (B'' - \int\beta'\xi)\delta db + (B''' - \int\beta''\xi)\delta d^2 b +$ &c.
$+ (C' - \int\gamma\xi)\delta c + (C'' - \int\gamma'\xi)\delta dc + (C''' - \int\gamma''\xi)\delta d^2 c +$ &c.
$+$ &c.

$- (L' + \int\lambda\xi)\delta l - (L'' + \int\lambda'\xi)\delta dl - (L''' + \int\lambda''\xi)\delta d^2 l -$ &c.
$- (M' + \int\mu)\xi)\delta m - (M'' + \int\mu'\xi)\delta dm - (M''' + \int\mu''\xi)\delta d^2 m -$ &c.
$- (N' + \int\nu\xi)\delta n - (N'' + \int\nu'\xi)\delta dn - (N''' + \int\nu''\xi)\delta d^2 n -$ &c.
$-$ &c.

V.

Comme les équations différentielles ne renferment pas proprement les différentielles elles mêmes, mais ſeulement leurs rapports, il eſt clair que la fonction Φ qui forme le premier membre de l' équation propoſée $\Phi = 0$ pourra être regardée comme une fonction de φ, x, y, z &c. de $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ &c., $\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$ $\frac{d\cdot\frac{dy}{dx}}{dx}$, $\frac{d\cdot\frac{dz}{dx}}{dx}$ &c. Suppoſons pour plus de généralité qu'on ait $\Phi = \Sigma\, dx^m$, Σ étant une fonction de φ, x, y, z $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, $\frac{d\cdot\frac{dy}{dx}}{dx}$ &c. & différentiant par δ on aura $\delta\Phi = m\Sigma\, dx^{m-1}\delta dx + dx^m\delta\Sigma$; mais l' équation $\Phi = 0$ donne $\Sigma = 0$; donc $\delta\Phi = dx^m\delta\Sigma$.

Or ſoit

$$\delta\Sigma = \pi\delta\varphi + \pi'\delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \pi''\delta\left(\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{dx}\right) + \&c.$$
$$+ \rho\delta y + \rho'\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) + \rho''\delta\left(\frac{d\cdot\frac{dy}{dx}}{dx}\right) + \&c.$$
$$+ \sigma\delta z + \sigma'\delta\left(\frac{dz}{dx}\right) + \sigma''\delta\left(\frac{d\cdot\frac{dz}{dx}}{dx}\right) + \&c. + \&c.$$
$$+ \tau\delta x.$$

Donc multipliant par $\xi\, dx^m$, & intégrant par parties enſorte qu'il ne reſte ſous le ſigne intégral que les différen-

tielles δx, $\delta \varphi$, δy, δz *&c.* on aura une expreſſion qui ſera identique à l'expreſſion $\Pi + \int \Psi$ de *l'Art.* 11, enſorte que les quantités hors du ſigne ſeront identiques à la quantité Π, & les quantités ſous le ſigne identiques à la quantitè Ψ: Conſidérons ſeulement les quantités qui ſeront hors du ſigne, & je dis que, ſi dans ces quantités on change δ en d, elles deviendront nulles d'elles mêmes. En effet 1° le terme $\pi \delta \varphi$ n'étant ſuſceptible d'aucune intégration par parties reſtera tout entier ſous le ſigne. 2° Le terme $\pi' \delta \frac{d\varphi}{dx}$ deviendra d'abord $\pi' \left(\frac{\delta d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi \delta dx}{dx^2}\right)$, de ſorte qu'en multipliant par $\xi\, dx^m$, & changeant $\delta d\varphi$, δdx en $d\delta\varphi$, $d\delta x$ on aura l'intégrale $\int \xi \pi' dx^m \left(\frac{d\delta\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\, d\delta x}{dx^2}\right)$; doù en intégrant par parties on aura les termes hors du ſigne $\xi \pi' dx^m \left(\frac{\delta \varphi}{dx} - \frac{d\varphi \delta x}{dx^2}\right)$; changeons maintenant δ en d, & ces termes deviendront $\xi \pi' dx^m \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$;

3° Le terme $\pi'' \delta \frac{d \cdot \frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, donnera, en faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$, $\pi'' \left(\frac{\delta d\varphi'}{dx} - \frac{d\varphi' \delta dx}{dx^2}\right)$, d'où l'on tirera d'abord comme ci-devant les termes hors du ſigne $\xi \pi'' dx^m \left(\frac{\delta \varphi'}{dx} - \frac{d\varphi' \delta x}{dx^2}\right)$, leſquels en changeant δ en d deviennent $\xi \pi'' dx^m \left(\frac{d\varphi'}{dx} - \frac{d\varphi'}{dx}\right) = 0$; & ainſi de ſuite.

On fera le même raiſonnement ſur les autres termes de la valeur de $\delta \Sigma$, & l'on en conclura que ſi on change la caractériſtique δ en la caractériſtique ordinaire d, dans l'expreſſion de Π, on aura toujours $\Pi = 0$. Or l'on a en général $\Pi + \int \Psi =$ *à une conſtante* (*Art.* II.), donc lorſque $\Pi = 0$ on aura $\int \Psi =$ *à une conſtante*, & de la

$\Psi = 0$;

$\Psi = 0$; mais $\Psi = P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z$ + &c. donc changeant δ en d on aura toujours

$$P d\varphi + Q dx + R dy + S dz + \&c. = 0$$

équation identique d'elle même. Delà il eſt facile de conclure que les équations du *maximum* ou du *minimum* reſultantes de l'équation générale (F) de *l'Art.* III pourront toujours ſe réduire à une de moins; parceque ſi toutes ces équations, hors une, ſont ſuppoſées avoir lieu, celle-ci s'enſuivra toujours néceſſairement; en effet, comme les équations dont il s'agit doivent être indèpendantes des différences marquées par δ, il eſt clair qu'elles devront également avoir lieu en ſuppoſant que ces différences deviennent les mêmes que celles marquées par d; mais dans ce cas l'équation (F) qui renferme toutes les équations particulières pour le *maximum* ou pour le *minimum* devient identique, comme nous venons de le démontrer, donc &c.

J'avois déja prouvé cette propoſition en peu de mots dans le n. VIII. de mon Mémoire imprimé dans le Tom. II.; mais la démonſtration que je viens d'en donner à l'avantage d'être beaucoup plus ſimple & plus générale. Au reſte on voit par cette démonſtration que le théorème ceſſeroit d'être vrai ſi la fonction Φ n'étoit pas reductible à la forme Σdx^m, Σ étant une fonction quelconque de φ, x, y, z &c. $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ &c. $\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, $\frac{d\cdot\frac{dy}{dx}}{dx}$ &c.; il eſt vrai que cela doit toujours être par la nature même des équations différentielles; mais s'il s'agiſſoit des différences finies, enſorte que les différentielles $d\varphi$, dx, dy &c. qui entrent dans l'équation donnée $\Phi = 0$ dûſſent être des différences finies de φ, x, y &c. alors la condition dont nous parlons ne feroit plus néceſſaire, & pourroit très-bien ne pas avoir lieu dans la fonction Φ. On peut voir dans la ſeconde appendice du Mémoire cité un exemple du

calcul qu'on peut faire dans le cas des différences finies; nous n' en dirons rien ici pour ne pas trop nous écarter de notre objet; mais peut être pourrons nous y revenir une autre fois.

V I.

Supposons que l'on ait $\varphi = \int Z$, Z étant une fonction de x, y, z &c. & de leurs différentielles; on aura donc en différentiant (pour faire disparoitre le signe $\int$) l'équation $Z - d\varphi = 0$, laquelle étant comparée à l'équation $\Phi = 0$ donnera $\Phi = Z - d\varphi$, & de la $\delta\Phi = \delta Z - \delta d\varphi$. Soit

$$\begin{aligned} \delta Z = & q\delta x + q'\delta dx + q''\delta d^2 x + \&c. \\ & + r\delta y + r'\delta dy + r''\delta d^2 y + \&c. \\ & + s\delta z + s'\delta dz + s''\delta d^2 z + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

& l'on aura pour $\delta\Phi$ la même expression que dans *l'Art.* II en faisant $p = 0$, $p' = -1$, $p'' = 0$, $p''' = 0$ &c. Donc on aura d'abord $P = -d\xi$, $P' = \xi$, $P'' = 0$, $P''' = 0$ &c.; donc puisqu'il faut que la variable ξ soit déterminée par l' équation $P = 0$, on aura $d\xi = 0$, & de là $\xi =$ *à une constante*, qu'on pourra prendre égale à l' unité pour plus de simplicité; à l'égard des équations $(P'') = 0$, $(P''') = 0$ &c.; il est clair qu'elles auront lieu d' elles mêmes, à cause de $P'' = 0$ &c. On mettra donc par tout 1 à la place de ξ, & l' on aura pour le *maximum* ou le *minimum* de la fonction φ, 1° l' équation variable (F), 2° l' équation constante (G) (*Art.* III). Il faut remarquer à l' égard de cette dernière équation, que, comme on a $P' = \xi = 1$, $P'' = 0$ &c., on aura $F' = 1$, $F'' = 0$, $F''' = 0$ &c., de plus, comme la valeur de φ est nulle lorsque l' intégrale $\int Z$ commence, on aura $f = 0$, & par conséquent $\delta f = 0$, de sorte qu'il faudra effacer entiérement dans l' équation (G) tous les termes affectés de δf, δdf &c.

Si on compare cette ſolution avec celle que nous avons donnée dans le n. I. du Mémoire cité, on verra qu'elles s'accordent parfaitement entr'elles; l'équation variable (F) répond à l'equation que nous avons déſigné dans cet endroit là par (B), & l'équation conſtante que nous nommons ici (G) répond à l'équation (C) du même endroit en faiſant attention à la remarque que nous y avons faite touchant la manière de completter cette même équation (C), & de laquelle nous avons conclu que l'expreſſion complette de cette équation étoit $M' - {}'M = 0$, où M' repréſente les termes que nous avons déſignés dans l'équation (G) par $L'\delta l + L''\delta d l +$ &c. & $'M$ les termes déſignés par $A'\delta a + A''\delta d a +$ &c.

VII.

Soit enſuite $\varphi = \int Z$, Z étant une fonction de x, y, z &c. & de leurs différentielles, & en même tems de la quantité $(\varphi) = \int (Z)$, (Z) étant de même une fonction de x, y, z &c. & de leurs différentielles. On aura donc en différentiant $Z - d\varphi = 0$, & diffèrentiant enſuite par δ, $\delta Z - \delta d\varphi = 0$; or ſoit

$$\begin{aligned}\delta Z = {} & q\,\delta x + q'\,\delta d x + q''\,\delta d^2 x + \text{\&c.}\\ & + r\,\delta y + r'\,\delta d y + r''\,\delta d^2 y + \text{\&c.}\\ & + s\,\delta z + s'\,\delta d z + s''\,\delta d^2 z + \text{\&c.}\\ & + \text{\&c.} + \pi\,\delta(\varphi),\end{aligned}$$

& déſignons, pour abreger, cette valeur de δZ par $\delta V + \pi\delta(\varphi)$, enſorte que δV exprime tous les termes affectés de δx, $\delta d x$ &c., δy, $\delta d y$ &c., on aura donc $\delta V + \pi\delta(\varphi) - \delta d\varphi = 0$; or comme $(\varphi) = \int (Z)$, on aura en différentiant $d(\varphi) = Z$, & différentiant enſuite par δ, $\delta d(\varphi) = d\delta(\varphi) = \delta Z$; on ſubſtituera donc cette valeur dans l'équation précédente, & pour cela on la différentiera après l'avoir diviſée par π, ce qui donnera $d\delta(\varphi) + d\cdot\frac{\delta V}{\pi} - d\cdot\frac{\delta d\varphi}{\pi} = 0$; de ſorte qu'on aura

$\delta(Z) + d(\frac{\delta V}{\pi}) - d(\frac{\delta d\varphi}{\pi}) = 0$ . . . . (*I*)

ou $\delta(Z)$ ſera de cette forme

$$\delta(Z) = (q)\delta x + (q')\delta dx + (q'')\delta d^2 x + \&c.$$
$$+ (r)\delta y + (r')\delta dy + (r'')\delta d^2 y + \&c.$$
$$+ (s)\delta z + (s')\delta dz + (s'')\delta d^2 z + \&c.$$
$$+ \&c.$$

On traitera maintenant l' équation (*I*) comme nous avons traité l' équation $\delta\Phi = 0$ de *l'Art.* II ; pour cela on la multipliera par ξ, & enſuite on l'intégrera par parties, ce qui donnera d' abord

$$\xi\frac{\delta V}{\pi} - \xi\frac{\delta d\varphi}{\pi} + \int[\xi\delta(Z) - \frac{d\xi}{\pi}\delta V + \frac{d\xi}{\pi}\delta d\varphi]$$

= *à une conſtante*; or ſi on ſubſtitue pour δV & $\delta(Z)$ leurs valeurs la quantité ſous le ſigne ſera ſuſceptible des mêmes réductions que nous avons faites dans *l' Art. cité*, & le calcul s' achevera de la même manière. Nous nous contenterons de remarquer ici que l' on trouvera dans le cas préſent $P = -d(\frac{d\xi}{\pi})$, $P' = \frac{d\xi}{\pi}$, $P'' = -\frac{\xi}{\pi}$, $P''' = 0$ &c., de ſorte que pour la détermination de la variable ξ on aura l'équation $d(\frac{d\xi}{\pi}) = 0$, laquelle donne $\frac{d\xi}{\pi} = g$, & $\xi = h + g\int\pi$, h & g étant deux conſtantes arbitraires.

Or il faut que $(P'') = 0$, c'eſt-à-dire, que la valeur de P'' qui répond au point où $x = l$, $y = m$ &c. ſoit nulle (*Art.* II) ; donc puiſque $P'' = -\frac{\xi}{\pi}$, il faudra que la valeur de ξ ſoit nulle dans ce cas; ſoit donc Π la valeur de $\int\pi$ qui répond au même endroit, & l' on aura $h + g\Pi = 0$; d'où $h = -g\Pi$, donc $\xi = g(\int\pi - \Pi)$, ou bien, en faiſant pour plus de ſimplicité, $g = -1$,

$\xi = \Pi - \int \pi$; & de la $P' = -1$, $P'' = -\frac{\Pi - \int \pi}{\pi}$; ayant ainsi trouvé la valeur de ξ il n' y aura qu'à la substituer, & l'on trouvera pour le *maximum* ou le *minimum* des formules analogues à celles du n.° IX. *du Mémoire de* 1762 déja cité. On observera seulement que l' on aura ici comme dans le cas du problême précédent $f = 0$, & par conséquent $\delta f = 0$; ensuite on aura $\delta d f = \delta d \varphi = \delta Z$, en rapportant la valeur de δZ au point ou $x = a$, $y = b$, $z = c$ *&c.*; mais dans ce point on a aussi $(\varphi) = \int (Z) = 0$, donc $\delta (\varphi) = 0$; de sorte que la valeur de $\delta d f$ sera égale à ce que devient la quantité

$$q \delta x + q' \delta d x + q'' \delta d^2 x + \&c. +$$
$$r \delta y + r' \delta d y + r'' \delta d^2 y + \&c. +$$
$$s \delta z + s' \delta d z + s'' \delta d^2 z + \&c. + \&c.$$

lorsque $x = a$, $y = b$, $z = c$ *&c.*

Quant aux valeurs de $\delta d^2 f$, $\delta d^3 f$ *&c.* il ne sera pas nécessaire de les chercher, parcequ'elles n' entreront point dans l' équation déterminée (G).

On voit par ces deux exemples comment il faudra s' y prendre dans des cas plus compliqués, ainsi nous n' en dirons pas davantage ici. Nous nous contenterons seulement d' observer en général que la variable indéterminée ξ pourra toujours se déterminer par l' intégration de l' équation $P = 0$, lorsque la fonction φ sera donnée par une expression formée comme on voudra des variables x, y, z *&c.* & de leurs différentielles, & qui renferme de plus autant de signes d' intégration qu'on voudra; mais lorsque la fonction φ ne sera donnée que par une équation différentielle d' un dégré quelconque, alors l' indéterminée ξ dépendra d' une équation différentielle du même dégrê, laquelle pourra n' être pas intégrable; mais cela n' apportera aucun obstacle à la solution du problême; car dès qu'on aura trouvé les équations du *maximum* ou du *minimum* il n' y aura qu'à élimi-

ner la quantité ξ par le moyen de l'équation différentielle $P = 0$; mais il faudra ensuite avoir égard, dans l'introduction des constantes arbitraires, aux conditions $(P'') = 0$, $(P''') = 0$ &c.

VIII.

Les principaux avantages de ma méthode des variations pour la solution des problêmes de *maximis* & *minimis* consistent 1° dans la simplicité & la géneralité du calcul, comme on peut s' en convaincre aisément, en comparant cette méthode avec celle que M. Euler a donnée dans son excellent ouvrage intitulé *Methodus inveniendi lineas curvas &c.* & même avec celle que M. Fontaine vient de donner dans son Mémoire intitulé *Addition à la méthode &c.* déja cité plus haut. 2° En ce que ma méthode fournit des équations déterminées qui servent à résoudre les problêmes d' une manière plus générale & plus complette qu'on ne l' avoit fait avant moi. Quoique ces équations soient une suite nécessaire & naturelle de mon analise des variations, & que leur usage ne soit qu'une application très-simple des principes de la méthode générale de *maximis* & *minimis*; cependant un illustre Géomètre de *l'Académie des Sciences de Paris* vient de donner dans le volume déja cité pour l' année 1767 un savant Mémoire, dans lequel il paroit révoquer en doute l' exactitude de ces mêmes équations déterminées, & surtout l'application que j'en ai faite dans la solution du problême de la plus vite descente donnée dans mon Mémoire déja cité du second volume de la Société Royale. Pour éclaircir les difficultés de ce savant Mathématicien, & faire mieux sentir en même tems l'usage de nos formules, nous allons résoudre ici le même problême d'une manière encore plus générale, en y ajoutant des nouvelles considérations, qui ne laisseront, si je ne me trompe, plus rien à désirer sur ce sujet.

PROBLÊME.

Étant données d'eſpèce & de poſition deux courbes quelconques placèes dans un même plan, on demande de trouver une troiſième courbe, ſur laquelle un corps peſant puiſſe deſcendre de l'une à l'autre des deux courbes données, dans le plus petit tems poſſible.

Prenons une droite horizontale qui ſoit l'axe des abſciſſes des deux courbes données & de la courbe cherchée, & une droite verticale qui ſoit l'axe commun des ordonnées des mêmes courbes; ſoient a, b l'abſciſſe & l'ordonnée de la première courbe donnée, c'eſt-à-dire de celle d'où le corps doit partir, & l, m l'abſciſſe & l'ordonnée de l'autre courbe, à laquelle le corps doit arriver; enfin ſoient x, y l'abſciſſe & l'ordonnée de la courbe cherchée, ſur laquelle le corps doit ſe mouvoir; nommant u la viteſſe du corps, & prenant l'unité pour la force accélératrice de la gravité, on aura, comme l'on ſait, $u\,du = dy$, & de là $u = \sqrt{2(y-k)}$, k étant une conſtante arbitraire; pour la déterminer ſuppoſons que dans l'endroit où le corps commence à ſe mouvoir on ait $y = b$ (b étant une des ordonnées de la première courbe donnée), & que la viteſſe initiale du corps ſoit celle qu'il auroit acquiſe en tombant librement de la hauteur h, il faudra donc qu'en faiſant $y = b$ on ait $u = \sqrt{2h}$, ce qui donnera $2h = 2(b-k)$ & de là $k = b - h$.

Cela poſé on ſait que le tems eſt exprimé en général par $\int\frac{ds}{u}$, s étant l'arc de la courbe; de ſorte qu'en comparant cette formule à celle de *l'Art. VI.*, on aura $\varphi = \int\frac{ds}{u}$, & $Z = \frac{ds}{u}$, & de là, à cauſe de $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & $u = \sqrt{2(y-k)}$,

$$\delta Z = -\frac{ds\,\delta y}{u^3} + \frac{dx\,\delta\,dx}{u\,ds} + \frac{dy\,\delta\,dy}{u\,ds},$$

donc $q = 0$, $q' = \frac{dx}{uds}$, $q'' = 0$ *&c.* &

$r = -\frac{ds}{u^3}$, $r' = \frac{dy}{uds}$, $r'' = 0$ *&c.*; de là à cause de $\xi = 1$, on aura (*Art.* II)

$$Q = -d\cdot\frac{dx}{uds},\ Q' = \frac{dx}{uds},\ Q'' = 0\ \&c.$$

$$R = -\frac{ds}{u^3} - d\cdot\frac{dy}{uds},\ R' = \frac{dy}{uds},\ R'' = 0\ \&c.$$

ce qui donnera 1° l'équation variable, $Q\,\delta x + R\,\delta y = 0$; & par conséquent $Q = 0$ & $R = 0$, l'une ou l'autre de ces deux équations servira à determiner la courbe de la plus vite descente; & il seroit inutile de les employer toutes deux à la fois, parceque l'une suit nécessairement de l'autre à cause qu'en changeant δ en d on a l'équation identique $Qdx + Rdy = 0$ (*Art.* V). Prénant donc l'équation $Q = 0$ qui est la pus simple on aura $-d.\frac{dx}{uds} = 0$; d'où l'on tire en intégrant $\frac{dx}{ds} = fu = f\sqrt{2(y-k)}$ & de là $dx = \frac{fdy\,\sqrt{2(y-k)}}{\sqrt{[1-2f^2(y-k)^2]}}$ pour l'équation de la courbe brachystochrone, où f est une constante arbitraire.

2.° On aura l'équation constante $A'\delta a + B'\delta b - L'\delta l - M'\delta m = 0$ ou A', B' sont les valeurs de Q', R' c'est-à-dire de $\frac{dx}{uds}$, $\frac{dy}{uds}$ dans le premier point de la courbe, dans lequel $x = a$, $y = b$, & L', M' sont les valeurs des mêmes quantités pour le dernier point de la courbe, dans lequel $x = l$, $y = m$.

Mais pour donner à cette équation constante toute l'étendue dont la question peut être susceptible, il faudra avoir

égard

égard à la *Remarque* que nous avons faite dans *l'Art. IV.*, & faire varier auſſi la conſtante k qui entre dans la valeur de u, or comme $\Phi = Z - d\varphi$ (*Art. VI.*) $= \frac{ds}{\sqrt{2(y-k)}} - d\varphi$, il faudra ajouter à la valeur de $\delta\Phi$ le terme $\frac{ds\,\delta k}{2\sqrt{2(y-k)}^{\frac{3}{2}}} = \frac{ds}{u^3}\delta k$; donc, à cauſe de $\xi = 1$, on aura la quantité $-\delta k \int \frac{ds}{u^3}$ à ajouter au premier membre de l'équation précédente, laquelle deviendra par conſéquent $A'\delta a + B'\delta b - L'\delta l - M'\delta m - \delta k \int \frac{ds}{u^3} = 0$, l'intégrale $\int \frac{ds}{u^3}$ étant ſuppoſée priſe de manière qu'elle commence au premier point de la courbe, & qu'elle finiſſe au dernier point. Or je remarque d'abord qu'ayant déja trouvé $\frac{dx}{uds} = f$, on aura $Q' = f$, & par conſéquent $A' = L' = f$; j'obſerve enſuite qu'en prenant l'équation $R = 0$, on a $-\frac{ds}{u^3} - d\cdot\frac{dy}{uds} = 0$, d'où l'on tire en intégrant $\int \frac{ds}{u^3} + \frac{dy}{uds}$ ou bien $\int \frac{ds}{u^3} + R'$ $=$ *à une conſtante*; or en faiſant commencer l'intégrale $\int \frac{ds}{u^3}$ au premier point de la courbe, on aura dans ce point $\int \frac{ds}{u^3} = 0$, & $R' = B'$; & comme au dernier point de la courbe, on a $R' = M'$, il eſt clair que la valeur complette de $\int \frac{ds}{u^3}$ ſera $= B' - M'$. De plus, comme $k = b - h$, ſi on ſuppoſe en général que h ſoit une fonction quelconque donnée de a & b telle que l'on ait $dh = G\,da + H\,db$, on aura $\delta k = \delta b - \delta h = \delta b -$

$G\delta a - H\delta b$, de ſorte que par toutes ces ſubſtitutions l'équation précédente deviendra

$$[f-(M'-B')G]\delta a+[M'-(M'-B')H]\delta b - f\delta l - M'\delta m = 0,$$

laquelle, (à cauſe que la première courbe dont les ordonnées ſont a & b eſt ſuppoſée indépendente de la dernière dont les ordonnées ſont l & m) peut d'abord ſe partager en ces deux-ci

$$[f-(M'-B')G]\delta a+[M'-(M'-B')H]\delta b = 0$$
$$f\delta l + M'\delta m = 0.$$

Maintenant comme les coordonnées a & b appartiennent à une courbe donnée, on aura par la nature de ces courbes $da = \varepsilon db$, & $dl = \eta dm$, & changeant la caractériſtique d en δ, on aura auſſi $\delta a = \varepsilon\delta b$ & $\delta l = \eta\delta m$; donc ſubſtituant ces valeurs dans les équations précédentes on aura

$$[f-(M'-B')G]\varepsilon + M' - (M'-B')H = 0$$
$$f\eta + M' = 0$$

ou bien en remettant pour ε & η leurs valeurs $\frac{da}{db}$, $\frac{dl}{dm}$, on aura

$$[f-(M'-B')G]da+[M'-(M'-B')H]db = 0$$
$$fdl + M'dm = 0.$$

Maintenant ſi on ſuppoſe que la hauteur h qui répond à la viteſſe initiale ſoit égale à b, enſorte que le corps commence à ſe mouvoir ſur la brachyſtochrone avec la même viteſſe qu'il auroit acquiſe en deſcendant depuis l'axe des abſciſſes, on aura $G = 0$ & $H = 1$, & les deux équations précédentes deviendront

$$fda + B'db = 0,\ fdl + M'dm = 0;$$

mais $f = \frac{dx}{uds}$, $B' = \frac{dy}{uds}$ au premier point de la courbe, & $M' = \frac{dy}{uds}$ au dernier point de la courbe; dono

on aura pour le premier point de la courbe $dxda + dydb = o$, ou bien $\frac{dx}{dy} = -\frac{db}{da}$, & pour le dernier point de la courbe $dxdl + dydm = o$, ou bien $\frac{dx}{dy} = -\frac{dl}{dm}$, ce qui fait voir que la courbe de la plus vite defcente doit couper à angles droits les deux courbes données, & cela s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans *l'Art. IV.* du Mémoire déja cité du fecond volume.

Mais fi on veut que la viteffe initiale foit nulle, alors on aura $h = o$, & par conféquent $G = o$, & $H = o$, ce qui donnera les deux équations

$$f\,da + M'\,db = o,\; f\,dl + M'\,dm = o,$$

la feconde de ces équations étant la même que dans le cas précedent, il en refulte que la brachyftochrone doit auffi couper la feconde courbe à angles droits, mais quant à la première courbe l'équation $f\,da + M'\,db = o$, donnera $\frac{da}{db} = -\frac{M'}{f} = \frac{dl}{dm}$; de forte qu'on aura $\frac{da}{db} = \frac{dl}{dm}$; ce qui fait voir que la tangente menée à la première courbe par le point où commence la brachyftochrone doit être parallele à la tangente menée à la feconde courbe par le point où la brachyftochrone fe termine; & c'eft ce qui s'accorde parfaitement avec le refultat de la folution donnée par M. le Chevalier de Borda dans fon Mémoire imprimé dans le volume de *l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1767.

A Berlin ce 28 *Mai* 1770.

RECHERCHES

Sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes.

PREMIER MÉMOIRE

Où l'on suppose que l'attraction est en raison inverse des carrés des distances.

PAR M. DE LA GRANGE.

Le Problême que je me propose de résoudre dans ce Mémoire l'a déja été par M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1760, & dans le Tôme X des nouveaux Commentaires de Petersbourg qui vient de paroître, mais pour le cas seulement où le corps se meut dans un plan passant par les deux centres des *Idrus*. La solution que j'en vais donner ici est générale quelle que soit la courbe décrite par le corps, & la méthode sur laquelle elle est fondée a l'avantage de conduire directement à des équations où les indéterminées seront separées d'elles mêmes; sans qu'on ait besoin pour cela des transformations, & des substitutions épineuses que M. Euler a employées.

Comme le Problême dont il s'agit a un rapport immédiat avec celui des trois corps, il ne seroit pas impossible que la méthode de ce Mémoire ne fût de quelque utilité pour la solution de ce fameux Problême qui fait depuis si long-tems l'objet des travaux des plus grands Géometres. Cette considération est même le principal motif qui me détermine a publier ces recherches; je sou-

haite qu' elles puissent mériter au moins par là quelque attention de la part de Savans.

I.

Ayant pris trois axes fixes quelconques, & perpendiculaires entr' eux, soient x, y, z les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps & rapportée à ces axes : & soient de même a, b, c, les coordonnées qui déterminent la position de l'un des centres des forces par rapport aux mêmes axes, & α, β, γ les coordonnées pour l'autre centre ; il est clair que si j'appelle u, & v les distances du corps à ces deux centres on aura
$u = \surd\,[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]$
$v = \surd\,[(x\ \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]$
desorte qu'en exprimant par A & B leurs forces attractives à une distance égale à l' unité, on aura $\frac{A}{u^2}$, & $\frac{B}{v^2}$ pour les forces qui agissent sur le corps, suivant les rayons vecteurs u & v.

Ces forces étant décomposées chacune en trois autres suivant les directions des coordonnées x, y, z ; on trouvera que la force totale suivant x est égale à $\frac{A(x-a)}{u^3}$ $+ \frac{B(x-\alpha)}{v^3}$, que la force suivant y est égale à $\frac{A(y-b)}{u^3}$ $+ \frac{B(y-\beta)}{v^3}$, & que la force suivant z est égale a $\frac{A(z-c)}{u^3}$ $+ \frac{B(z-\gamma)}{v^3}$. Donc nommant t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, & prenant dt pour constant, on aura ces trois équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{A(x-a)}{u^3}+\frac{B(x-\alpha)}{v^3}&=0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{A(y-b)}{u^3}+\frac{B(y-\beta)}{v^3}&=0\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{A(z-c)}{u^3}+\frac{B(z-\gamma)}{v^3}&=0\end{aligned}\right\}(A)$$

lesquelles renferment la solution du Problême.

I I.

Si on multiplie la première de ces équations par $2\,dx$, la seconde par $2\,dy$, la troisiéme par $2\,dz$, & qu'après les avoir ajoutées ensemble on en prenne l'intégrale on aura, en ajoutant la constante $4\,c$,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2\,A}{u}-\frac{2\,B}{v}=4\,c\ldots(B)$$

équation qui renferme, comme on le voit, le principe de la conservation des forces vives.

Si on multiplie de plus les mêmes équations par $x-a$, $y-b$, $z-c$, & qu'on les ajoute ensemble on aura

$$\frac{(x-a)\,d^2x+(y-b)\,d^2y+(z-c)\,d^2z}{dt^2}+\frac{A}{u}+\frac{B[(x-a)(x-\alpha)+(y-b)(y-\beta)+(z-c)(z-\gamma)]}{v^3}=0;$$

Or $2(x-a)(x-\alpha)=(x-a)^2+(x-\alpha)^2-(a-\alpha)^2$, & de même $2(y-b)(y-\beta)=(y-b)^2+(y-\beta)^2-(b-\beta^2$, $2(z-c)(z-\gamma)=(z-c)^2+(z-\gamma)^2-(c-\gamma)^2$, donc si on dénote par f la distance entre les deux centres, enforte que l'on ait $f=\sqrt{[(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2,]}$ on aura

$$\frac{(x-a)\,d^2x+(y-b)\,d^2y+(z-c)\,d^2z}{dt^2}+\frac{A}{u}+\frac{B(u^2+v^2-f^2)}{2\,v^3}=0.$$

Donc ajoutant cette équation, à l'équation (B), on aura, à cause de $u^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$,

$$\frac{d^2 u^2}{2\,dt^2} - \frac{A}{u} - \frac{B}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2-u^2}{v^3}\right) = 4c \;\ldots\; (C)$$

& l'on trouvera de la même manière

$$\frac{d^2 . v^2}{2\,dt^2} - \frac{B}{v} - \frac{A}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2-v^2}{u^3}\right) = 4c \;\ldots\; (D)$$

deux équations par lesquelles on connoîtra les valeurs de u & v en t.

I I I.

Je remarque maintenant que si on multiplie l'équation (C) par $d.\,v^2$, & l'équation (D) par $d.\,u^2$ & qu'ensuite on les ajoute ensemble on a une équation intégrable laquelle est

$$\frac{d.(d.\,u^2 \times d.\,v^2)}{2\,dt^2} - A\left(3\,du + \frac{d.\,v^2}{u} + \frac{(f^2-v^2)\,du}{u^2}\right) - B\left(3\,dv + \frac{d.\,u^2}{v} + \frac{(f^2-u^2)\,dv}{v^2}\right) = 4c\,(d.\,u^2 + d.\,v^2);$$

desorte qu'on aura en intégrant, & en ajoutant une constante arbitraire $2D$,

$$\frac{d.\,u^2 \times d.\,v^2}{2\,dt} - A\left(3u + \frac{v^2-f^2}{u}\right) - B\left(3v + \frac{u^2-f^2}{v}\right) = 4c\,(u^2 + v^2) + 2D \;\ldots\; (E).$$

De plus si on multiplie les mêmes équations (C) & (D) par $v^2\,d.\,u^2$, & $u^2\,d.\,v^2$ savoir la première par $v^2\,d.\,u^2$, & la seconde par $u^2\,d.\,v^2$, & qu'on les ajoute ensemble on aura

$$\frac{v^2 d.u^2 \times d^2.u^2 + u^2 d.v^2 \times d^2.v^2}{2\,dt^2}$$
$$- A \left(2\,v^2du + \frac{3}{2}\,u\,d.u^2 + \frac{(f^2 - v^2)\,d.v^2}{2\,u}\right)$$
$$- B \left(2\,u^2dv + \frac{3}{2}\,v\,d.u^2 + \frac{(f^2 - u^2)\,d.u^2}{2\,v}\right)$$
$$= 4\,C\,d.\,(u^2\,v^2)$$

Cette équation étant multipliée par 2 & enſuite ajoutée à l'équation (E) multipliée par $d.u^2 + d.v^2$ on aura

$$d.\left(\frac{v^2\,(d.u^2)^2 + u^2\,(d.v^2)^2}{2\,dt^2}\right)$$
$$- A\,(bu^2du + bd.(u\,v^2) - 2\,f^2du)$$
$$- B\,(bv^2dv + bd.(v\,u^2) - 2\,f^2dv)$$
$$= 2\,C\,(d.\,(u^2 + v^2)^2 + 4\,d.\,(u^2v^2))$$
$$+ 2\,D\,d.\,(u^2 + v^2) = 0$$

dont l'intégrale eſt evidemment

$$\frac{v^2\,(d.u^2)^2 + u^2\,(d.v^2)^2}{2\,dt^2}$$
$$- 2\,A\,(u^3 + 3\,u\,v^2 - f^2\,u)$$
$$- 2\,B\,(v^3 + 3\,v\,u^2 - f^2\,v)$$
$$= 2\,C\,(u^4 + v^4 + b\,u^2\,v^2)$$
$$+ 2\,D\,(u^2 + v^2) + 2\,E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

E étant une conſtante indéterminée.

Or, ſi à cette équation on ajoute l'équation (E) multipliée par $2\,u\,v$, ou qu'on l'en retranche on aura ces deux ci

$$\frac{(v\,d.u^2 + u\,d.v^2)^2}{2\,dt^2}$$
$$- 2\,(A + B)\,[(u + v)^3 - f^2\,(u + v)]$$
$$= 2\,C\,(u + v)^4 + 2\,D\,(u + v)^2 + 2\,E$$

&

$$\frac{(v\,d.u^2 - u\,d.v^2)^2}{2\,dt^2}$$
$$- 2\,(A - B)\,[(u - v)^3 - f^2\,(u - v)]$$

$$= 2C(u-v)^4 + 2D(u-u)^2 + 2E$$

d'où en faisant pour plus de simplicité

$$u + v = p$$
$$u - v = q$$
$$A + B = M$$
$$A - B = N$$

on tire

$$(G)\ldots\begin{cases}\dfrac{uv\,dp}{dt} = \sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 + Mf^2p + E)} \\ \& \\ \dfrac{uv\,dq}{dt} = \sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}\end{cases}$$

& par conséquent

$$(H)\;\ldots\ldots\;\frac{dp}{\sqrt{Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E}} = \frac{-dq}{\sqrt{Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E}};$$

ensuite on aura à cause de $uv = \frac{p^2 - q^2}{4}$,

$$dt = \frac{(p^2 - q^2)\,dp}{4\sqrt{Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E}}$$

c'est-à-dire en mettant pour

$$\frac{q^2dp}{\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}}$$

sa valeur en q

$$\frac{q^2dq}{\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}},$$

$$dt = \frac{p^2dp}{4\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}} - \frac{q^2dq}{4\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}}\quad (I)$$

Ainſi on a deux équations dans lesquelles les indéterminées ſont ſeparées, & qui ſerviront a déterminer p en q, & t en p & q, c'eſt-à-dire u en v, & t en u & v.

I V.

Les équations (H) & (I) que nous venons de trouver ont également lieu ſoit que le corps ſe meuve dans un plan fixe paſſant par les deux centres des forces, comme M. Euler le ſuppoſe dans ſa ſolution, ſoit qu'il décrive une courbe quelconque à double courbure; mais dans ce dernier cas, il ne ſuffit pas de connoitre a chaque inſtant les diſtances du corps aux deux centres; il faut de plus connoitre l'angle que le corps décrit autour de la ligne qui joint ces mêmes centres.

Or ſi on imagine que A & B (*fig. I.*) ſoient les deux centres des forces, & que C ſoit le lieu du corps enſorte que l'on ait $AB = f$, $AC = u$, & $BC = v$; & qu'ayant mené la perpendiculaire CD, on nomme CD, r, AD, s, & l'angle que le corps C parcourt autour de AB, φ, il eſt clair qu'on aura pour le petit arc que le corps décrit dans le tems $dt\ \sqrt{dr^2 + ds^2 + r^2 d\varphi^2}$; deſorte qu'on aura $dr^2 + ds^2 + r^2 d\varphi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; & par conſéquent $r^2 d\varphi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2 - ds^2$.

Or en conſidérant le triangle ABC, il eſt facile de trouver que $s = \frac{u^2 - v^2 + f^2}{2f}$, & $r = \frac{\sqrt{(4f^2u^2 - (u^2 - v^2 + f^2)^2)}}{2f}$ d'où

$$ds = \frac{udu - vdv}{f}, \ \&$$

$$dr = \frac{2f^2 udu - (u^2 - v^2 + f^2)(udu - vdv)}{f\sqrt{(4f^2u^2 - (u^2 - v^2 + f^2)^2)}}$$

Donc $ds^2 + dr^2 = \frac{(udu - vdv)^2}{f^2}$

$$+\frac{[2f^2udu-(u^2-v^2+f^2)(udu-vdv)]^2}{f^2(4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2)}$$

= (en reduiſant au même dénominateur, & effaçant ce qui ſe détruit.)

$$\frac{v^2(d.u^2)^2+u^2(d.v^2)^2-(u^2+v^2-f^2)d.u^2d.v^2}{4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2}$$

Donc ſubſtituant ces valeurs dans l' équation précédente, & multipliant par $4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2$ on aura

$$\frac{(4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2)^2\,d\phi^2}{4f^2}=$$

$$[4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2](dx^2+dy^2+dz^2)-v^2(d.u^2)^2-u^2(d.v^2)^2+(u^2+v^2-f^2)d.u^2d.v^2.$$

Qu'on mette au lieu de $dx^2+dy^2+dz^2$, de $d.u^2\,d.v^2$, & de $v^2(d.v^2)^2+u^2(d.v^2)^2$ leurs valeurs tirées des équations (B), (E) & (F), & l'on aura en diviſant par dt^2

$$\frac{(4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2)\,d\phi^2}{4f^2dt^2}$$

$$(4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2)\left(4C+\frac{2A}{u}+\frac{2B}{v}\right)$$

$$-4A(u^3+3uv^2-f^2u)-4B(v^3+3vu^2-f^2v)$$

$$-4C(u^4+v^4+6u^2v^2)-4D(u^2+v^2)$$

$$-4E+2(u^2+v^2-f^2)\left[A\left(3u+\frac{v^2-f^2}{u}\right)\right.$$

$$\left.+B\left(3v+\frac{u^2-f^2}{v}\right)+4C(u^2+v^2)+2D\right]$$

= (en reduiſant & ôtant ce qui ſe détruit) $-4(Cf^4+Df^2+E)$.

Donc ſi on fait pour abréger

$$K^2=-Cf^4-Df^2-E$$

on aura en extrayant la racine quarrée, & multipliant par $\frac{2f}{4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2}$,

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{4fK}{4f^2u^2-(u^2-v^2+f^2)^2}\quad\text{- - - - - - -}\quad(K)$$

Supposons maintenant comme nous avons fait ci-dessus $u + v = p$, $u - v = q$, c'est-à-dire $u = \frac{p+q}{2}$, & $v = \frac{p-q}{2}$, & nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4fK}{f^2(p+q)^2 - (pq+f^2)^2}$$

$$= -\frac{4fK}{(p^2-f^2)(q^2-f^2)}$$

$$= \frac{4fK}{p^2-q^2}\left(\frac{1}{p^2-f^2} - \frac{1}{q^2-f^2}\right),$$

Mais on a par l'art. III.

$$\frac{4\,dt}{p^2-q^2} = \frac{dp}{\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}}$$

$$= \frac{dq}{\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nfq^2 + E)}}$$

donc on aura enfin

$$d\varphi = \frac{fK\,dp}{(p^2-f^2)\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + dp^2 - Mf^2p + E)}}$$

$$- \frac{fK\,dq}{(q^2-f^2)\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}} \quad \ldots \quad (I)$$

ce qui donnera φ en p, & q, c'est-à dire en u & v.

Ainsi la solution du Problême est réduite maintenant à l'intégration de trois équations différentielles dans lesquelles les indéterminées sont toutes séparées.

Au reste l'équation (K) donne $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{K}{fr^2}$, ou bien $dt = \frac{fr^2d\varphi}{K}$; ce qui montre que le corps décrit autour de la ligne BA, c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à cette ligne des aires proportionelles au tems.

V.

A l' égard des constantes C, D, E, elles sont entièrement arbitraires, & ne dépendent que de l' état initial du corps. Pour les déterminer supposons que quand $t = 0$ on ait $u = g$, $v = h$, $\frac{du}{dt} = m$, $\frac{dv}{dt} = n$, & $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = i$, & les équations (B), (E) & (F) donneront

$$i^2 - \frac{2A}{g} - \frac{2B}{h} = 4C,$$

$$2ghmn - A\left(3g + \frac{h^2 - f^2}{g}\right) -$$

$$B\left(3h + \frac{g^2 - f^2}{h}\right) = 4C(g^2 + h^2) + 2D,$$

$$g^2h^2(m^2 + n^2) - A(g^3 + 3gh^2 - f^2g)$$
$$- B(h^3 + 3hg^2 - f^2h) =$$
$$C(g^4 + h^4 + 6g^2h^2) + D(g^2 + h^2) + E;$$

d' où l' on tire

$$C = \frac{i^2}{4} - \frac{A}{2g} - \frac{B}{2h},$$

$$D = ghmn - \frac{(g^2 + h^2)i^2}{2}$$
$$- \frac{A}{2g}(g^2 - h^2 - f^2) - \frac{B}{2h}(h^2 - g^2 - f^2),$$

$$E = g^2h^2(m^2 + n^2) - gh(g^2 + h^2)mn$$
$$+ \frac{(g^2 - h^2)^2 i^2}{4} + \frac{f^2(g^2 - h^2)}{2}\left(\frac{A}{g} - \frac{B}{h}\right);$$

& comme $K^2 = - Cf^4 - Df^2 - E$ on aura

$$K^2 = \frac{i^2}{4}[4f^2g^2 - (g^2 - h^2 + f^2)^2]$$
$$- g^2h^2(m^2 + n^2) + gh(g^2 + h^2 - f^2)mn.$$

Si au lieu de la viteſſe i on veut introduire la viteſſe que le corps a pour tourner autour de la ligne des centres, on nommera cette viteſſe l, & l'équation (K) donnera

$$l = \frac{4fK}{4f^2g^2 - (g^2 - h^2 + f^2)^2};$$

d'où l'on aura

$$K^2 = \frac{(4f^2g^2 - (g^2 - h^2 + f^2)^2)^2 l^2}{16 f^2}$$

donc

$$i^2 = \frac{(4f^2g^2 - (g^2 - h^2 + f^2)^2)\ l^2}{4f^2}$$
$$+ \frac{4g^2h^2\ (m^2 + n^2) - 4gh\ (g^2 + h^2 - f^2)\ mn}{4f^2g^2 - (g^2 - h^2 + f^2)^2};$$

ainſi il n'y aura qu'a ſubſtituer cette valeur dans celles des quantités C, D, E, que nous avons trouvées plus haut.

V I.

La ſolution du Problême eſt donc réduite à l'intégration des trois équations (H) (I) & (L). Or comme les indéterminées ſont ſéparées dans ces équations, il eſt clair qu'il n'y aura qu'a intégrer chaque membre comme une différentielle particulière qui ne contient qu'une variable; mais en examinant ces différentielles on reconnoitra bientôt, qu'elles dépendent en général de la rectification des ſections coniques & peut-être auſſi de la quadrature de quelque courbe du troiſième ordre; deſorte qu'il eſt impoſſible d'arriver par ce moyen à des équations intégrales & finies. Cependant ſi on ſuppoſe B, ou $A = 0$, ce qui rend $N = + M$, il eſt certain que le Problême ne dépendra que de la quadrature du cercle, ou de l'hyperbole; car alors on aura le cas d'un corps qui ſe meut en vertu d'une ſeule force tendante vers un centre.

Comme le développement de ce cas renferme des discussions délicates dont l'analyse pourra tirer quelque fruit, je crois devoir l'examiner un peu en detail.

VII.

Supposons d'abord $B = 0$ & les équations du Problême deviendront, en mettant A à la place de M & de N,

$$\frac{dp}{\sqrt{(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)}} = \frac{dq}{\sqrt{(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E)}} \quad \ldots (M)$$

$$dt = \frac{p^2dp}{4\sqrt{(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)}} - \frac{q^2dq}{4\sqrt{(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E)}} \quad \ldots (N)$$

$$d\varphi = \frac{fK\,dp}{(p^2 - f^2)\sqrt{(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)}} - \frac{fK\,dq}{(q^2 - f^2)\sqrt{(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E)}} \quad (O)$$

Or si on reprend l'équation (C) de l'Art. II. & qu'on y suppose $B = 0$ on aura

$$\frac{d^2.\,u^2}{2\,dt^2} - \frac{A}{u} = 4C \quad \ldots (P)$$

laquelle étant multipliée par $d.\,u^2$ & ensuite intégrée, donne en ajoutant la constante H

$$(Q) \;--\; \frac{(d.\,u^2)^2}{4\,dt^2} - 2Au = 4Cu^2 + H$$

d'où l'on tire

$$(R) \;--\; \frac{d.\,u^2}{2\,dt} = \sqrt{(H + 2Au + 4Cu^2)}$$

Or $\frac{d.\,u^2}{2\,dt} = \frac{udu}{dt} = \frac{u\,(dp + dq)}{2\,dt}$ donc met-

tant au lieu de $\frac{dp}{dt}$ & $\frac{dq}{dt}$ leurs valeurs tirées des équations (G) on aura, à cause de $u = \frac{p+q}{2}$ $v = \frac{p-q}{2}$ & de $M = N = A$,

$$(S) \; - (p-q) \sqrt{(C(p+q)^2 + A(p+q) + H)}$$
$$= \sqrt{(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)}$$
$$+ \sqrt{(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E)}.$$

C'est l'intégrale de l'équation (M), dans laquelle H est une nouvelle constante.

De plus l'équation (P) donnera

$$dt = \frac{udu}{\sqrt{(H + 2Au + 4Cu^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

de sorte qu'on aura t en u par les logarithmes ou par les arcs circulaires ; & cette valeur de t donnera, (en mettant $\frac{p+q}{2}$ à la place de u) l'intégrale du second membre de l'équation (N).

VIII.

Pour trouver maintenant l'intégrale de l'équation (O) je reprends l'équation (K) & faisant

$$\frac{u^2 - v^2 + f^2}{2f} = s$$

j'ai $\frac{d\phi}{dt} = \frac{K}{f(u^2 - s^2)}$; d'où $d\phi = \frac{Kdt}{f(u^2 - s^2)}$.

Or en retranchant l'équation (O) de l'équation (C) & mettant $2fs$ au lieu de $u^2 - v^2 + f^2$ on a, à cause de $B = 0$, $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{As}{u^3} = 0$

Soit $s = uz$, & l'on aura

$$\frac{zd^2u + 2dzdu + udz^2}{dt^2} + \frac{Az}{u^3} = 0.$$

Mais l'équation (P) donne $\frac{ud^2u + du^2}{dt^2} = 4C + \frac{A}{u}$ & l' équation (Q) donne $\frac{u^2du^2}{dt^2} = H + 2Au + 4Cu^2$; deforte qu' on aura $\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{A}{u^2} - \frac{H}{u^3}$; donc fubſtituant cette valeur dans l' équation précédente elle deviendra celle-ci $\frac{2dzdu + ud^2z}{dt^2} - \frac{Hz}{u^3} = 0$ laquelle étant multipliée par $2u^3dz$ & enſuite integrée donne

(T) $-\frac{u^4dz^2}{dt^2} - Hz^2 = L$ d'où l'on tire $\frac{dt}{u^2} = \frac{dz}{\sqrt{(L + Hz^2)}}$; mais à cauſe de $s = uz$, on a $d\varphi = \frac{K\,dt}{fu^2(1 - z^2)}$; dont on aura $d\varphi = \frac{K\,dz}{f(1 - z^2)\sqrt{(L + Hz^2)}}$.

Pour mettre cette équation ſous une forme plus ſimple je fais $z = \frac{r}{\sqrt{(1 + r^2)}}$ ce qui me donne $dz = \frac{dr}{(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$, $1 - z^2 = \frac{1}{1 + r^2}$, $\sqrt{(L + Hz^2)} = \frac{\sqrt{(L + (L + H)r^2)}}{(\sqrt{1 + r^2})}$ & par conſéquent

$$d\varphi = \frac{K\,dr}{f\sqrt{(L + (L + H)r^2}}; \quad . \quad . \quad . \quad (U)$$

d' où il eſt aiſé de trouver la valeur de φ en r; après quoi il n' y aura plus qu' à ſubſtituer pour r ſa valeur tirée de l' équation $\frac{u^2 - v^2 + f^2}{2f} = s$ $= uz = \frac{ur}{\sqrt{(1 + r^2)}}$, laquelle eſt $r = \frac{u^2 - v^2 + f^2}{\sqrt{(4f^2u^2 - (u^2 - v^2 + f^2)^2)}}$, & faiſant enſuite $u = \frac{p + q}{2}$ $v = \frac{p - q}{2}$, ce qui donnera

$r = \frac{pq + f^2}{\surd [(f^2 - p^2) (q^2 - f^2)]}$, on aura l' intégrale cherchée de l' équation (O).

I X.

Nous avons vû que la conftante H eft entièrement arbitraire ; mais il n' en eft pas de même de la conftante L ; en effet fi on reprend l' équation (T), & qu' on y fubftitue pour u & pour z leurs valeurs en p, & q, lesquelles font $u = \frac{p + q}{2}$, $z = \frac{pq + f^2}{f(p + q)}$ on aura en multipliant par $16 f^2$

$$\frac{[(p^2 - f^2) dq + (q^2 - f^2) dp]^2}{dt^2} - \frac{16 (pq + f^2) H}{(p + q)^2} = 16 f^2 L.$$

C' eft-à-dire

$$\frac{(p^2 - f^2)^2 dq^2 + (q^2 - f^2) dp^2 + 2 (p^2 - f^2) (q^2 - f^2) dpdq}{dt^2} - \frac{16 H (pq + f^2)^2}{(p + q)^2} = 16 f^2 L.$$

Mais $2 dpdq = (dp + dq)^2 - dp^2 - dq^2 = 4 du^2 - dp^2 - dq^2$; donc on aura

$$\frac{(p^2 - q^2) ((p^2 - f^2) dq^2 - (q^2 - f^2) dp^2)}{dt^2} + \frac{4 (p^2 - f^2) (q^2 - f^2) du^2}{dt^2} - \frac{16 H (pq + f^2)^2}{(p + q)^2} = 16 f^2 L$$

Subftituons maintenant au lieu de $\frac{du^2}{dt^2}$, $\frac{dp^2}{dt^2}$, $\frac{dq^2}{dt^2}$ leurs valeurs refultantes des équations (Q) & (G) c' eft-à-dire

$\frac{du^2}{dt^2} = \frac{H + 2Au + 4Cu^2}{u^2}$, ou bien à cauſe de $u = \frac{p+q}{2}$, $\frac{du^2}{dt^2} = 4\left(\frac{H}{(p+q)^2} + \frac{2A}{p+q} + 4C\right)$

$$\frac{dp^2}{dt^2} = \frac{16\,(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)}{(p^2 - q^2)^2}$$

$\frac{dq^2}{dt^2} = \frac{16\,(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E)}{(p^2 - q^2)^2}$ & nous aurons l'équation $\frac{16}{p^2 - q^2}[(p^2 - f^2)(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E) - (q^2 - f^2)(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)] + 16\,(p^2 - f^2)(q^2 - f^2)\left(\frac{H}{(p+q)^2} + \frac{2A}{p+q} + 4C\right) - \frac{16H\,(pq + f^2)^2}{(p+q)^2} = 16 f^2 L$ laquelle ſe réduit, en effaçant ce qui ſe détruit, à celle-ci $Cf^4 + Df^2 + E - f^2 H = f^2 L$;

Or nous avons ſuppoſé plus haut (*Art. IV.*) $K = -Cf^4 - Df^2 - E$; donc on aura $-K^2 - f^2 H = f^2 L$ & par conſéquent $L = -\frac{K^2 + f^2 H}{f^2}$.

Cette valeur de L étant ſubſtituée dans l'équation (V) on aura $d\varphi\ \frac{K\,dr}{\sqrt{(-K^2 - f^2 H - K^2 r^2)}}$ ou bien en diviſant le haut, & le bas de la fraction par K

$$d\varphi = \frac{dr}{\sqrt{\left(-\frac{K^2 + f^2 H}{K^2} - r^2\right)}}$$

mais $r = \frac{pq + f^2}{\sqrt{[(f^2 - p^2)(q^2 - f^2)]}}$, donc ſi on fait pour plus de ſimplicité

$\rho = \sqrt{\left(1 + \frac{f^2 H}{K^2}\right)} \times \frac{pq + f^2}{\sqrt{[(p^2 - f^2)(q^2 - f^2)]}}$, enſoter

que l' on ait $r = \rho \sqrt{\left(1 - \frac{K^2 + f^2 H}{K^2}\right)}$, on aura $d\varphi = \frac{d\rho}{\sqrt{(1 - \rho^2)}}$, & par conféquent $\varphi =$ arc. fin. $\rho + G$ G étant une conftante arbitraire.

X.

On auroit pu auffi tirer l' intégrale de l' équation (M) de l' équation (T); car en extrayant la racine quarrée on aura $\frac{u^2 dz}{dt} = \sqrt{(L + Hz^2)}$; mais $z = \frac{pq + f^2}{f(p + q)}$ & $u = \frac{p + q}{2}$; donc $u^2 dz = 4 [(p^2 - f^2) dq - (q^2 - f^2) dp]$; donc fubftituant cette valeur & mettant enfuite à la place des quantités $\frac{dp}{dt}$, & $\frac{dq}{dt}$ leurs valeurs tirées des équations (G) on aura

$$16(p^2 - f^2)\sqrt{(Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E)} + 16(q^2 - f^2)\sqrt{(Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2p + E)} = (p^2 - q^2)\sqrt{\left(L + \frac{H(pq + f^2)^2}{f^2(p + q)^2}\right)}$$

où l'on fe fouviendra que $L = Cf^4 + Df^2 + E - f^2 H$.

Si l'on compare cette équation à l'équation (S) trouvée ci-deffus on verra qu'elles s' accordent parfaitement, ce qui peut fervir à confirmer la bonté de nos calculs.

X I.

Suppofant toujours $B = 0$ enforte que l'orbite du corps foit (comme l' on fait) une fection conique dont l' un des foyers tombé dans le centre A, on pourra placer l' autre centre B partout où l'on voudra. Prenons ce centre dans le point d' où l'on fuppofe que le corps eft parti,

& l'on aura dans les formules de l'*Art. V.* $B = 0$, $h = 0$, & $g = f$; & par conséquent

$$C = \frac{i^2}{4} - \frac{A}{2f}$$

$$D = -\frac{f^2 i^2}{2}$$

$$E = \frac{f^4 i^2}{4} + \frac{f^3 A}{2}$$

ou bien à cause de $i^2 = 4C + \frac{2A}{f}$

$$D = -2Cf^2 - Af$$
$$E = Cf^4 + Af^3$$

Donc on aura en substituant

$$Cp^4 + Ap^3 + Dp^2 - Af^2 p + E =$$
$$Cp^4 + Ap^3 - 2Cf^2p^2 - Afp^2 - Af^2p + Cf^4 + Af^3$$
$$= C(p^2 - f^2)^2 + A(p^2 - f^2)(p - f)$$
$$= (p-f)^2 [C(p+f)^2 + A(p+f)]$$

& de même

$$Cq^4 + Aq^3 + Dq^2 - Af^2q + E =$$
$$(q-f)^2 [C(q+f)^2 + A(q+f)]$$

Desorte que les équations (M), & (N) de l'*Art. VII.* deviendront

$$\frac{dp}{(p-f)\sqrt{C(p+f)^2 + A(p+f)}} = \frac{dq}{(q-f)\sqrt{C(q+f)^2 + A(q+f)}}$$

$$dt = \frac{p^2 dp}{4(p-f)\sqrt{C(p+f)^2 + A(p+f)}} - \frac{q^2 dq}{4(q-f)\sqrt{C(q+f)^2 + A(q+f)}}$$

multiplions la première par $\frac{f^2}{4}$ & ajoutons-la à la seconde on aura

$$dt = \frac{(p^2 - f^2)\,dp}{4(p-f)\sqrt{C(p+f)^2 + A(p+f)}}$$
$$- \frac{(q^2 - f^2)\,dq}{4(q-f)\sqrt{C(q+f)^2 + A(q+f)}}$$

c'eſt-à-dire

$$dt = \frac{(p+f)\,dp}{4\sqrt{C(p+f)^2 + A(p+f)}}$$

$$- \frac{(q+f)\,dp}{4\sqrt{C(q+f)^2 + A(q+f)}}$$

donc ſi on fait pour plus de ſimplicité

$$r = \frac{p+f}{2} = \frac{u+v+f}{2}$$

$$s = \frac{p+f}{2} = \frac{u-v+f}{2}$$

on aura

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{4Cr^2 + 2Ar}} - \frac{sds}{\sqrt{4Cs^2 + 2As}}$$

Or lorſque $t = 0$ on a (*hyp.*) $v = 0$ donc $r = s$; ainſi il ne faudra point de conſtante dans l'intégration, pourvu que les intégrales des deux formules $\frac{rdr}{\sqrt{4Cr^2 + 2Ar}}$ & $\frac{sds}{\sqrt{4Cs^2 + 2As}}$ ſoient priſes de la même manière.

Cette expreſſion du tems t eſt remarquable en ce qu'elle ne contient qu'une ſeule conſtante C dépendante de la nature de la ſection conique; au lieu que les expreſſions ordinaires en contiennent néceſſairement deux. Pour voir ce que c'eſt que cette conſtante C il n'y a qu'a conſidérer l'équation (T) de *l'Art. VII.* dans laquelle, u étant le rayon vecteur, il eſt clair que les apſides de l'orbite ſeront aux points où $\frac{du}{dt} = 0$ c'eſt-à-dire ou $H + 2Au + 4Cu^2 = 0$; d'où il s'enſuit que ſi on nomme u', & u'' les valeurs de u tirées de cette équation on aura $u' + u''$ pour le grand axe, & $u' - u''$ pour l'ex-

centricité ; mais ſans reſoudre l'équation on ſait que $-\frac{2A}{4C} = u' + u''$; donc ſi on nomme a le grand axe de l'orbite on aura $-\frac{A}{2C} = a$, & par conſéquent $C = -\frac{A}{2a}$, deſorte que l'on aura

$$dt\sqrt{2A} = \frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{a}}} - \frac{sds}{\sqrt{s - \frac{s^2}{a}}}$$

Donc ſi BC eſt une portion quelconque de la ſection conique décrite par le corps autour du foyer A, le tems employé a parcourir l'arc BC ſera donné par la ſomme des deux rayons vecteurs AB & AC, par la corde BC & par le grand axe de la ſection ; car faiſant $AB = f$, $AC = u$, on aura $BC = v$; donc

$$r = \frac{AB + AC + BC}{2}$$

$$s = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

& le tems cherché ſera exprimé par

$$\frac{\int \frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{a}}} - \int \frac{sds}{\sqrt{s - \frac{s^2}{a}}}}{2\sqrt{A}}$$

Au reſte ce théorême a déja été démontré ſintétiquement par M. Lambert dans ſon traité ſur les orbites des comètes.

Comme la difficulté de l' intégration des équations (H), (I) & (L) qui renferment la solution du problême général ne vient que des radicaux $\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}$ & $\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}$, supposons que les constantes C, D, & E dépendantes de l' impulsion primitive du corps soient telles que les quantités $Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - M^2f^2p + E$ & $Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E$ contiennent chacune un facteur quarré ; & il est clair que les radicaux dont il s'agit se réduiront à cette forme

$(p - \alpha)\sqrt{(Cp^2 + \beta p + \gamma)}$ &

$(q - \lambda)\sqrt{(Cq^2 + \mu p + \nu)}$

desorte que les équations du Problême ne dépendront plus que de la quadrature du cercle, ou de l' hyperbole.

Pour cela je fais $p - \alpha = x$, & je substitue dans la quantité $Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E$ $x + \alpha$ au lieu de p, j'ai en ordonnant les termes par rapport à x $Cx^4 + (4C\alpha + M)x^3 + (6C\alpha^2 + 3M\alpha + D)x^2 + (4C\alpha^3 + 3M\alpha^2 + 2D\alpha - Mf^2)x + C\alpha^4 + M\alpha^3 + D\alpha^2 - Mf^2\alpha + E$.

Or afin que cette quantité contienne le facteur x^2 il faut nécessairement que les deux derniers termes évanouissent ; ainsi on aura les deux équations

$$(V) \ldots \begin{cases} C\alpha^4 + M\alpha^3 + D\alpha^2 - Mf^2\alpha + E = 0 \\ 4C\alpha^3 + 3M\alpha^2 + 2D\alpha - Mf^2 = 0 \end{cases}$$

par le moyen desquelles on déterminera tant la quantité α, que la rélation qui doit avoir lieu entre les constantes C, D, E.

De cette manière la quantité dont il s'agit deviendra $x^2(Cx^2 + (4C\alpha + M)x + 6C\alpha^2 + 3M\alpha + D)$, ou bien en remettant pour x, $p - \alpha$ $(p-\alpha)^2(Cp^2 + (2C\alpha + M)p + 3C\alpha^2 + 2M\alpha + D)$; desorte qu' on aura $\beta =$

$\beta = 2C\alpha + M$, & $\gamma = 3C\alpha^2 + 2M\alpha + D$.

On trouvera de la même manière les deux équations en λ

$$\left.\begin{array}{l} C\lambda^4 + N\lambda^3 + D\lambda^2 - Nf^2\lambda + E = 0 \\ 4\lambda^3 + 3N\lambda^2 + 2D\lambda - Nf^2 = 0 \end{array}\right\} \ldots (W)$$

& ensuite

$\mu = 2C\lambda + N$, & $\nu = 3C\lambda^2 + 2N\lambda + D$.

XIII.

En faisant $p - \alpha = x$, & supposant que les deux équations (V) aient lieu en même tems on aura

$$\frac{dp}{\surd(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}$$
$$= \frac{dx}{x\surd(Cx^2 + (4C\alpha + M)x + 6C\alpha^2 + 3M\alpha + D)}$$

supposons x infiniment petit & le second nombre de cette équation deviendra $\frac{dx}{x\surd(6C\alpha^2 + 3M\alpha + D)}$ dont l'intégrale est $\frac{I}{\surd(6C\alpha^2 + 3M\alpha + D)}\, l\frac{x}{X}$; X étant une constante indéterminée.

Or si on fait (ce qui est permis) $X = 0$, & qu'on suppose aussi $x = 0$, la quantité $\frac{x}{X}$ deviendra $\frac{0}{0}$ c'est-à-dire indéterminée ; d'où il s'ensuit qu'en faisant $p = \alpha$ la valeur de $\int\frac{dp}{\surd(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}$ restera indéterminée, & qu'ainsi l'équation (H) aura toujours lieu quelle que soit d'ailleurs la valeur de q.

Donc lorsque les constantes C, D, E sont telles que les deux équations (V) aient lieu en même tems, on pourra supposer $p = \alpha$, & les deux autres équations du problême seront

$$dt = \frac{(\alpha^2 - q^2)\, dq}{4\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}}$$

$$d\varphi = \frac{fK(\alpha^2 - q^2)\, dq}{(f^2 - \alpha^2)(q^2 - f^2)\sqrt{(Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E)}}$$

Or puisque $p = u + v$, il eſt viſible que la courbe décrite par le corps ſera une ellipſe mobile autour de ſon grand axe, & dont les foyers tomberont dans les deux centres des forces.

On prouvera de la même manière que ſi les équations (W) ont lieu, & qu'on faſſe $q = \lambda$ l'équation H aura lieu quelle que ſoit la valeur de p, & que les deux autres équations du problême deviendront

$$dt = \frac{(p^2 - \lambda^2)\, dp}{4\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}}.$$

$$d\varphi = \frac{fK(p^2 - \lambda^2)\, dp}{(f^2 - \lambda^2)(p^2 - f^2)\sqrt{(Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E)}};$$

Et comme $q = u - v$ on voit que la courbe ne ſera autre choſe qu'une hyperbole mobile autour de ſon axe, & ayant ſes deux foyers dans les centres mêmes des forces.

X I V.

Si l'un des centres des forces s'éloignoit à l'infini, alors la force tendente à ce centre infiniment diſtant deviendroit uniforme, & agiroit ſuivant des lignes parallelles; ainſi l'on auroit le cas d'un corps attiré vers un centre fixe par une force réciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances, & pouſſé en même tems par une force de valeur & de direction conſtantes.

Pour appliquer nos formules à ce cas il eſt viſible qu'il n'y a qu'à faire $f = \infty$; & enſuite $v = \infty$ ſi c'eſt le centre B qui s'éloigne à l'infini, ou bien $u = \infty$ ſi c'étoit le centre A qui fût infiniment diſtant.

Soit donc $f = \infty$ & $v = \infty$, & soit z la différence de ces deux quantités ensorte que $v = f - z$, il est clair qu'en supposant que A (*fig.* 3.) soit le centre des forces A, AB la ligne suivant laquelle agissent les forces constantes, & paralelles, C le lieu du corps dans un instant quelconque, & CB une perpendiculaire abaissée du point C sur la ligne AB, on aura $AC = u$, & $AD = z$; desorte que les équations en u & v devront se changer en d'autres équations en u & z.

Soit $A = 2\alpha g^2$ & $B = 2\beta h^2$ ensorte que 2α, & 2β soient les forces qui agissent sur le corps au commencement de son mouvement, la première de ces forces étant dirigée vers le centre A, & la seconde parallélement à la ligne AB; les constantes C, D, & E dêterminées dans *l'Art. V.* deviendront

$$C = \frac{i^2}{4} - \alpha g - \beta h$$

$$D = ghmn - \frac{(g^2 + h^2)\, i^2}{2} - \alpha g\, (g^2 - h^2 - f^2)$$

$$- \beta h\, (h^2 - g^2 - f^2)$$

$$E = g^2 h^2\, (m^2 + n^2) - gh\, (g^2 + h^2)\, mn$$

$$+ \frac{(g^2 - h^2)^2\, i^2}{4} + f^2\, (g^2 - h^2)\, (\alpha g - \beta h).$$

Or puisque h est la valeur de v au premier instant; si on suppose que Z soit alors la valeur de z, on aura $h = f - Z$, & les expressions précédentes deviendront en ordonnant les termes par rapport a f,

$$C = \gamma + \gamma' f$$

$$D = \delta + \delta' f + \delta'' f^2$$

$$E = \varepsilon + \varepsilon' f + \varepsilon'' f^2 + \varepsilon''' f^3 + \varepsilon^{\text{IV}} f^4 + \varepsilon^{\text{V}} f^5$$

où l'on aura

$$\gamma = \frac{i^2}{4} - \alpha g + \beta Z$$

$$\gamma' = - \beta$$

$\delta = - g z m n - \frac{(g^2 + Z^2) i^2}{2}$
$- (\alpha g + \beta Z)(g^2 - Z^2)$.
$\delta' = g m n + Z (i^2 - 2 \alpha g) + \beta (g^2 - 3 Z^2)$.
$\delta'' = - \frac{i^2}{2} + 2 (\alpha g + \beta Z)$.

$\varepsilon = \frac{i^2}{4} (g^2 - Z^2)^2 + g m n Z (g^2 + Z^2)$
$+ g^2 (m^2 + n^2) Z^2$.
$\varepsilon' = i^2 Z (g^2 - Z^2) - g m n (g^2 + 3 Z^2)$
$- 2 g^2 (m^2 + n^2) Z$.
$\varepsilon'' = g^2 (m^2 + n^2) + 3 g m n Z - \frac{i^2}{2} (g^2 - 3 Z^2)$
$+ (\alpha g + \beta Z)(g^2 - Z^2)$.
$\varepsilon''' = - g m n - Z (i^2 - 2 \alpha g) - \beta (g^2 - 3 Z^2)$.
$\varepsilon^{\text{IV}} = \frac{i^2}{4} - \alpha g - 3 \beta Z$.
$\varepsilon^{\text{V}} = \beta$.

De plus si on fait
$M = \mu + \mu' f + \mu'' f^2$
$N = \nu + \nu' f + \nu'' f^2$
on aura
$\mu = 2 \alpha g^2 + 2 \beta Z^2$
$\mu' = - 4 \beta Z$
$\mu'' = 2 \beta$
$\nu = 2 \alpha g^2 - 2 \beta Z^2$
$\nu' = 4 \beta Z$
$\nu'' = - 2 \beta$.

Maintenant puisque $p = u + \nu$ & $q = u - \nu$ on aura $p = f + u - z$, & $q = - f + u + z$; soit donc $u + z = Q$, & $u - z = P$ ensorte que $p = f + P$ & $q = - f + Q$; on aura après toutes les substitutions $C p^4 + M p^3 + D p^2 - M f^2 p + E = f^5 (\gamma' + \varepsilon^{\text{V}}) + f^4 (\gamma + \delta'' + \varepsilon^{\text{IV}} + (4 \gamma' + 2 \mu'') P)$

$+ f^3 [\delta' + \varepsilon''' + (4\gamma + 2\mu' + 2\delta'') P + (6\gamma' + 3\mu'') P^2] + f^2 [\delta + \varepsilon'' + 2(\mu + \delta') P + (6\gamma + 3\mu' + \delta'') P^2 + (4\gamma' + \mu'') P^3] + f(\varepsilon' + 2\delta P + (3\mu + \delta') P^2 + (4\gamma + \mu') P^3 + \gamma' P^4) + \varepsilon + \delta P^2 + \mu P^3 + \gamma P^4.$

Or $\gamma' + \varepsilon^{V} = 0$, $\gamma + \delta'' + \varepsilon^{IV} = 0$,
$4\gamma' + 2\mu'' = 0$, $\delta' + \varepsilon''' = 0$,
$4\gamma + 2\mu' + 2\delta'' = 0$, $6\gamma' + 3\mu'' = 0$
$\delta + \varepsilon'' = g^2 (m^2 + n^2) - 2gmnZ - i^2 (g^2 - Z^2)$
$\mu + \delta' = gmn + i^2 Z + 2\alpha g (g - Z) + \beta (g^2 - Z^2)$.
$6\gamma + 3\mu' + \delta'' = i^2 - 4(\alpha g + 1\beta Z)$, $4\gamma' + \mu'' = -2\beta$
&c.

Donc puiſque les coéficiens des termes affectés de f^5, de f^4, & de f^3 ſont nuls, & que ceux des termes affectés de f^2 ne le ſont pas, il s'enſuit, à cauſe de $f = \infty$, que ces derniers termes ſont les ſeuls qui doivent être conſervés; deſorte qu'on aura
$Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2 p + E = f^2 [(4\gamma' + \mu'') P^3 + (6\gamma + 3\mu' + \delta'') P^2 + 2(\mu + \delta') P + \delta + \varepsilon''].$

De même en changeant p en q & M en N, & par conſéquent P en Q, f en $-f$ & μ en ν, μ' en ν', μ'' en ν'' on aura
$C q^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2 q + E = f^2 [(4\gamma' + \nu'') Q^3 + (6\gamma + 3\nu' + \delta'') Q^2 + 2(\nu + \delta') Q + \delta'' + \varepsilon''].$

Donc ſi on fait pour abreger $\zeta = i^2 - 4(\alpha g + \beta Z)$
$\eta = gmn + i^2 Z + 2\alpha g (g - Z) + \beta (g^2 - Z^2)$
$\theta = g^2 (m^2 + n^2) - 2gmnZ - i^2 (g^2 - Z^2)$
$\rho = i^2 - 4(\alpha g - 5\beta Z)$
$\sigma = gmn + i^2 Z + 2\alpha g (g - Z) + \beta (g^2 - 5Z^2)$
on aura
$\surd (Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2 p + E) =$

$f\sqrt{}\,(-2\beta p^3+\zeta p^2+2\eta P+\theta)$, &
$\sqrt{}\,(Cq^4+Nq^3+Dq^2-Nf^2q+E)=$
$f\sqrt{}\,(-6\beta Q^3+\rho Q^2+2\sigma Q+\theta)$
& l' équation (H) de *l'Art.* III. deviendra

$$\frac{dP}{\sqrt{}\,(-2\beta P^3+\zeta P^2+2\eta P+\theta)}$$
$$\frac{dQ}{\sqrt{}\,(-6\beta Q^3+\rho Q+2\sigma Q+\theta)}$$

Ensuite on aura

$$dt=\frac{(P+Q)\,dp}{2\sqrt{}\,(-2\beta P^3+\zeta P^2+2\eta P+\theta)}$$

ou bien

$$dt=\frac{P\,dP}{2\sqrt{}\,(-2\beta P^3+\zeta P^2+2\eta P+\theta)}$$
$$+\frac{Q\,dQ}{2\sqrt{}\,(-6\beta Q^3+\rho Q^2+2\sigma Q+\theta)}$$

Enfin pour avoir la transformée de l' équation (I), on remarquera que $-K^2=$ à ce que devient la quantité $Cp^4+Mp^3+Dp^2-Mf^2p+E$ lorsque $p=f$, desorte qu' à cause de $p=f+P$ il n'y aura qu' à faire $P=0$ dans la quantité $(-2\beta P^3+\zeta P^2+2\eta P+\theta)$ f^2 pour avoir la valeur de $-K^2$ laquelle sera par conséquent $=\theta f^2$; mettant donc $f\sqrt{}-\theta$ au lieu de K & faisant les autres substitutions on aura

$$d\varphi=\frac{dP\sqrt{}-\theta}{2P\sqrt{}\,(-2\beta P^3+\zeta P^2+2\eta P+\theta)}$$
$$+\frac{dQ\sqrt{}-\theta}{2Q\sqrt{}\,(-6\beta Q^3+\rho Q^2+2\sigma Q+\theta)}$$

X V.

Ce mémoire a été composé en 1767, avant la publication du Tome XI des nouveaux Commentaires de Petersbourg. J' ai trouvé depuis dans ce Tome des nouvelles

recherches de M. Euler sur le Problême que nous venons de traiter dans lesquelles ce savant resout aussi le cas où l' orbite du corps seroit à double courbure, ce qu' il n'avoit point fait dans ses premières recherches sur cette matière. Au reste le lecteur peut comparer notre solution avec celle qu' on trouve dans le Tome cité, & juger laquelle des deux est la plus directe & la plus simple.

RECHERCHES

Sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes.

SECOND MÉMOIRE

Où l'on applique la méthode précédente à différentes hypothèses d'attraction.

PAR M. DE LA GRANGE.

Nous avons supposé dans le Mémoire précédent que le corps étoit attiré par des forces réciproquement proportionelles aux quarrés des distances; & nous avons trouvé que dans cette hypothèse les équations du mouvement du corps étoient intégrables. Nous allons maintenant examiner en général s'il n'y auroit point d'autres hypothèses d'attraction où l'intégration réussiroit aussi; c'est une recherche qui peut, je crois, n'être pas sans utilité soit dans le calcul intégral, soit dans la méchanique.

I.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles de l'orbite du corps, p sa distance à l'un des centres, & P la force d'attraction de ce centre, q la distance du corps à l'autre centre, & Q la force d'attraction de ce second centre; enfin soient a, b, c les coordonnées qui déterminent la position du centre des forces P, & α, β, γ les coordonnées qui répondent au centre des forces Q, on aura, en prenant l'élément du tems dt pour constant, les trois équations suivantes

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(x-a)P}{p} + \frac{(x-\alpha)Q}{q} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(y-b)P}{p} + \frac{(y-\beta)Q}{q} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(z-c)P}{p} + \frac{(z-\gamma)Q}{q} = 0$$

dans lesquelles

$$p = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$$
$$q = \sqrt{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]}$$

II.

Supposons que P soit une fonction de p, & Q une fonction de q, & les équations précédentes donneront d'abord cette intégrale

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + 2\int P\,dp + 2\int Q\,dq = 0 \quad . \quad . \,(A)$$

Ensuite nommant f la distance entre les deux centres, ensorte que $f = \sqrt{[(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2]}$ on trouvera, par un raisonnement semblable à celui de l'*Art.* II. du Mém. préc., ces deux équations en $p, q, \& t$;

$$\frac{d^2p^2}{2dt^2} + Pp + \frac{(p^2+q^2-f^2)Q}{2q} + 2\int P\,dp + 2\int Q\,dq = 0,$$

$$\frac{d^2q^2}{2dt^2} + Qq + \frac{(p^2+q^2-f^2)P}{2p} + 2\int P\,dp + 2\int Q\,dq = 0.$$

Ou bien, si l'on fait pour plus de simplicité $p^2 = f^2x$, $q^2 = f^2y$, $\frac{P}{p} = X$, $\frac{Q}{q} = Y$ (il ne faut pas confondre les quantités x, & y que nous employons ici avec celles que nous avons déja employées dans l'art. préc.) on aura ces deux-ci

$$(B)\,..\begin{cases}\dfrac{d^2x}{2dt^2} + Xx + \dfrac{(x+y-1)Y}{2} + \int X dx + \int Y dy = 0,\\[2mm] \dfrac{d^2y}{2dt^2} + Yy + \dfrac{(x+y-1)X}{2} + \int X dx + \int Y dy = 0,\end{cases}$$

dans lesquelles X est une fonction de x, & Y une fonction de y.

Ainsi la solution du Problême dépend maintenant de l'intégration de ces deux équations.

I I I.

Pour rendre nos recherches plus générales, proposons-nous les équations
$\frac{d^2 x}{2 d t^2} + M = 0$, $\frac{d^2 y}{2 d t^2} + N = 0$, M, & N étant des fonctions de x, y; & voyons quelles sont les conditions de l'intégrabilité de ces équations.

Nous supposerons que ces deux équations étant multipliées l'une & l'autre par des quantités convenables, & ensuite ajoutées ensemble forment une équation intégrable. Cette supposition est peut-être la seule qui convienne à la nature des équations proposées; & elle est d'ailleurs la plus naturelle, & en même tems la plus générale qu'on puisse faire. Or comme les deux membres M, & N sont des quantités finies, il est visible que les multiplicateurs ne sauroient être que des quantités différentielles du premier ordre. Prenons donc $m\,dx + n\,dy$, & $\mu\,dx + \nu\,dy$ pour les multiplicateurs dont il s'agit, m, n, μ, & ν étant des fonctions de x, y & nous aurons l'équation

$$\frac{m\,dx\,d^2x + n\,dy\,d^2x + \mu\,dx\,d^2y + \nu\,dy\,d^2y}{2\,dt^2}$$
$$+ (mM + \mu N)\,dx + (nM + \nu N)\,dy = 0$$

laquelle ne sauroit être intégrable à moins que les deux parties (savoir celle qui contient des différences secondes, & celle qui ne contient que des différences premières) ne soient intégrables chacune en particulier.

Or il n'est pas difficile de voir que l'intégrale de la première ne peut-être que de cette forme

$\frac{A dx^2 + B dx dy + C dy^2}{2 dt^2}$; A, B, C, étant des fonctions de x, & y; donc comparant la différentielle de la quantité $A dx^2 + B dx dy + C dy^2$ qui est $2 A dx d^2 y + B (dy d^2 x + dx d^2 y) + 2 C dy d^2 y + \frac{dA}{dx} dx^3 + \left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx}\right) dx dy + \left(\frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx}\right) dy^2 dx + \frac{dC}{dy} dy^3$, avec la quantité $m dx d^2 x + n dy d^2 x + \mu dx d^2 y + \nu dy d^2 y$, on aura, $2 A = m$, $B = n = \mu$, $2 C = \nu$, $\frac{dA}{dx} = 0$, $\frac{dC}{dy} = 0$, $\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} = 0$, $\frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx} = 0$.

Les équations $\frac{dA}{dx} = 0$, & $\frac{dC}{dy} = 0$ donnent d'abord $A =$ fonct. y, & $C =$ fonct. x; ensuite les équations $\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} = 0$, & $\frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx} = 0$ donnent $\frac{d^2 A}{dy^2} = \frac{d^2 C}{dx^2}$; d'où il est aisé de conclure que les quantités A, & C ne peuvent être que de la forme suivante $A = a + by + cy^2$, $C = g + hx + cx^2$, a, b, c, g & h étant des constantes.

Maintenant l'équation $\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} = 0$ donnnera $\frac{dB}{dx} = - b - 2 cy$, d'où en intégrant, $B = - (b + 2 cy) x +$ fonct. y; mais l'autre équation $\frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx} = 0$ donnera de même $B = - (h + 2 cx) y +$ fonct. x; desorte qu'on aura

$$B = K - bx - hy - 2 cxy,$$

K étant une constante arbitraire.

Ayant déterminé ainſi les quantités A, B, & C, on aura pour les multiplicateurs des équations propoſées, les deux quantités $2\,A\,dx + B\,dy$, & $B\,dx + 2\,C\,dy$; & il ne reſtera plus qu'à rendre intégrable la formule $(2\,AM + BN)\,dx + (BM + 2\,CN)\,dy$; car alors, en nommant Z l'intégrale de cette formule, on aura l'équation du premier ordre

$$\frac{A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2}{2\,dt^2} + Z = \text{à une conſt.}$$

Or pour qu'une quantité telle que $(2\,AM + BN)\,dx + (BM + 2\,CN)\,dy$ ſoit une différentielle exacte, il faut, comme l'on ſait, que l'on ait

$$\frac{d\cdot(2\,AM + BN)}{dy} = \frac{d\cdot(BM + 2\,CN)}{dx},$$ c'eſt l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que les équations propoſées admettent une intégrale du premier ordre.

Puiſque $(2\,AM + BN)\,dx + (BM + 2\,CN)\,dy = dz$, on aura $2\,AM + BN = \frac{dZ}{dx}$, & $BM + 2\,CN = \frac{dZ}{dy}$ & par conſéquent

$$M = \frac{2\,C\frac{dZ}{dx} - B\frac{dZ}{dy}}{4\,AC - B^2}$$

$$N = \frac{2\,A\frac{dZ}{dy} - B\frac{dZ}{dx}}{4\,AC - B^2},$$

où l'on pourra prendre pour Z une fonction quelconque de x, & y.

Si on fait encore $4\,AC - B^2 = D$ & $Z = D^2 V$ (V étant une fonction quelconque de x, & y) on aura

$$M = 2\,V\left(2C\frac{dD}{dx} - B\frac{dD}{dy}\right) + D\left(2\,C\frac{dV}{dx} - B\frac{dV}{dy}\right),$$

$$N = 2V\left(2\,A\frac{dD}{dy} - B\frac{dD}{dx}\right) + D\left(2\,A\frac{dV}{dy} - B\frac{dV}{dx}\right).$$

Or, à cauſe de $\frac{dA}{dx} = 0$, $\frac{dC}{dy} = 0$ $\frac{dB}{dx} = -\frac{dA}{dy}$, & $\frac{dB}{dy} = -\frac{dC}{dx}$, on trouvera $\frac{dD}{dx} = 2\left(2A\frac{dC}{dx} + B\frac{dA}{dy}\right)$ $\frac{dD}{dy} = 2\left(2C\frac{dA}{dy} + B\frac{dC}{dx}\right)$; donc on aura

$$M = D\left(4V\frac{dC}{dx} + 2C\frac{dV}{dx} - B\frac{dV}{dy}\right)$$

$$N = D\left(4V\frac{dA}{dy} + 2A\frac{dV}{dy} - B\frac{dV}{dx}\right).$$

Ainſi toutes les fois que les quantités M, & N pourront ſe ramener à cette forme, les équations $\frac{d^2x}{dt^2} + M = 0$, & $\frac{d^2y}{dt^2} + N = 0$, auront pour intégrale

$$\frac{Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2}{2dt^2} + D^2V = \text{à une conſtante};$$

A' l'égard de la quantité D on trouvera, en ſubſtituant les valeurs de A, B, C & effaçant ce qui ſe détruit, $D = 4ag - K^2 + (4ah + 2bK)x + (4bg - 2hK)y + (4ac - b^2)x^2 + (4cg - h^2)y^2 + (2bh + 4cK)xy$.

I V.

Pour appliquer la méthode de l' art. préc. aux équations (B) il eſt viſible qu' il ne faut que faire

$$M = xX + \frac{1}{2}(x + y - 1)Y + \int Xdx + \int Ydy$$

$$N = yY + \frac{1}{2}(x + y - 1)X + \int Xdx + \int Ydy$$

ce qui donnera

$$dZ = [2Ax + \frac{1}{2}B(x + y - 1)]Xdx$$

$$+ [By + A(x + y - 1)]Ydx$$
$$+ [2Cy + \frac{1}{2}B(x + y - 1)]Ydy$$
$$+ [Bx + C(x + y - 1)]Xdy$$
$$+ (\int Xdx + \int Ydy)[(2A + B)dx + (2C + B)dy]$$

quantité qui devra donc être intégrable par elle-même.

Supposons que la quantité $(2A + B)\,dx + (2C + B)\,dy$ soit elle-même une différentielle exacte dont l' intégrale soit E, & faisant

$$dV = [2Ax + \frac{1}{2}B(x + y - 1) - E]Xdx$$
$$+ [By + A(x + y - 1)]Ydx$$
$$+ [2Cy + \frac{1}{2}B(x + y - 1) - E]Ydy$$
$$+ [Bx + C(x + y - 1)]Xdy,$$

on aura $dZ = d\cdot(E\int Xdx + E\int Ydy) + dV$; desorte qu' il ne s' agira plus que de rendre la quantité dV une différentielle complette.

Or pour que la quantité $(2A + B)\,dx + (2C + B)\,dy$ soit une différentielle exacte, il faudra que l' on ait dans les valeurs de A, B, C, $c = 0$, & $h = b$, moyennant quoi on aura

$A = a + by$, $C = g + bx$, &
$B = K - b(x + y)$; d' où
$E = i + (2a + K)x + (2g + K)y$
$- \frac{b}{2}(x - y)^2$, i étant une constante arbitraire.

De cette manière la quantité dV deviendra

$$\left(\frac{b - K}{2}(x + y) - 2gy - \frac{K + 2i}{2}\right)Xdx +$$
$$[a(x + y) - (b - K)y - a]Ydx +$$
$$\left(\frac{b - K}{2}(x + y) - 2ax - \frac{K + 2i}{2}\right)Ydy +$$
$$[g(x + y) - (b - K)x - g]Xdy$$

laquelle étant ſuppoſée une différentielle complette, enſorte que V ſoit une quantité algébrique, on aura l' intégrale

$$\frac{A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2}{2\,dt^2} + E\,(\int X\,dx + \int Y\,dy)$$

$+ V =$ à une conſtante . . . . . (C).

V.

Je remarque d'abord qu'en faiſant $a = 0$, $g = 0$ & $b = K$, la quantité dV devient $= - \frac{b+2i}{2}(\int X\,dx + \int Y\,dy)$ deſorte qu'on aura $V = - \frac{b+2i}{2}(\int X\,dx + \int Y\,dy)$.

Or on a dans ce cas $A = by$, $C = bx$, $B = b(1 - x - y)$ & $E = i + b\left(x + y - \frac{1}{2}(x-y)^2\right)$; donc ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (C) on aura en otant ce qui ſe détruit, & diviſant par b

$$\frac{y\,dx^2 + x\,dy^2 + (1 - x - y)\,dx\,dy}{2\,dt^2} +$$

$$\frac{2(x+y) - (x-y)^2 - 1}{2}(\int X\,dx + \int Y\,dy)$$

$= \frac{\varepsilon}{2}$ . . . . (D)

ε étant une conſtante quelconque.

V I.

Cette intégrale à lieu en général quelles que ſoient les valeurs de X, & de Y; ainſi en donnant à ces quantités des valeurs particulières, on doit pouvoir encore trouver d' autres intégrales.

En effet comme il ne s' agit que de rendre la quantité dV une différentielle exacte, on n' aura qu' a ſatisfaire à l' équation ſuivante.

$$\left(\frac{b-K}{2} - 2g\right) X - ax \frac{dY}{dy} + \frac{d\cdot[(a-b+K)y-a]Y}{dy} =$$

$$\left(\frac{b-K}{2} - 2a\right) Y - gy \frac{dX}{dx} + \frac{d\cdot[(g-b+K)x-g]X}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . (E)$$

en prenant pour X une fonction de x, & pour Y une fonction de y.

Or si on fait disparoitre dans cette équation les termes qui renferment x, & y en supposant $a = 0$, & $g = 0$ on aura; après avoir divisé par $b - K$

$$\frac{X}{2} - \frac{d\cdot(Yy)}{dy} = \frac{Y}{2} - \frac{d\cdot(Xx)}{dx},$$

c'est-à-dire

$$\frac{X}{2} + \frac{d\cdot(Xx)}{dx} = \frac{Y}{2} + \frac{d\cdot(Yy)}{dy},$$

équation qui ne sauroit subsister à moins que chaque membre ne soit égal à une quantité constante.

Soit donc, en prénant une constante quelconque α,

$$\frac{X}{2} + \frac{d\cdot(Xx)}{dx} = 3\alpha, \quad \frac{Y}{2} + \frac{d\cdot(Yy)}{dy} = 3\alpha,$$

multipliant la première de ces équations par $\sqrt{x}\,dx$, la seconde par $\sqrt{y}\,dy$ & les intégrant on aura

$$Xx\sqrt{x} = 2\alpha x\sqrt{x} + \beta$$

$$Yy\sqrt{y} = 2\alpha y\sqrt{y} + \gamma,$$

d'où l'on tire

$$X = 2\alpha + \frac{\beta}{x\sqrt{x}},$$

$$Y = 2\alpha + \frac{\gamma}{y\sqrt{y}}$$

α, β, γ étant des constantes quelconques.

Dans ce cas on aura donc, à cause de $a = 0$ & $g = 0$

dV

$$dV = (b-K)\left(\frac{x+y}{2}\left(2\alpha + \frac{\beta}{x\sqrt{x}}\right) - y\left(2\alpha + \frac{\gamma}{y\sqrt{y}}\right)\right)dx$$

$$+ (b-K)\left(\frac{x+y}{2}\left(2\alpha + \frac{\gamma}{y\sqrt{y}}\right) - x\left(2\alpha + \frac{\beta}{x\sqrt{x}}\right)\right)dy$$

$$- \frac{K+2i}{2}\left(2\alpha + \frac{\beta}{x\sqrt{x}}\right)dx - \frac{K+2i}{2}\left(2\alpha + \frac{\gamma}{y\sqrt{y}}\right)\Big)dy$$

dont l'intégrale eſt

$$(b-K)\left(\frac{\alpha(x-y)^2}{2} + \beta\left(\sqrt{x} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \gamma\left(\sqrt{y} - \frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right) -$$

$$(K+2i\left(\alpha(x+y) - \frac{\beta}{\sqrt{x}} - \frac{\gamma}{\sqrt{y}}\right).$$

Ainſi mettant cette quantité au lieu de V dans l'équation (C) on aura une nouvelle intégrale ; deſorte que les deux équations différentielles du ſecond ordre (B) ſe trouveront maintenant reduites à deux autres du premier ſeulement.

Puiſque $X = \frac{P}{p}$, $Y = \frac{Q}{q}$, $x = \frac{p^2}{f^2}$ & $y = \frac{q^2}{f^2}$ (*Art. IV.*) on aura dans le cas préſent

$P = 2\alpha p + \frac{\beta f^3}{p^2}$, &

$Q = 2\alpha q + \frac{\gamma f^3}{q^2}$.

VII.

Pour trouver encore d'autres cas d'intégrabilité ſuppoſons

$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ &

$Y = \delta + \varepsilon y + \zeta y^2$,

ſubſtituant ces valeurs dans l'équation de condition (E) & faiſant pour plus de ſimplicité $b - K = h$, on aura

$\left(\frac{h}{2} - 2g\right)(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - a\varepsilon x - 2a\zeta xy$

$+ \delta (a - h) - \varepsilon a + 2 [\varepsilon (a - h) - a\zeta] y$
$+ 3 \zeta (a-h) y^2 = (\frac{b}{2} - 2a) (\delta + \varepsilon y + \zeta y^2)$
$- g\beta y - 2 g\gamma x y + \alpha (g - h) - \beta g$
$+ 2 [\beta (g - h) - g\gamma] x + 3 \gamma (g - h) x^2$;
ce qui donne

$$\alpha \left(\frac{b}{2} - 2g\right) + \delta (a - h) - \varepsilon a =$$
$$\delta \left(\frac{b}{2} - 2a\right) + \alpha (g - h) - \beta g,$$
$$\beta \left(\frac{b}{2} - 2g\right) - \varepsilon a = 2\beta (g - h) - 2\gamma g,$$
$$\varepsilon \left(\frac{b}{2} - 2a\right) - \beta g = 2\varepsilon (a - h) - 2\zeta a,$$
$$\gamma \left(\frac{b}{2} - 2g\right) = 3\gamma (g - h),$$
$$\zeta \left(\frac{b}{2} - 2a\right) = 3\zeta (a - h),$$
$$a\zeta = g\gamma.$$

d'où l'on tire

$\alpha = g = \frac{7b}{10}$, $\zeta = \gamma$, $\varepsilon = \beta$, & $\delta = \alpha$, ou bien

$$\zeta = 0, \gamma = 0, \frac{3(\alpha - \delta)}{2} h + (\beta - 3\alpha) g - (\varepsilon - 3\delta) a = 0$$
$$\frac{5\beta}{2} h - 4\beta g - \varepsilon a = 0$$
$$\frac{5\varepsilon}{2} h - 4\varepsilon a - \beta g = 0$$

par où l'on pourra déterminer a, g, & h.

Ainsi l'intégration aura lieu encore dans les deux cas suivants.

I.° Lorsque $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, & $Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2$, ce qui donne $P = \alpha p + \frac{\beta p^2}{f} + \frac{\gamma p^3}{f^2}$ &

$Q = \alpha q + \frac{\beta q^3}{f} + \frac{\gamma q^3}{f^2}$, α, β, & γ étant des coéficiens quelconques.

2.° Lorsque $X = \alpha + \beta x$, & $Y = \delta + \varepsilon y$, c'est-à-dire $P = \alpha p + \frac{\beta p^3}{f^3}$, $Q = \delta q + \frac{\varepsilon q^3}{f^3}$ α, β, δ, & ε étant aussi des coéficiens quelconques.

VIII.

Considérons plus particulièrement le cas de *l'Art. VI.*, dans lequel $P = 2\alpha p + \frac{\beta f^3}{p^2}$, & $Q = 2\alpha q + \frac{\gamma f^3}{q^2}$; & nous remarquerons d'abord que les deux parties $2\alpha p$, & $2\alpha q$ des forces P, & Q tendentes vers les deux centres données, peuvent se reduire à une force unique dirigée vers le point du milieu de la ligne qui joint les deux centres, & égale à $4\alpha r$, r étant la distance du corps à ce même point. De cette manière le corps sera attiré vers trois centres fixes rangés en ligne droite, & à égale distance l'un de l'autre; & la force d'attraction du centre du milieu sera proportionelle à la distance, & celle des deux extrèmes sera reciproquement proportionelle au quarré de la distance.

Or si l'on prend les deux centres extrèmes pour les foyers d'une section conique, ensorte que le troisième centre tombe dans le centre même de la section, il est clair que cette courbe pourra être décrite en vertu de chacune des trois forces $4\alpha r$, $\frac{\beta f^3}{p^2}$, & $\frac{\gamma f^3}{q^2}$ en particulier; mais nous allons voir qu'elle peut l'être aussi par l'action combinée de deux quelconques de ces forces, & même par les trois forces agissantes à la fois; ce qui me paroit bien digne de l'attention des géomètres.

IX.

Puisque $X = 2\alpha + \frac{\beta}{x\sqrt{x}}$, & $Y = 2\alpha + \frac{\gamma}{y\sqrt{y}}$, on aura

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = \alpha\,(x + y) - \frac{2\beta}{\sqrt{x}} - \frac{2\gamma}{\sqrt{y}} - \delta,$$

δ étant une constante arbitraire.

Ainsi l'équation (D) deviendra

$$\frac{y\,dx^2 + x\,dy^2 + (1 - x - y)\,dx\,dy}{2\,dt^2} +$$

$$\frac{2(x + y) - (x - y)^2 - 1}{2}\left[2\alpha\,(x + y) - \frac{2\beta}{\sqrt{x}} - \frac{2\gamma}{\sqrt{y}} - \delta\right]$$

$$= \frac{\epsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

Pour avoir maintenant l'autre équation intégrale, il ne s'agira que de faire dans l'équation (C) les substitutions indiquées dans *l'Art. VI.*, & comme les quantités b, K, & i sont encore indéterminées, on pourra faire, pour une plus grande simplicité, $K = 1$ $b = 0$, $2i + K = 0$, c'est-à-dire $i = -\frac{1}{2}$, moyennant quoi on aura

$$V = -\frac{\alpha\,(x - y)^2}{2} - \beta\left(\sqrt{x} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$

$$- \gamma\left(\sqrt{y} - \frac{x}{\sqrt{y}}\right),\ A = 0,\ C = 0,$$

$B = 1$, $E = \frac{2(x + y) - 1}{2}$ & l'équation (C) deviendra

$$\frac{dx\,dy}{2\,dt^2} + \frac{2(x + y) - 1}{2}\left(2\alpha\,(x + y) - \frac{2\beta}{\sqrt{x}} - \frac{2\gamma}{\sqrt{y}} + \delta\right) - \frac{\alpha\,(x - y)^2}{2} - \beta\left(\sqrt{x} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right) -$$

$\gamma\left(\sqrt{y} - \frac{x}{\sqrt{y}}\right) =$ à une constante; ou bien en pre-

nant une constante quelconque ζ & reduisant

$$\frac{dx\,dy}{2\,dt^2} + \frac{\alpha}{2}(3x^2 + 3y^2 + 10xy - 2x - 2y)$$
$$- \beta\left(3\sqrt{x} + \frac{y-1}{\sqrt{x}}\right) - \gamma\left(3\sqrt{y} + \frac{x-1}{\sqrt{y}}\right)$$
$$- \delta(x+y) - \frac{\zeta}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

Et si on multiplie cette équation par $1 - x - y$ & qu' ensuite on la retranche de l' équation (F), on aura celle-ci

$$\frac{y\,dx^2 + x\,dy^2}{2\,dt^2} + \frac{\alpha}{2}(x^3 + y^3 + 15xy^2 + 15yx^2 - x^2 - y^2 - 6xy)$$
$$- 2\beta(x\sqrt{x} + 3y\sqrt{x} - \sqrt{x})$$
$$- 2\gamma(y\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} - \sqrt{y})$$
$$- \frac{\delta}{2}(x^2 + y^2 + 6xy) - \frac{\zeta}{2}(x+y)$$
$$- \frac{\eta}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

η étant $= \varepsilon - \zeta$.

Ainsi tout se réduit maintenant a intégrer ces deux équations, ou au moins à en séparer les indéterminées.

X.

Pour cela je remarque que si on multiplie l' équation (G) par $\pm 4\sqrt{xy}$, & qu'on l'ajoute ensuite à l'équation (H) multipliée par 2 on aura celle-ci

$$\frac{(\sqrt{y}\,dx \pm \sqrt{x}\,dy)^2}{dt^2} +$$
$$\alpha\left[(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^6 - (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^4\right] -$$
$$4(\beta \pm \gamma)\left[(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^3 - (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})\right] -$$
$$\delta(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^4 - \zeta(\sqrt{x} \mp \sqrt{y})^2 - \eta = 0.$$

Desorte que si l'on fait

$$s = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{p+q}{f}, \text{ \&}$$

$u = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{p - q}{f}$,

ce qui donne $\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = \sqrt{xy}\left(\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}}\right)$
$\frac{s^2 - u^2}{2}\,ds$, & $\sqrt{y}\,dx - \sqrt{x}\,dy = \frac{s^2 - u^2}{2}\,du$, on aura (en tirant la racine quarrée) les deux équations ſuivantes dans lesquelles $\mu = 4(\beta + \gamma)$ & $\nu = 4(\beta - \gamma)$,

$$\frac{(s^2 - u^2)\,ds}{2\,dt} = \sqrt{(\eta - \mu s + \zeta s^2 + \mu s^3 + (\delta + \alpha) s^4 - \alpha s^6)}$$

$$= \frac{(s^2 - u^2)\,du}{2\,dt} = \sqrt{\eta - \nu u + \zeta u^2 + \nu u^3 + (\delta + \alpha) u^4 - \alpha u^6)}$$

d'où il eſt aiſé de tirer

$$\frac{ds}{\sqrt{(\eta - \mu s + \zeta s^2 + \mu s^3 + (\delta + \alpha) s^4 - \alpha s^6)}} =$$

$$\frac{du}{\sqrt{(\eta - \nu u + \zeta u^2 + \nu u^3 + (\delta + \alpha) u^4 - \alpha u^6)}} \quad (I)$$

& enſuite

$$dt = \frac{s^2\,ds}{2\sqrt{(\eta - \mu s + \zeta s^2 + \mu s^3 + (\delta + \alpha) s^4 - \alpha s^6)}}$$

$$- \frac{u^2\,du}{2\sqrt{(\eta - \nu u^2 + \zeta u^2 + \nu u^3 + (\delta + \alpha) u^4 - \alpha u^6)}} \quad (K)$$

équations où les indéterminées ſont toutes ſeparées.

X I.

L'équation (I) étant intégrée donnera s en u, & par conſéquent p en q; enſuite l'équation (H) donnera t en s, & u, c'eſt-a-dire p, & q; ainſi on aura p, & q en t, ce qui ſervira a connoitre à chaque inſtant la poſition

du corps par rapport à la ligne des centres; mais la position du corps dans l'éſpace abſolu ne ſera pas déterminée pour cela; car comme le corps peut tourner autour de cette ligne, il faut ſavoir de plus l'angle qu'il parcourt dans un tems quelconque.

Nommons donc cet angle φ, & ſoient ρ & σ les deux coordonnées rectangles qui déterminent la poſition du corps par rapport à la ligne des centres (ρ eſt la diſtance du corps à cette ligne, & σ eſt la partie de cette même ligne interceptée entre le perpendiculaire ρ, & le centre des forces P) enſorte que l'on ait

$$\sigma = \frac{p^2 - q^2 + f^2}{2f} = \frac{f}{2}(x - y + 1), \&$$

$$\rho = \sqrt{(p^2 - \sigma^2)} = \frac{f}{2}\sqrt{[4x - (x - y + 1)^2]};$$

il eſt facile de voir que l'on aura pour le quarré de l'éſpace abſolu parcouru par le corps dans un inſtant quelconque $d\rho^2 + d\sigma^2 + \rho^2 d\varphi^2 =$ (en employant les trois coordonnées rectangles x, y, z de l'*Art.* II.) $dx^2 + dy^2 + dz^2$ $=$ (en vertu de l'équation A)

$$-2\,dt^2 (\int P dp + \int Q dq) = -f^2 (\int X dx + \int Y dy)\, dt^2;$$

deſorte qu'on aura

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = -f^2 \frac{\int X dx + \int Y dy}{\rho^2} - \frac{d\rho^2 + d\sigma^2}{\rho^2 dt^2};$$

mais $d\rho^2 + d\sigma^2 = f^2 \dfrac{y\,dx^2 + x\,dy^2 - (x + y - 1)\,dx\,dy}{4x - (x - y + 1)^2}$

$=$ (en vertu de l'équation D)

$$\frac{-f^2 \epsilon\, dt^2}{4x - (x - y + 1)^2} - f^2 (\int X dx + \int Y dy)\, dt^2;$$

donc ſubſtituant ces valeurs on aura

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{f^4 \epsilon}{4\rho^4} = \frac{f^4(\zeta + \eta)}{4\rho^4}; \text{ d'où } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{f^2\sqrt{(\zeta + \eta)}}{2\rho^2}\ (L);$$

par conſéquent $\rho^2 d\varphi = \dfrac{f^2\sqrt{(\zeta + \eta)}\, dt}{2}$, ce qui montre

que le corps décrit autour de la ligne des centres des aires proportionelles au tems;

Maintenant puisque $\frac{4p^2}{f^2} = 4x - (x - y + 1)^2 = (2\sqrt{x} + x - y + 1)(2\sqrt{x} - x + y - 1) =$ (art. II.) $(s + u + su + 1)(s + u - su - 1) = -(s^2 - 1)(u^2 - 1)$, on aura $\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\sqrt{(\zeta + \eta)}}{(s^2 - 1)(u^2 - 1)} = \frac{2\sqrt{(\zeta + \eta)}}{s^2 - u^2}\left(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{u^2 - 1}\right)$;

Mais on a par l'art. X.

$$\frac{2\,dt}{s^2 - u^2} = \frac{ds}{\sqrt{(\eta - \mu s + \zeta s^2 + \mu s^3 + (\delta + \alpha)s^4 - \alpha s^6)}}$$

$$= \frac{du}{\sqrt{(\eta - \nu u + \zeta u^2 + \nu u^3 + (\delta + \alpha)u^4 - \alpha u^6)}} \text{ donc,}$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{(\zeta + \eta)}\,ds}{(s^2 - 1)\sqrt{(\eta - \mu s + \zeta s^2 + \mu s^3 + (\delta + \alpha)s^4 - \alpha s^6)}}$$

$$- \frac{\sqrt{(\zeta + \eta)}\,du}{(u^2 - 1)\sqrt{(\eta - \nu u + \zeta u^2 + \nu u^3 + (\delta + \alpha)u^4 - \alpha u^6)}} \quad (M)$$

Ainsi on connoîtra φ en s & u c'est-à-dire en p & q.

A l'égard des constantes η, ζ & δ elles dépendent du mouvement initial du corps, & on pourra les déterminer si l'on veut au moyen des équations (G), (H), & (L).

Si l'on avoit $\zeta + \eta = 0$, c'est-à dire $\zeta = -\eta$, alors $d\varphi$ seroit $= 0$, & par conséquent le corps se mouvroit dans un plan fixe passant par les centres des forces.

Au reste si l'on fait $\alpha = 0$, on verra que les formules précédentes s'accordent avec celles qui ont été trouvées dans le Mémoire précédent.

XII.

X I I.

Suppofons $s = a + \psi$, a étant une conftante, & ψ une variable, & la quantité

$$\eta - \mu s + \zeta s^2 + \mu s^3 + (\delta + \alpha) s^4 - \alpha s^6$$

fe changera en celle-ci

$$A + B\psi + C\psi^2 + D\psi^3 + E\psi^4 + F\psi^5 + G\psi^6$$

dans laquelle

$$A = \eta - \mu a + \zeta a^2 + \mu a^3 + (\delta + \alpha) a^4 - \alpha a^6$$
$$B = -\mu + 2\zeta a + 3\mu a^2 + 4(\delta + \alpha) a^3 - 6\alpha a^5$$
$$C = \zeta + 3\mu a + 6(\delta + \alpha) a^2 - 15\alpha a^4$$

&c.

Donc le premier membre de l'équation (I) fe changera en

$$\frac{d\psi}{\surd(A + B\psi + C\psi^2 + D\psi^3 + E\psi^4 + F\psi^5 + G\psi^6)},$$

expreffion qui, en faifant $A = o$, & $B = o$ devient celle-ci

$$\frac{d\psi}{\psi\surd(C + D\psi + E\psi^2 + F\psi^3 + G\psi^4)};$$

Suppofons ψ infiniment petit, & l'on aura $\frac{d\psi}{\psi\surd C}$ dont l'intégrale eft $\frac{1}{\surd C} l \frac{\psi}{K}$ K étant une conftante quelconque; donc fi on fait $K = o$ & $\psi = o$ la valeur de l'intégrale du premier membre de l'équation (I) demeurera indéterminée, deforte que l'équation aura lieu indépendamment de la quantité u; d'où il s'enfuit que l'équation $s = a$ fatisfait au Problême pourvû que les deux équations $A = o$, & $B = o$ ayent lieu à la fois, & que la quantité C n'évanouiffe pas en même tems.

L'équation $s = a$ donne $p + q = af$, ce qui montre que la courbe décrite par le corps fera une ellipfe ayant fes deux foyers dans les deux centres des forces

P, & Q, & tournant autour de ſon grand axe, à moins que l'on n'ait $\zeta + \eta = 0$ auquel cas le corps ſe meut dans un plan fixe.

En faiſant de même

$$L = \eta - \nu b + \zeta b^2 + \nu b^3 + (\delta + \alpha) b^4 - \alpha b^6$$
$$M = - \nu + 2\zeta b + 3 \nu b^2 + 4 (\delta + \alpha) b^3 - b \alpha b^5$$
$$N = \zeta + 3 \nu b + 6 (\delta + \alpha) b^2 - 15 \alpha b^4$$

& ſuppoſant que les quantités L, & M ſoyent nulles à la fois ſans que N le ſoit, on trouvera que l'équation $u = b$, c'eſt-à-dire $p - q = bf$ ſatisfait au Problême, deſorte que la courbe pourra être auſſi une hyperbole ayant ſes foyers dans les mêmes centres des forces.

Ainſi en réuniſſant les deux cas on en conclura que le corps peut toujours décrire une ſection conique pourvû qu'il reçoive une impulſion convenable.

XIII.

Si on fait de plus $\psi = a' + \psi'$, a' étant une conſtante & ψ' une variable, & qu'on ſubſtitue cette valeur dans la quantité $C + D \psi + E \psi^2 + F \psi^3 + G \psi^4$ elle ſe changera en celle-ci

$$A' + B' \psi' + C' \psi'^2 + D' \psi'^3 + E' \psi'^4, \text{ où}$$
$$A' = C + D a' + E a'^2 F a'^3 + G a'^4$$
$$B' = D + 2 E a' + 3 F a'^2 + 4 G a'^3$$

&c.

& la transformée $\dfrac{d\psi}{\psi \sqrt{(C + D\psi + E\psi^2 + F\psi^3 + G\psi^4)}}$ du premier membre de l'équation (I) deviendra

$$\frac{d\psi'}{(a' + \psi') \sqrt{(A' + B'\psi' + C'\psi'^2 + D'\psi'^3 + E'\psi'^4)}};$$

ſoit maintenant $A' = 0$, & $B' = 0$ & la différentielle ſe changera en

$$\frac{d\psi'}{(a'\psi' + \psi'^2) \sqrt{(C' + D'\psi' + E'\psi'^2)}}$$

qui ne dépend plus que de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. On trouvera de la même manière les conditions qui réduiront l'autre membre de l'équation (I) à la quadrature des sections coniqnes.

Ainsi on pourra toujours dans ces cas construire l'orbite que le mobile décrira en vertu des trois forces $4\alpha r$, $\frac{\beta f^3}{p^2}$, & $\frac{\gamma f^3}{q^2}$.

XIV.

Mais outre les cas dont nous venons de parler, il est évident que l'équation (I) doit aussi être intégrable quand deux quelconques de ces trois forces évanouissent; parcequ'alors on a le cas d'un corps attiré vers un seul centre fixe par une force proportionelle à la distance, ou reciproquement proportionelle au quarré de la distance.

Les cas où la force $4\alpha r$ est nulle ayant déja été éxaminés fort au long dans le Mémoire préc., je me bornerai ici a examiner ceux, où les deux autres forces $\frac{\beta f^3}{p^2}$ & $\frac{\gamma f^3}{q^2}$ disparoissent à la fois enforte que le mobile ne soit assujetti qu'à la seule force $4\alpha r$ proportionelle à la distance.

Soit donc $\beta = 0$, & $\gamma = 0$, on aura aussi $\mu = 0$ & $\nu = 0$ (*art.* X.) & les équations (I) & (K) deviendront

$$\frac{ds}{\sqrt{(\eta + \zeta s^2 + (\delta + \alpha) s^4 - \alpha s^6}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{(\eta + \zeta u^2 + (\delta + \alpha) u^4 - \alpha u^6)}} \quad \ldots \quad (N)$$

$$(O) \cdots dt = \frac{s^2\, ds}{2\sqrt{(\eta + \zeta s^2 + (\delta + \alpha) s^4 - \alpha s^6)}}$$

$$= \frac{u^2\, du}{2\sqrt{(\eta + \zeta u^2 + (\delta + \alpha) u^4 - \alpha u^6)}}$$

Or si on reprend les équations primitives (B) & qu'on y ſubſtitue 2α au lieu de X, & de Y (*art. IX.*) on aura

$$\frac{d^2 x}{2\,dt^2} + 5\,\alpha x + 3\,\alpha y - \alpha - \delta = 0$$

$$\frac{d^2 y}{2\,dt^2} + 5\,\alpha y + 3\,\alpha x - \alpha - \delta = 0$$

ou bien en prennant la ſomme & la différence, & faiſant $x + y = \psi$, $x - y = \xi$,

$$(P) \cdots \begin{cases} \dfrac{d^2 \psi}{2\,dt^2} + 8\,\alpha \psi - 2\,(\alpha + \delta) = 0 \\ \dfrac{d^2 \xi}{2\,dt^2} + 2\,\alpha \xi = 0 \end{cases}$$

d' ou il eſt aiſé de tirer

$$(Q) \cdots \begin{cases} \psi = \dfrac{\alpha + \delta}{4\alpha} + A \operatorname{coſ.} 4t\sqrt{\alpha} + B \operatorname{ſin.} 4t\sqrt{\alpha} \\ \xi = C \operatorname{coſ.} 2t\sqrt{\alpha} + D \operatorname{ſin.} 2t\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

A, B, C, D étant des conſtantes arbitraires; & ces deux équations ſeront néceſſairement les intégrales des équations (N) & (O); il faudra ſeulement faire enſorte que les deux conſtantes η, & ζ s'accordent avec les conſtantes A, B, C, D; ce qui eſt facile; car on n' aura qu' à effacer dans les équations (G) & (H) les termes affectés des quantités β, & γ, & y ſubſtituer enſuite au lieu de x, y, $\frac{dx}{dt}$ & $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs tirées des équations (Q) en y faiſant, pour plus de ſimplicité, $t = 0$; on aura par ce moyen deux équations par leſquelles on

pourra déterminer deux quelconques des constantes A, B, C, D; & les deux autres demeureront arbitraires.

On pourroit encore, si on vouloit, trouver l'intégrale de l'équation (N) d'une manière plus simple, que voici. La seconde des équations (P) étant multipliée par $d\xi$ & intégrée donne $\frac{d\xi^2}{4\,dt^2} + \alpha\,\xi^2 = H$, ($H$ étant une constante arbitraire), d'où l'on tire $\frac{d\xi}{dt} = 2\sqrt{(H - \alpha\,\xi^2)}$; or $\xi = x - y = us$; donc $\frac{u\,ds + s\,du}{dt} = 2\sqrt{(H - \alpha\,u^2 s^2)}$; mais on a par les équations (N) & (O)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\sqrt{(\eta + \zeta s^2 + (\delta + \alpha)s^4 - \alpha s^6)}}{s^2 - u^2}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2\sqrt{(\eta + \zeta u^2 + (\delta + \alpha)u^4 - \alpha u^6)}}{s^2 - u^2}$$

donc substituant cette valeur on aura

$$\frac{u}{s^2 - u^2}\sqrt{(\eta + \zeta s^2 + (\delta + \alpha)s^4 - \alpha s^6)} +$$

$$\frac{s}{s^2 - u^2}\sqrt{(\eta^2 + \zeta u^2 + (\delta + \alpha)u^4 - \alpha u^6)}$$

$$= \sqrt{(H - \alpha u^2 s^2)}$$

X V.

Nous avons supposé dans *l'Art. IV.* que la quantité $(2A + B)\,dx + (2C + B)\,dy$ étoit une différentielle complette; & nous avons réduit par ce moyen la différentielle dZ, à la différentielle dV dont nous avons ensuite cherché les conditions de l'intégrabilité. Considérons maintenant la quantité dZ elle-même, & voyons quelles sont les valeurs les plus générales de X & de Y qui peuvent la rendre une différentielle exacte.

Pour cela on aura suivant le théorème général, l'équation

$$X\left(2x\frac{dA}{dy}+\frac{1}{2}(x+y-1)\frac{dB}{dy}+\frac{B}{2}\right)+$$
$$Y\left(y\frac{dB}{dy}+(x+y-1)\frac{dA}{dy}+3A+2B\right)+$$
$$\frac{dY}{dy}[By+A(x+y-1)]+$$
$$(\int Xdx+\int Ydy)\left(\frac{2dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\right)=$$
$$Y\left(2y\frac{dC}{dx}+\frac{1}{2}(x+y-1)\frac{dB}{dx}+\frac{B}{2}\right)+$$
$$X\left(x\frac{dB}{dx}+(x+y-1)\frac{dC}{dx}+3C+2B\right)+$$
$$\frac{dX}{dx}[Bx+C(x+y-1)]+$$
$$(\int Xdx+\int Ydy)\left(\frac{2dC}{dx}+\frac{dB}{dx}\right).$$

Mais $\frac{dB}{dx}=-\frac{dA}{dy}$, & $\frac{dB}{dy}=-\frac{dC}{dx}$ (*Art.* III.); donc l'équation précédente deviendra

$$3X(x\frac{dA}{dy}-\frac{1}{2}(x+y-1)\frac{dC}{dx}-\frac{B}{2}-C)-$$
$$3Y[y\frac{dC}{dx}-\frac{1}{2}(x+y-1)\frac{dA}{dy}-\frac{B}{2}-A]-$$
$$\frac{dX}{dx}[Bx+C(x+y-1)]+$$
$$\frac{dY}{dy}[By+A(x+y-1)]+$$
$$3(\int Xdx+\int Ydy)\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

Substituons pour A, B, & C leurs valeurs $a+by+cy^2$, $K-bx-hy-2cxy$, $g+hx+cx^2$, & nous aurons

$$\frac{3X}{2}\,[\,2x\,(b+2cy)-(x+y-1)\,(h+2cx)$$
$$-K+bx+hy+2cxy-2g-2hx-2cx^2\,]$$
$$-\frac{3Y}{2}\,[\,2y\,(h+2cx)-(x+y-1)\,(b+2cy)$$
$$-K+bx+hy+2cxy-2a-2by-2cy^2\,]$$
$$-\frac{dX}{dx}\,[x\,(K-bx-hy-2cxy)+(x+y-1)\,(g+hx+cx^2)]$$
$$+\frac{dY}{dy}\,[y\,(K-bx-hy-2cxy)+(x+y-1)\,(a+by+cy^2)]$$
$$+3\,(\int X\,dx+\int Y\,dy)\,[\,b-h+2c\,(y-x)\,]=0$$

ou bien, en ordonnant les termes & effaçant ce qui ſe détruit.

$$\frac{3X}{2}\,[2bx-(x-1)\,(h+2cx)-K-2g+(b-2h)\,x-2cx^2]-$$
$$\frac{dX}{dx}\,[\,Kx-bx^2+(x-1)\,(g+hx+cx^2)\,]+$$
$$3\int Xdx\,(b-h-2cx)-$$
$$\frac{3Y}{2}\,[2hy-(y-1)\,(b+2cy)-K-2a+(h-2b)\,y-2cy^2)+$$
$$\frac{dY}{dy}\,[\,Ky-hy^2+(y-1)\,(a+by+cy^2)\,]+$$
$$3\int Ydy\,(b-h+2cy)+$$
$$y\,(bc\,Xx-\frac{dX}{dx}\,(g+cx^2)+bc\int Xdx)-$$
$$x\,(bc\,Yy-\frac{dY}{dy}\,(a+cy^2)+bc\int Ydy)=0$$

Or à cauſe que X doit être une fonction de x ſeul, & Y une fonction de y ſeul, il eſt facile de voir que cette équation ne ſauroit avoir lieu à moins que l'on n'ai

I.° $6c\,Xx-\frac{dX}{dx}\,(g+cx^2)+6c\int Xdx=\alpha+\beta x$,

2.° $6c\,Yy-\frac{dY}{dy}\,(a+cy^2)+6c\int Ydy=\gamma+\beta y$

IV.

3.° $\frac{3X}{2}(h - K + (3b - 3h + 2c)x - 4cx^2 + \frac{dX}{dx}(g + (h - K - g)x + (c + b - h)x^2 - cx^3) + 3\int X dx\,(b - h - 2cx) = \delta + \gamma x$.

4.° $\frac{3Y}{2}(b - K + (3h - 3b + 2c)y - 4cy^2) + \frac{dY}{dy}(a + (b - K - g)y + (c + h - b)y^2 - cy^3) + 3\int Y dy\,(h - b - 2cy) = \delta + \alpha y$, α, β, γ, & δ étant des conſtantes quelconques.

Ainſi il faudra que les quantités X & Y ſoient telles qu'elles ſatisfaſſent à ces quatre équations à la fois; autrement les équations (B) ne ſeront point intégrables, au moins par notre méthode.

Si on fait $a = 0$, $g = 0$, $c = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, & qu'on ſuppoſe $m = h - k$, & $n = b - h$ les quattre équations de condition ſe réduiront à ces deux-ci

$$\frac{3X}{2}(m + 3nx) + \frac{dX}{dx}(mx + nx^2) + 3n\int X dx = \delta \text{ \&}$$

$$\frac{3Y}{2}(m + n - 3ny) + \frac{dY}{dy}[(m + n)y - ny^2] - 3n\int Y dy = \delta$$

par leſquelles on pourra déterminer X & Y.

Si on fait dans ces dernières équations $m = 0$, $n = 0$, & $\delta = 0$, on aura le cas de l'*Art. V.* qui eſt indépendant des valeurs de X & de Y; & ſi on fait ſeulement $n = 0$ on aura celui de l'*Art. VI.*, d'où l'on voit que ce dernier cas n'eſt qu'un cas particulier des valeurs de X & de Y que fournira l'intégration des équations précédentes; mais nous ne pouſſerons pas plus loin nos recherches ſur ce ſujet.

XVI.

Au reſte quelles que ſoient les valeurs de X & de Y, l' équation (D) donnera toujours (en faiſant $\varepsilon = 0$) cette intégrale particulière $1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$, les radicaux pouvant être pris en + ou en —.

Pour le faire voir je ſuppoſe $x + y = u$, $x - y = \omega$ ce qui donne $x = \frac{u + \omega}{2}$, & $y = \frac{u - \omega}{2}$, & l'équation dont il s' agit deviendra après les ſubſtitutions

$$\frac{du^2 + (2u - 1)\, d\omega^2 - 2\omega\, du\, d\omega}{8\, dt^2} + \frac{2u - \omega^2 - 1}{2} (\int X dx + \int Y dy) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $du^2 + (2u - 1)\, d\omega^2 - 2\omega\, du d\omega = (du - \omega d\omega)^2 - (\omega^2 - 2u + 1)\, d\omega^2$; donc ſi on fait $2u - \omega^2 - 1 = V$ on aura

$$\frac{dV^2 + 4V d\omega^2}{16\, dt^2} + V (\int X dx + \int Y dy = \varepsilon$$ équation à laquelle ſatisfait évidemment $V = 0$ dans le cas de $\varepsilon = 0$; ainſi on aura cette intégrale particulière $2u - \omega^2 - 1 = 0$ c' eſt-à-dire $2(x + y) - (x - y)^2 - 1 = 0$; or je dis que cette équation eſt la même que celle-ci $1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$; c' eſt de quoi on peut ſe convaincre aiſément en faiſant diſparoître les radicaux par la méthode ordinaire; ou bien il ſuffira de remarquer que $1 - 2(x + y) + (x - y)^2 = (1 + \sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})$, comme on peut s'en aſſurer aiſément par la multiplication actuelle.

Maintenant puiſque $x = \frac{p^2}{f^2}$ & $y = \frac{q^2}{f^2}$, il eſt clair que l' intégrale dont il s' agit donnera $f \pm p \pm q = 0$; ce qui eſt le cas où le corps ſe meut dans la même li-

gne droite qui passe par les centres des forces ; ainsi cette intégrale ne nous apprend rien de nouveau touchant le mouvement du corps.

XVII.

Nous terminerons ce Mémoire par une remarque qu' il est bon de ne pas omettre. Le Problême du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes ne peut s'appliquer à la lune, entant qu'elle est attirée à la fois vers la terre & vers le soleil, qu'en supposant que cet astre soit en repos par rapport à la terre ; mais comme la force qui altére le mouvement de la lune autour de la terre ne vient que de la différence qu'il y a entre l'attraction du soleil sur la lune, & son attraction sur la terre ; il ne suffira pas de regarder le corps comme attiré vers les deux centres fixes par des forces réciproquement proportionelles aux quarrés des distances ; il faudra de plus y ajouter une troisième force dirigée parallèlement à la ligne qui joint les deux centres, & dont la quantité pourra être supposée constante ; cette force reprèsentera celle que le soleil exerce sur la terre, & qui doit être transportée à la lune en sens contraire ; or si on nomme cette force $\frac{2\alpha}{f}$, f étant la distance des deux centres, & qu'on la décompose en deux autres dirigées vers ces mêmes centres, il est facile de voir qu'elles seront exprimées par $2\alpha p$, & $-2\alpha q$; desorte que les forces totales P, & Q seront $P = 2\alpha p + \frac{\beta f^3}{p^2}$ & $Q = -2\alpha q + \frac{\gamma f^3}{q^2}$; ce qui donnera $X = 2\alpha + \frac{\beta}{x\sqrt{x}}$ & $Y = -2\alpha + \frac{\gamma}{y\sqrt{y}}$.

Telle eſt donc l' hypothèſe qu' il faudroit adopter pour que la ſolution du Problême dont il s' agit donnât le mouvement de la lune autour de la terre regardée comme en repos, & abſtraction faite du mouvement du ſoleil; mais en ſubſtituant les valeurs précédentes de X, & de Y dans les équations de condition de *l'Art. XV.* on verra d' abord qu' il eſt impoſſible de ſatisfaire à ces quatre équations à la fois, à moins que de ſuppoſer les coéficiens a, b, c, &c. tels que chaqu'un de leurs termes s' évanouiſſe en particulier, ce qui eſt le cas de *l'Art. V.*, d'où il s' enſuit qu' on n'aura dans ce cas qu' une ſeule intégrale, & qu' ainſi le Problême ne pourra pas même ſe réduire aux premières différences.

ADDITION AU PREMIER MÉMOIRE

Sur le calcul intégral

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

Dans le Problême où je me proposai de trouver une différentielle exacte qui eut lieu en même tems que la proposée, j'ai supposé que cette différentielle étoit rationelle, ou ne contenoit pas d'autres radicaux que la proposée mise sous une forme linéaire : cette supposition n'est pas exacte, & je vais corriger ma solution en conséquence. Je ne parlerai que du cas où la proposée mise sous une forme linéaire est rationelle, parceque l'on peut toujours tout réduire à ce cas, & que les mêmes réflexions s'appliquent aux autres sans aucune difficulté.

1. D'abord on remarquera qu'il ne peut pas y avoir dans ce facteur de radical qui ait pour exposant un nombre rompu, & qui devienne une fonction interscendante, parceque en supposant qu'il y en ait un tel, il faut nécessairement qu'après l'intégration, il soit multiplié par une constante arbitraire, donc alors l'intégrale ne peut contenir de logarithmes; en effet si elle en contenait, il faudrait ou qu'ils fussent multipliés par cette interscendante, ou qu'il y eût deux arbitraires dans l'intégrale, ce qui ne peut arriver. Or si l'intégrale ne contient pas de logarithmes, mais seulement ce radical interscendant, repassant des nombres aux logarithmes, on aura une intégrale & par conséquent une différentielle exacte sans ce radical, donc enfin on pourra trouver un facteur qui ne le contienne pas.

Il suit de cette remarque qu'appellant en général le facteur A on pourra mettre dans l'équation de condition, ou dans les équations de condition, au lieu des différen-

ces entières ou partièlles de A, leurs valeurs tirées de l'équation $a + bA + cA^2 + eA^3 \ldots = 0$, ou a, b, c, e, ſont des fonctions rationelles & entières des variables, & il faudra qu'enſuite ces équations de condition deviennent nulles, en y mettant à la place de la puiſſance m du facteur A ſa valeur tirée de l'équation hypothétique ci-deſſus du dégré m.

Si on ſuppoſe que ce dégré m eſt indéfini, on le fera ſucceſſivement 1, 2, 3, 4 &c. en ſuppoſant que les a, b, c, e, &c. ſont auſſi des dégrés 1, 2, 3, 4 &c. & on parviendra enfin à une équation qui ſatisfera à celles du facteur, & on connoîtra m & les fonctions a, b, c, e &c.

II. L'équation propoſée ne contenant pas le radical qui entre dans le facteur, il s'enſuit, que ſi ce radical a pluſieurs valeurs, chacune de ces valeurs rendra également la propoſée une différentielle exacte, & par conſéquent que l'expreſſion du facteur ainſi trouvée, donnera autant de ſolutions de la propoſée qu'elle aura de valeurs réellement différentes. Ce qui peut abréger beaucoup la ſolution des Problêmes ſuivans. Mais d'abord on conclura de ce que je viens de dire.

1.° Que pour le premier ordre, comme on ne doit avoir qu'une ſeule intégrale, il ſera permis de faire l'équation hypothétique en A de la forme $A^m p + a = 0$. m étant un nombre rationel.

2.° Que pour le ſecond ordre, comme on ne doit avoir que deux intégrales, il ſera permis de faire $a + pA^m + qA^{2m} = 0$.

3.° Que pour le troiſième, comme il n'y a que trois intégrales, il ſera permis de faire $a + pA^m + qA^{2m} + rA^{3m} = 0$.

Et ainſi de ſuite.

On pourrait obſerver ici, qu'au lieu des formes ci-deſſus, il ſerait plus général de prendre pour le troiſième ordre

& les fupérieurs des formes $\overline{a + p\, A^m}^{\,m'} \cdot \overline{a' + p'\, A^m}^{\,m''}$ &c. parceque ces formes, quoique apartenant à des équations plus élévées, ne donnent cependant pour A qu'un même nombre de valeurs. Mais ces formes me paraiffent appartenir au cas où A^m étant donné par une équation du dégre $m' + m''$ &c. ces $m' + m''$ valeurs fe réduiraient à deux, & ou ces deux facteurs rendraient la propofée de la forme $d^{m'}V$, $d^{m''}V$; en effet fi l'équation en A contient des racines égales, on aura en la différentiant le coéfficient de dA égal en même tems à zéro, & donnant A par une équation d'un dégré moindre; or puifque cette nouvelle équation fatisfait aux équations de condition, il eft clair, ou que toute fes racines y fatisfont, ou qu'elle a un divifeur rationel: le premier cas eft impoffible, ou retombe dans celui que j'examine, & donne une équation d'un dégré moins élévé; dans le fecond en faifant fur le quotient le même raifonnement que fur l'équation fuppofée, & ainfi de fuite, on trouvera toujours que la forme, qui donne à A autant de valeurs que la propofée a d'intégrales, a toute la géneralité fuffifante.

III. On voit par ce que je viens de dire, que fi d'un côté la recherche des facteurs eft plus difficile, d'un autre on peut par une feule opération trouver à la fois un nombre de facteurs égal à l'expofant de l'ordre de la propofée. Les Problêmes pour lesquels j'ai expofé des méthodes dans la fuite du Mémoire fe réfolvent de même que fi le facteur était rationel, & cette plus grande complication du facteur n'y ajoute aucune difficulté particulière. Nous obferverons feulement que, lorfqu'on aura trouvé un nombre de facteurs différens, l'ordre de l'équation étant n, fi l'on veut n'avoir à intégrer par les quadratures que des fonctions rationelles, on prendra autant de facteurs qu'il y en a qui contiennent des radicaux donnés par des équations différentes, on fera difparaitre les radicaux, & re-

gardant la proposée mise sous une forme rationelle comme une équation du premier ordre, ce qui est toujours permis, alors on différentiera. On aura donc une équation du second ordre à intégrer, on en connoitra un des facteurs, par conséquent l' autre facteur ne contiendra d'autres radicaux que celui d'une équation du premier ordre, & même n' en contiendra point du tout, parceque l' intégrale d' une fonction ne peut pas contenir d' autres radicaux que sa différentielle exacte.

Exemple de la méthode expliquée ci-dessus.

Soit l' équation du premier ordre
$4x^3dy - 2x^2ydy - 2x^2ydx + xy^2dx + xy^2dy - 2y^3dx - x^2dx - x^2dy + 3xydx + xydy - 2y^2dx = 0$.

Si je la mets sous la forme $Bdy + Cdx = 0$ & que multipliant par A je suppose $\frac{dAB}{dx} = \frac{dAC}{dy}$, & $A^m = Q$. Q étant une fonction rationelle, je trouverai que je puis supposer $m = 2$ & $Q = \frac{1}{x^5y^4 - x^4y^5 - 2x^6y^2 + 4x^5y^3 - 2x^4y^4 - 3x^6y + x^7 + 3x^5y^2 - x^4y^3}$ & en extraïant la racine $A = \frac{1}{\sqrt{x-y}\cdot \overline{x^2y^2 - x^3 + x^2y}}$ maintenant on réduira la différentielle ainsi trouvée aux fractions rationelles en faisant $x - y = z^2$ & $y = x - z^2$ & l' intégrant on trouvera que l' intégrale en est $l\,\overline{x - z^2 - z} - l\,\overline{x - z^2 + z} - \frac{z}{x} + N$; d' où on voit que l' intégrale de la proposée est

$$l\,\overline{y - \sqrt{x-y}} - l\,\overline{y + \sqrt{x-y}} - \frac{\sqrt{x-y}}{x} + N = 0.$$

IV. On pourrait auffi employer la méthode des feries pour trouver le facteur A, les loix de ces feries feraient fuppofées de la forme qu'elles doivent avoir pour répréfenter les racines d' une équation algébrique, & on trouverait les moyens de rendre cette forme comparable avec celle que donnent les équations de condition pour la loi d' une ferie qui repréfenterait A.

V. La raifon, qui m'avoit porté à regarder comme rationel le facteur de toute équation rationelle, venoit de ce que le radical qui pouvait s' y trouver me paraiffait devoir avoir un coéficient arbitraire; mais on voit par l'exemple ci-deffus que quoique dans la différentielle exacte le coéfficient de $\sqrt{x-y}$ foit arbitraire, il ne peut être fuppofé tel dans l' intégrale, parceque parmi les quantités rationelles fe trouve le quarré de $\sqrt{x-y}$ dont le coéfficient n' eft pas arbitraire, & voila ce qui diftingue les radicaux algébriques des interfcendants dans la queftion qui nous occupe ici.

Quoique la fuppofition que j'ai faite ci-deffus me paraiffe générale; cependant comme elle dépend de la théorie des équations déterminées, théorie qui n'eft pas encore fuffifamment éclaircie au deffus du quatrième dégré, il faudra peut-être pour plus de généralité au lieu de fuppofer l'équation au facteur du dégré $n\,m$ pour l'ordre n & ne contenant que des puiffances m la fuppofer du dégré $\frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1 \cdot m}{p}$ & ne contenant que des puiffances m; p eft ici le plus petit divifeur de $n+1$ autre que l' unité. Il y a cependant tout lieu de croire que la nouvelle étendue que je propofe ici de donner à cette folution eft fuperflue parcequ' une quantité qui n' eft fufceptible que de n valeurs ne

differerait de la première forme indiquée ci-dessus, que parcequ' il y aurait à ces n valeurs des coéfficiens irrationels, que l'érection à la puissance m ne pourrait faire disparaitre ; mais l'équation qui les fait disparaitre étant homogène entre la racine & sa valeur affectée de ces coéfficiens la forme de la racine reste la même que ci-dessus dans le cas présent où ces coéfficiens sont arbitraires.

Ribemont du 30 Avril 1771.

DE INTEGRATIONE INDEFINITINOMII.

Quum hic commentarius ab auctore P. Gianella soc. Jesu Matheseos professore in Coll. Braid. Mediolani ad cl. Comitem Salutiarum missus fuisset ab an. 1769. mens. febr. ut ipsum R. SOCIETATI *offerret, quumque sociorum ad id delectorum suffragiis fuisset probatus, qui & auctoris ingenium, & in arduis, intricatisque computationibus expediendis sagacitatem commendarunt,* SOCIETAS *huic libro inserendum esse decrevit.*

Proposito differentiali $x^{\pm r}\, dx\, X^n$, in quo cum exponens r est positivus, sit $X = f x^m + g x^{m'} + h x^{m''} + \ldots$, cum vero est negativus, sit $X = f + g x^m + h x^{m'} + \ldots$, quaerentur 1.° conditiones, quibus affecti esse debent exponentes r, m, m', $m''\ldots$, ut $x^{\pm r}\, dx\, X^n$ possit integrari: deinde si in exponentibus repertae conditiones non contineantur, quaeretur methodus obtinendi seriem, in qua exponentes extra signum, ut aiunt, perpetuo ad unitatem accedant, quaeque ita ubicumque abrumpi possit, ut noti sint termini nondum integrati, qui sint addendi.

Hinc cum poni possit $y\, dx = x^{\pm r}\, dx\, X^n$, sive $y = x^{\pm r}\, X^n$, si fuerint repertae conditiones ad integrandum $x^{\pm r}\, dx\, X^n$, habebuntur quoque conditiones, quibus exponentes praediti esse debent, ut curvae, quas exhibet aequatio $y = x^{\pm r}\, X^n$, possint quadrari.

I.

Ponatur ergo $\int x^{\pm r}\, dx\, X^n = A x^u X^{n+1} + \int Y dx X^n$ (M), ubi quantitas constans A, variabilis Y, exponens u, debent in decursu determinari: tum sumantur differentiae, quae dividantur per dx, & multiplicentur, vel dividan-

tur per X^n prout exponens n fuerit vel negativus, vel positivus: habebitur.

$$x^{\pm r} = A u x^{u-1} X + (n+1) x^u \frac{dX}{dx} + Y.$$

In hac aequatione posito $n + 1 = n'$, & substituto valore Indefinitinomii X, & eius differentia divisa per dx, cum exponens r est positivus, habebitur.

$$x^r = Aufx^{m+u-1} + Augx^{m'+u-1} + Auhx^{m''+u-1} + \ldots + Y$$
$$Amn'fx^{m+u-1} + Am'n'gx^{m'+u-1} + Am''n'hx^{m''+u-1} + \ldots$$

Sit modo exponentium m, m' m'' ... maximus m, & fiat $m + u - 1 = r$, unde $u - 1 = r - m$, $u = r + 1 - m$, fiat praeterea $Auf + Amn'f = 1$, unde

$$A = \frac{1}{(r+1-m+n'm)f}$$

$$Aug + Am'n'g = \frac{(r+1-m+n'm')g}{(r+1-m+n'm)f}$$

$$Auh + Am''n'h = \frac{(r+1-m+n'm'')h}{(r+1-m+n'm)f}$$

. . . .

hinc $Y = -\frac{(r+1-m+n'm')g}{(r+1-m+n'm)f} x^{m'+r-m} - \frac{(r+1-m+n'm'')h}{(r+1-m+n'm)f} x^{m''+r-m} - \ldots$

Cum vero exponens r est negativus, erit

$$x^{-r} = Aufx^{u-1} + Augx^{m+u-1} + Auhx^{m'+u-1} + \ldots + Y$$
$$Amn'gx^{m+u-1} + Am'n'hx^{m'+u-1} + \ldots$$

Quare exponentium m, m', m'' ... supposito m minimo, & posito $u - 1 = r$, $Auf = 1$, eodem modo habetur $A = \frac{1}{(1-r)f}$, & $Y = -\frac{(1-r+n'm)g}{(1-r)f} x^{m-r} - \frac{(1-r+n'm')h}{(1-r)f} x^{m'-r} - \ldots$

Substitutis vero in M valoribus inventis pro A, Y, u, habebitur in 1.° casu.

$\int x^r \, dx \, X^n = \frac{1}{(r+1-m+n'm)f} x^{r+1-m} X^{n+1} -$
$\int \frac{(r+1-m+n'm')g}{(r+1-m+n'm)f} \times x^{m'+r-m} dx \, X^n - \int \frac{(r+1-m+n'm'')h}{(r+1-m+n'm)f}$
$x^{m''+r-m} dx \, X^n - \int \ldots$ in 2.° casu

$\int x^{-r} \, dx \, X^n = \frac{1}{(1-r)f} x^{1-r} X^{n+1} - \int \frac{(1-r+n'm)g}{(1-r)f}$
$x^{m-r} dx \, X^n \qquad - \int \frac{(1-r+n'm')h}{(1-r)f}$
$x^{m'-r} dx \, X^n \ldots\ldots$

Generaliter autem facto in 1.° casu

$1 - m + n'm = a \qquad 1 - m = q$
$1 - m + n'm' = a' \qquad m' - m = q'$
$1 - m + n'm'' = a'' \qquad m'' - m = q''$
$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \qquad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$

In 2.° $\qquad 1 = a \qquad 1 = q$
$1 + n'm = a' \qquad m = q'$
$1 + n'm' = a'' \qquad m' = q''$
$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \qquad \cdot \;\cdot \;\cdot$

habebitur,

$\int x^{\pm r} \, dx X^n = \frac{1}{(\pm r + a)f} x^{\pm r + q} X^{n+1} - \int \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + a)f}$
$x^{\pm r + q'} dx \, X^n - \int \frac{(\pm r + a'')h}{(\pm r + a)f} x^{\pm r + q''} dx \, X^n -$
$\int \frac{(\pm r + a''')i}{(\pm + a)f} x^{\pm r + q'''} dx \, X^n - \;.\;.\;.\;.\;. \qquad (N)$

Hinc patet terminos affectos signo $\int$ futuros in aequatione N numero t, si termini in dato multinomio fuerint $t+1$.

I I.

Sit iam $X = f x^m + g$, vel $X = f + g x^m$, sit scilicet X binomium, hinc N erit

$$\int x^{\pm r} dx X^n = \frac{1}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q} X^{n+1} - \int \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q'} dx X^n.$$

Quod si in N loco $\pm r$ substituatur $\pm r + q'$, & tota aequatio N multiplicetur $- \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + a) f}$ habebitur

$$- \int \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q'} dx X^n = \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + q' + a) f (\pm r + a) f} x^{\pm r + q + q'} X^{n+1} + \int \frac{(\pm r + q' + a')g(\pm r + a')g}{(\pm r + q' + a) f (\pm r + a) f} x^{\pm r + 2q'} dx X^n$$

hinc

$$\int x^{\pm r} dx X^n = \frac{1}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q} X^{n+1} - \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + q' + a) f (\pm r + a) f} x^{\pm r + q + q'} X^{n+1} + \int \frac{(\pm r + q' + a')g \, (\pm r + a')g}{(\pm r + q' + a) f \, (\pm r + a) f} x^{\pm r + 2q'} dx X^n.$$

Quod si eadem instituatur operatio pro termino affecto signo $\int$, qui postremo habitus est, & eadem rursus repetatur pro novo termino, qui haberetur nondum integratus, habebitur series.

$$\int x^{\pm r} dx X^n = \frac{1}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q} X^{n+1} - \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + a) f (\pm r + q' + a) f} x^{\pm r + q + q'} X^{n+1} + \frac{(\pm r + a')g \, (\pm r + q' + a')g}{(\pm r + a) f (\pm r + q' + a') f (\pm r + 2q' + a)} x^{\pm r + q + 2q'} X^{n+1} - \&c.$$

terminus porro s^{esimus} erit

$$\frac{1.(\pm r + a')g \, (\pm r + q' + a')g \, (\ldots\ldots)g \, (\pm r + (s-2)q' + a')g}{(\pm r + a) f \, (\pm r + q' + a) f \, (\ldots\ldots\ldots) f \, (\pm r + (s-1) q' + a) f} x^{\pm r + q + (s-1)q'} X^{n+1}$$

apposito signo negativo terminis paribus, reliquis signo positivo.

Quod si alicubi sit series abrumpenda, addatur $\int P$ $(\pm r + (s-1)q' + a')\, g\, x^{\pm r + sq'}\, dx\, X^n$ vocando $- P$ coëfficientem termini antecedentis s^{esimi} integrati. Integrabitur vero omnino propositum binomium differentiale, nec quidquam addendum erit seriei abruptae post terminum s, si fuerit $\pm r + (s-1)q' + a' = 0$, scilicet cum exponens r est positivus $r = sm - 1$, & $-r = -1 - sm - n'm$, cum r est negativus.

Identidem vero contingit denominatoris factorem aliquem fieri $= 0$, cum scilicet $\pm r + (s-1)q' + a = 0$. At tum series usque ad eum terminum continuetur, quem si transilieris, incidas in huiusmodi factorem: abruptae vero adde ut supra $\int P\, (\pm r + (s-1)q' + a')$ $g x^{\pm r + sq'}\, dx\, X^n$. Quod si r fuerit positivus & $\pm r + sq' > -1$, tum circa hunc terminum operandum eodem omnino modo, ac quando ab initio exponens r est negativus. Habebitur vero integratio, si fuerit $r = -1 - n'm$.

I I I.

Hinc vero aperitur methodus inveniendi conditiones, ut indefinitinomium ipsum integretur. Sit N ut in fine articuli I. Ex terminis vero, qui in N afficiuntur signo $\int$, unus tantum supersit, reliquis evanescentibus, facto nempe numeratore $= 0$, tum circa superstitem terminum eadem recurrent omnino, quae articulo antecedenti dicta sunt de Binomii integratione. Cum autem ex terminis affectis signo $\int$ possit superesse primus, vel secundus, vel tertius &c. ideo datum multinomium tot modis poterit integrari, quot unitates continentur in t.

Sit e. c. X trinomium, hinc $t = 2$, duobus ergo modis integrari poterit, in quorum quoque conditiones duae reperientur.

Primus si sit $\pm r + a' = 0$, & $\pm r + (s - 1) q'' + a'' = 0$

Secundus si sit $\pm r + a'' = 0$, & $\pm r + (s - 1) q' + a' = 0$

Sit X quadrinomium, hinc & $t = 3$, & tribus modis integrari poterit, in quorum quoque tres sunt conditiones.

Primus $\pm r + a' = 0$, $\pm r + a'' = 0$, $\pm r + (s-1) q''' + a''' = 0$

Secundus $\pm r + a' = 0$, $\pm r + a'' = 0$, $\pm r + (s-1) q' + a'' = 0$

Tertius $\pm r + a'' = 0$, $\pm r + a''' = 0$, $\pm r + (s-1) q' + a' = 0$

Et si X fuerit quinquinomium, vel sextinomium eodem prorsus modo licebit conditiones reperire. Hinc in multinomio modi illud integrandi erunt numero t; & numero pariter t erunt conditiones, quae in quoque modo reperiuntur. Substitutis vero pro a', a'', a''', . . , & q', q'', q''' . . eorum valoribus ex artic. I., prout r fuerit vel positivus, vel negativus, non omnes modi aeque apti reperientur, sed unus prae alio eligendus erit, prout fuerint exponentes r, m, m', m'' . . . . inter se comparati. Methodi applicationem non persequor: sufficiat praestitisse quod primo loco propositum fuerat.

I V.

Sin exponentes repertis careant conditionibus, ad habendam, quae secundo loco quaerenda proposita fuerat series, ita erit operandum.

Resumpta aequatione N, in ea, ut in artic. II. pro binomiis, loco $\pm r$ substituatur $\pm r + q'$, & tota ducatur in $- \frac{(\pm r + a')g}{(\pm r + a)f} = - A\ (\pm r + a')\, g$, posito $\frac{1}{(\pm r + a)f} = A$. Obtinebitur autem hoc pacto valor pro termino $- \int \frac{(\pm r + a')\, g}{(\pm r + a)\, f}\, x^{\pm r + q'}\, d x\, X^n$. Eodem mo-

do quaerantur valores pro reliquis terminis $-\int\frac{(\pm r+a'')h}{(\pm r+a)f}$
$x^{\pm r+q''}dx\,X^n-\int\frac{(\pm r+a''')i}{(\pm r+a)f}x^{\pm r+q'''}dx\,X^n-\int\ldots$

Quod cum peractum fuerit, habebitur.

$$-\int A(\pm r+a')gx^{\pm r+q'}dxX^n=-\frac{A(\pm r+a')}{(\pm r+q'+a)f}x^{\pm r+q+q'}X^{n+1}$$
$$+\int A'(+r+q'+a')gx^{\pm r+2q'}dxX^n$$
$$+\int A'(\pm r+q'+a'')hx^{\pm r+q'+q''}dxX^n$$
$$+\int A'(\pm r+q'+a''')ix^{\pm r+q'+q'''}dxX^n$$
$$+\ldots\ldots$$

$$-\int A(\pm ra'')hx^{\pm r+q''}dxX^n=-\frac{A(\pm r+a'')h}{(\pm r+q''+a)f}x^{\pm r+q+q''}X^{n+1}$$
$$+\int B(\pm r+q''+a')g\,x^{\pm r+q'+q''}dxX^n$$
$$+\int B(\pm r+q''+a'')h\,x^{\pm r+2q''}dxX^n$$
$$+\int B(\pm r+q''+a''')ix^{\pm r+q''+q'''}dxX^n$$
$$+\ldots\ldots$$

$$\int A(\pm r+a''')ix^{\pm r+q'''}dxX^n=-\frac{A(\pm r+a'')i}{(\pm r+q''+a)f}x^{+r+q+q'+q'''}X^{n+1}$$
$$+\int C(\pm r+q''+a')g\,x^{\pm r+q'+q'''}dxX^n$$
$$+\int C(\pm r+q'''+a'')h\,x^{+r+q''+q''}dxX^n$$
$$+\int C(\pm r+q'''+a''')i\,x^{\pm r+2q'''}dxX^n$$
$$+\ldots\ldots$$

In his valoribus positus est coëfficiens $\frac{A(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}=A$

$\frac{A(\pm r + a'')h}{(\pm r + a)f} = B$, $\frac{A(\pm r + a''')i}{(\pm r + a)f} = C$

Eadem rurſus operatio in his terminis inſtituatur, qui habiti ſunt affecti ſigno $\int$, & poſitis

$A'(\pm r + q' + a'')h + B(\pm r + q'' + a')g = B'$,

$A'(\pm r + q' + a''')i + C(\pm r + q''' + a')g = C'$,

& $B(\pm r + q'' + a''')i + C(\pm r + q'' + a'')h = e$,

obtinebitur

$$\int A'(\pm r + q' + a')g x^{\pm r + 2q'} dx X^n = \frac{A'(\pm r + q' + a')g}{(\pm r + 2q' + a)f} x^{\pm r + q + 2q'} X^{n+1}$$

$$-\int A''(\pm r + 2q' + a') g x^{\pm r + 3q'} dx X^{n+1}$$

$$-\int A''(\pm r + 2q' + a'') h x^{\pm r + 2q' + q''} dx X^n$$

$$-\int A''(\pm r + 2q' + a''') i x^{\pm r + 2q' + q'''} dx X^n$$

$$-\ldots\ldots$$

$$\int B' x^{\pm r + q' + q''} dx X^n = \frac{B'}{(\pm r + q' + q'' + a)f} x^{\pm r + q' + q''} X^{n+1}$$

$$-\int B''(\pm r + q' + q'' + a') g x^{\pm r + 2q' + q''} dx X^n$$

$$-\int B''(\pm r + q' + q'' + a'') h x^{\pm r + q' + 2q''} dx X^n$$

$$-\int B''(\pm r + q' + q'' + a''') i x^{\pm r + q' + q'' + q'''}$$

$$-\int \ldots\ldots$$

$$\int C' x^{\pm r + q' + q'''} dx X^n = \frac{C'}{(\pm r + q' + q''' + a)f} x^{\pm r + q + q' + q'''} X^{n+1}$$

$$-\int C''(\pm r + q' + q''' + a') g x^{\pm r + 2q' + q'''} dx X^n$$

$$-\int C''(\pm r + q' + q''' + a'') h x^{\pm r + q' + q'' + q'''} dx X^n$$

$$-\int C''(\pm r + q' + q''' + a''') i x^{\pm r + q' + 2q'''} dx X^n$$

$$-\int \ldots$$

$\int B$

$$\int B(\pm r+q''+a')hx^{\pm r+2q''}dxX^n=\frac{B(\pm r+q''+a'')h}{(\pm r+2q''+a)f}\,x^{\pm r+q+2q''}X^{n+1}$$
$$-\int D(\pm r+2q''+a')\,g\,x^{\pm r+q'+2q''}dxX^n$$
$$-\int D(\pm r+2q''+a'')\,h\,x^{\pm r+3q''}$$
$$-\int D(\pm r+2q''+a''')\,i\,x^{\pm r+2q''+q'''}dxX^n$$
$$-\int\ldots$$
$$\int e\,x^{\pm r+q''+q'''}dxX^n=\frac{e}{(\pm r+q''+q'''+a)f}\,x^{\pm r+q+q''+q'''}X^{n+1}$$
$$-\int E(\pm r+q''+q'''+a')g\,x^{\pm r+q'+q''+q'''}dxX^n$$
$$-\int E(\pm r+q''+q'''+a'')h\,x^{\pm r+2q''+q'''}dxX^n$$
$$-\int E(\pm r+q''+q'''+a''')i\,x^{\pm r+q''+2q'''}dxX^n$$
$$-\int\ldots.$$
$$\int C(\pm r+q'''+a''')i\,x^{\pm r+2q'''}dxX^n=\frac{C(\pm r+q''+a''')i}{(\pm r+2q'''+a)f}\,x^{\pm r+q+2q'''}X^{n+1}$$
$$-\int F(\pm r+2q'''+a')\,g\,x^{\pm r+q'+2q'''}dxX^n$$
$$-\int F(\pm r+2q'''+a'')\,h\,x^{\pm r+q''+2q'''}dxX^n$$
$$-\int F(\pm r+2q'''+a''')\,i\,x^{\pm r+3q'''}dxX^n$$
$$-\int\ldots.$$

In quibus positum fuit $\frac{A'(\pm r+q'+a')g}{(\pm r+2q'+a)f}=A''$, $\frac{B'}{(\pm r+q'+q''+a)f}=B''$
$\frac{C'}{(\pm r+q'+q'''+a)f}=C''$, $\frac{B(\pm r+q''+a'')h}{(\pm r+2q''+a)f}=D$, $\frac{e}{(\pm r+q''+q'''+a)f}=E$
$\frac{C(\pm r+q'''+a''')i}{(\pm r+2q'''+a)f}=F$

Operatio rursus eadem circa novos terminos nondum integratos institui posset, sed haec ad ea, quae se-

quuntur, intelligenda, sufficiuut. Nunc vero ostendam, quo pacto lex generalis pro serie eruatur, & primo quidem ostendam legem generalem exponentium, & numeri terminorum in quoque seriei termino, secundo legem coefficientium.

Moneo autem terminum $Ax^{\pm r + q} X^{n+1}$ habitum ex aequatione N mihi esse terminum primum seriei quaesitae, terminos $(A'x^{\pm r+q+q'} + Bx^{\pm r+q+q''} + Cx^{\pm r+q+q'''} + \ldots)\ X^{n+1}$ habitos ex prima operatione, mihi esse terminum secundum seriei quaesitae, & terminos habitos ex secunda operatione $(A''x^{\pm r+q+2q'} + B''x^{\pm r+q+q'+q''} + C''x^{\pm r+q+q'+q'''} + Dx^{\pm r+q+2q''} + Ex^{\pm r+q+q''+q'''} + Fx^{\pm r+q+2q'''} + \ldots)\,X^{n+1}$ esse tertium, atque ita deinceps.

V.

Quoad primum igitur, cum exponentes termini secundi habiti sint substituendo loco r in termino, qui iam integratus habetur in N, exponentes terminorum, qui in N nondum integrati, nempe $\pm r + q'$, $\pm r + q''$, $\pm r + q'''$, .., & cum exponentes tertii termini habiti sint pariter in eodem aequationis N termino substituendo loco $\pm r$ exponentes $\pm r + 2q'$, $\pm r + q' + q''$, $\pm r + q' + q'''$, $\pm r + 2q''$, $\pm r + q'' + q'''$, $\pm r + 2q'''$, scilicet exponentes terminorum qui habiti sunt nondum integrati in secundo, & cum, perinde, ut in his seriei terminis, habeantur exponentes pro reliquis; patet & tot in secundo seriei termino diversos exponentes haberi, quot in aequationis N terminis nondum integratis habentur simplices exponentes diversi q', q'', q'''. ., & tot pro tertio diversos exponentes obtineri, quot possibiles diversae combinationes binariorum ex additione simplicium exponentium q', q'', q'''. . ., & in quarto quot horum ipsorum simplicium exponentium diversae combinationes ternariorum &c.

Hinc generaliter ad habendum & exponentes, & numerum terminorum pro termino ſeriei $s + 1$, fiant omnes poſſibiles combinationes $s.^{\text{ariorum}}$ ex additione ſimplicium exponentium q', q'', q''' addito ubique $+ r + q$.

Ut autem facilius innoteſcat $s.^{\text{ariorum}}$ omnium numerus, ſit adiecta tabella numerorum, quos polygonos vocant, in qua pro quoque termino lex generalis eſt, ut ille aequetur & numero proxime antecedenti, & numero proxime ſuperiori.

Numeri Romani, qui tabellae ſuperſcripti reperiuntur, numerum indicant terminorum ſeriei quaeſitae: numeri vero per columnam a latere adſcripti valorem indicant numeri t.

$t =$	I	II	III	IV	V	VI
1	1:	1:	1:	1:	1.	1
2	1:	2:	3:	4:	5:	6
3	1:	3:	6:	10:	15:	21
4	1:	4:	10:	20:	35:	56
5	1:	5:	15:	35:	70:	126
:	.	.	.	.	.	.

Hinc ſi e. c. $t = 4$, ſumenda erit quarta linea, & primus terminus ſeriei unicum dumtaxat continebit terminum, ſecundus $4 = t$, tertius 10, quartus 20, quintus 35 &c.

Quod ſi alicubi ſit abrumpenda ſeries e. c. poſt terminum $s^{\text{eſimum}}$, ad habendum & exponentes, & numerum terminorum, qui adhuc affecti ſunt ſigno $\int$, quaerantur, & combinationes ipſae, & numerus $s.^{\text{ariorum}}$ addito ubique $\pm r$.

V I.

Quaerenda nunc coefficientium lex. Inſpicienti terminos iam integratos in articulo IV. haec eruuntur.

1. Quotieſcumque factor aliquis, vel diviſor coefficientium continet a, factor ille, vel diviſor multiplicatur per f primum coefficientem aſſumpti multinomii, quotieſcumque vero continet vel a', vel a'', vel a'''.., multiplicatur per coefficientem ſecundum, tertium aſſumpti multinomii, videlicet per g, h, i, . .

2. Coefficiens quisque cuiusque termini s^{esimi} seriei habet divisores numero s, factores vero numero $s - 1$.

3. Nonnulli coefficientes pluribus constant partibus, quarum quaeque numero secum aequalibus factoribus, & divisoribus componitur.

4. Ex factoribus qui maximus, ille nempe, qui plures exponentes continet, immediate pendet ab exponente termini, cuius est coefficiens; a maximo autem is pendet, qui ex reliquis maior est, & ex hoc rursus qui ex residuis maior, atque ita deinceps. Divisores vero ita a factoribus pendent, ut his datis dentur & illi. Quibus omnibus rite perspectis en qua ratione dato exponente termini alicuius, eius coefficientem reperio.

Sit exponens $\pm r + q + q' + q'''$. Deleto q, loco vel q', vel q''' substituatur vel a', vel a'''. Cum hoc duplici modo possit fieri, duo factores maximi habebuntur, adeoque hinc iam duas partes habebit coefficiens, scilicet $\pm r + q' + a'''$, $\pm r + q''' + a'$.

2. In utroque factore maximo deleatur & a''', & a', & loco residui q', q''' substituendo a', a''', exurgent duo factores secundarii $\pm r + a'$, $\pm r + a'''$, qui per maximum illum, a quo oriuntur, factorem, & per correspondentem assumpti multinomii coefficientem multiplicati dabunt $(\pm r + q' + a''')\, i\, (\pm r + a')\, g$, $(\pm r + q''' + a')\, g\, (\pm r + a''')\, i$. Cum vero in secundariis factoribus non amplius q' vel q''' reperiatur, nullus alius erit addendus factor.

3. Quisque factor dividatur per factorem ipsum, in quo loco vel a', a''', substituta fuerit quantitas a, tum totus exortus coefficiens dividatur per exponentem ipsum, in quo loco q substituta pariter fuerit a: apposito demum cuilibet divisori f, habebitur coefficiens

$$\left.\begin{matrix}\frac{(\pm r+q'+a'')i}{(\pm r+q'+a)f}\ \frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}\\[2ex] \frac{(\pm r+q''+a')g}{(\pm r+q''+a)f}\ \frac{(\pm r+a''')i}{(\pm r+a)f}\end{matrix}\right\}\times\frac{1}{(\pm r+q+q'''+a)f}$$

pro termino cuius exponens eſt $+ r + q + q' + q'''$

Sit exponens $\pm r + q + q' + 2q'''$, hinc factores maximi erunt duo, quibus & ſubſcripto diviſore, & ductis in correſpondentes f, g, h, i, habetur

$$\frac{(\pm r+q'+q'''+a''')i}{(\pm r+q'+q'''+a)f},\ \frac{(\pm r+2q'''+a')g}{(\pm r+2q'''+a)f}$$

Facta vero in horum primo ſubſtitutione, ut ſupra, cum haec duplici modo poſſit fieri, duo erunt pro illo factore maximo factores ſecundarii, quorum quiſque per eum ipſum multiplicatur. Unico vero modo poterit in ſecundo ſubſtitutio fieri. Hinc totus coefficimus erit

$$\left.\begin{matrix}\frac{(\pm r+q'+q'''+qa''')i}{(\pm r+q'+q'''+a)f}\times\left\{\begin{matrix}\frac{(\pm r+q'+a'')i}{(\pm r+q'+a)f}\ \frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}\\[2ex] \frac{(\pm r+q''+a')g}{(\pm r+q''+a)f}\ \frac{(\pm r+a''')i}{(\pm+a)f}\end{matrix}\right.\\[4ex] \frac{(\pm r+2q'''+a')g}{(\pm r+2q''+a)f}\ \frac{(\pm r+q'''+a''')i}{(\pm r+q''+a'')f}\ \frac{(\pm r+a''')i}{(\pm r+a)f}\end{matrix}\right\}\times\frac{1}{(\pm r+q'+2q''+a)f}$$

Sit exponens generalis $\pm r + q + \beta q' + \gamma q'' + \delta q''' + \ldots$ in quo β, γ, δ.. ſunt quicumque numeri integri:

1. Ex exponente deleto q, loco unius ex reliquis q', q'', q'''. . ., ſubſtituatur vel a', vel a'', vel a'''. Cum hoc nunc triplici modo poſſit fieri, totidem enim hic ſuppoſiti exponentes q', q'', q''', tres pariter erunt factores, quos ſupra maximos vocavi, quibus ſi ſubſcribantur correſpondentes diviſores, & omnes per correſpondentem coefficientem f, g, h, i multiplicentur, habebitur

$$\frac{(\pm r+(\beta-1)q'+\gamma q''+\delta q'''+\ldots+a')g}{(\pm r+(\beta-1)q'+\gamma q''+\delta q'''+\ldots+a)f}=Q$$

$$\frac{(\pm r+\beta q'+(\gamma-1)q''+\delta q'''+\ldots+a'')h}{(\pm r+\beta q'+(\gamma-1)q''+\delta q'''+\ldots+a)f}=R$$

$$\frac{(\pm r+\beta q'+\gamma q''+(\delta-1)q'''+\ldots+a''')i}{(\pm r+\beta q'+\gamma q''+(\delta-1)q'''+\ldots a)f}=S$$

2. Ex factoribus Q, R, S deleto a', a'', a''', loco unius ex reliquis q', q'', q'''.. substituatur vel a', vel a'', vel a''', quod quidem triplici rursus modo hic potest obtineri. Subscriptis vero divisoribus, & appositis correspondentibus f, g, h, i.. Q dabit

$$\frac{(\pm r+(\beta-2)q'+\gamma q''\,\delta q'''+\ldots a')g}{(\pm \iota+(\beta-2)q'+\gamma q''\,\delta q'''+\ldots a)f}=Q'$$

$$\frac{(\pm r+(\beta-1)q'+(\gamma-1)q''+\delta q'''+\ldots+a'')h}{(\pm r+(\beta-1)q'+(\gamma-1)q''+\delta q'''+\ldots+a)f}=Q''$$

$$\frac{(\pm r+(\beta-1)q'+\gamma q''+(\delta-1)q'''+\ldots+a''')i}{(\pm r+(\beta-1)q'+\gamma q''+(\delta-1)q'''+\ldots+a)f}=Q'''$$

similiter supponatur ab R haberi $R'+R''+R'''$, & ab S, $S'+S''+S'''$.

3. Eadem operatio, quae modo circa Q, R, S instituta fuit, repetatur circa $Q', Q'', Q''', R', R'', R''', S', S'', S'''$, & supponatur

Q'	praebere factores	$Q^{\lambda}+Q^{\lambda'}+Q^{\lambda''}$
Q''		$Q^{\mu}+Q^{\mu'}+Q^{\mu''}$
Q'''		$Q^{\nu}+Q^{\nu'}+Q^{\nu''}$
R'	vero factores	$R^{\lambda}+R^{\lambda'}+R^{\lambda''}$
R''		$R^{\mu}+R^{\mu'}+R^{\mu''}$
R'''		$R^{\nu}+R^{\nu'}+R^{\nu''}$
& demum S'	praebere	$S^{\lambda}+S^{\lambda'}+S^{\lambda''}$
S''		$S^{\mu}+S^{\mu'}+S^{\mu''}$
S'''		$S^{\nu}+S^{\nu'}+S^{\nu''}$

4. Rursus eadem operatio instituatur circa omnes de novo nunc habitos terminos, tum rursus circa eos, qui ultimo habiti fuissent, si instituta operatio fuisset, idque donec continua unitatum subtractione a numeris β, γ, δ,

& isti exhauriantur, & nil supersit aliud quam $\frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}$, $\frac{(\pm r+a'')h}{(\pm r+a)f}$, $\frac{(\pm r+a''')i}{(\pm r+a)f}$.

Quod quidem cum non sine labore plerumque peractum fuerit, ad habendum quaesitum coefficientem repertae quantitates erunt disponendae, ut in tabula sequenti

$$\left.\begin{array}{l}
Q\times\left\{\begin{array}{l}
Q'\times\left\{\begin{array}{l}Q^{\lambda}\\ Q^{\lambda'}\\ Q^{\lambda''}\end{array}\right)\\
Q''\times\left\{\begin{array}{l}Q^{\mu}\\ Q^{\mu'}\\ Q^{\mu''}\end{array}\right)\\
Q'''\times\left\{\begin{array}{l}Q^{\nu}\\ Q^{\nu'}\\ Q^{\nu''}\end{array}\right)
\end{array}\right.\\
R\times\left\{\begin{array}{l}
R'\times\left\{\begin{array}{l}R^{\lambda}\\ R^{\lambda'}\\ R^{\lambda''}\end{array}\right)\\
R''\times\left\{\begin{array}{l}R^{\mu}\\ R^{\mu'}\\ R^{\mu''}\end{array}\right)\\
R'''\times\left\{\begin{array}{l}R^{\nu}\\ R^{\nu'}\\ R^{\nu''}\end{array}\right)
\end{array}\right.\\
S\times\left\{\begin{array}{l}
S'\times\left\{\begin{array}{l}S^{\lambda}\\ S^{\lambda'}\\ S^{\lambda''}\end{array}\right)\\
S''\times\left\{\begin{array}{l}S^{\mu}\\ S^{\mu'}\\ S^{\mu''}\end{array}\right)\\
S'''\times\left\{\begin{array}{l}S^{\nu}\\ S^{\nu'}\\ S^{\nu''}\end{array}\right)
\end{array}\right.
\end{array}\right\}\frac{1}{(\pm r+\beta q'+\gamma q''+\delta q'''+\dots+a)f}$$

Atque hæc lex eſt coefficientium pro quoque ſeriei termino. Sin abrumpenda eſſet ſeries ipſa, ad inveniendos terminorum, qui nondum ſunt integrati, coefficientes, perinde omnino operandum erit. Haec tamen duo advertenda: 1. eumdem eſſe coefficientem termini, cuius exponens eſt $\pm r + q + \beta q' + \gamma q'' + \delta q''' + \ldots$, & termini, cuius exponens ſit $\pm r + \beta q' + \gamma q'' + \delta q''' + \ldots$: 2. omittendum eſſe diviſorem $\frac{1}{(\pm r + \beta q' + q'' + \delta q''' + \ldots + a) f}$, qui omnes coefficientis ipſius partes multiplicat.

Hoc unum ſupereſt obſervandum, quod ſcilicet coefficientes termini $s^{\text{eſimi}}$ in ſerie afficiendi ſunt ſigno negativo ſi s ſit numerus par, & negativo ſi s ſit numerus impar. Quod etiam intelligendum de eo termino, qui addendus eſt cum ſeries ipſa abrumpitur.

V I I.

At ſi in propoſito indefinitomio ſit $m' = m + 1$, $m'' = m + 2$ &c., ſi nempe poſito m aequali cuicumque numero, reliqui exponentes m', m'' . . . progrediantur in ratione arithmetica, cuius differentia ſit unitas, tum nec ternarii, nec quaternarii ita creſcent, nec adeo implicata coefficientium erit lex, licet ipſi coefficientes admodum multiplices evadant. In hoc caſu igitur.

1. N erit

$$\int x^{\pm r} dx\, X^n = \frac{1}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q} X^{n+1} - \int \frac{(\pm r + a') g}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q'} dx\, X^n$$
$$- \int \frac{(\pm r + a'') h}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + 2q'} dx\, X^n$$
$$- \int \frac{(\pm r + a''') i}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + 3q'} dx\, X^n$$
$$- \int \ldots$$

2. Numeri terminorum pro quoque feriei termino in hac ratione arithmetica $1 : t : 2t - 1 : 3t - 2 : 4t - 3$ &c. progrediuntur ita ut in termino s.^efimo^ feriei termini fint $(s - 1)t - (s - 2)$.

3. Ad habendos vero coëfficientes pro quoque feriei termino en quale compendium ex iis, quae hactenus dicta funt, exurgit.

Difponantur, ut in adiecta tabella plures quantitates per columnas, in quarum prima unica quantitas reperiatur, in fecunda fint numero t, in tertia $2t - 1$, atque ita deinceps in ratione fupradicta arithmetica: columnis vero paribus praeponatur fignum negativum, reliquis pofitivum.

A	$-A'$	$+A''$	$-A'''$	$+A^{IV}-$
	$-B$	$+B'$	$-B''$	$+B'''-$
	$-C$	$+C'$	$-C''$	$+C'''-$
	D	$+D$	$-D''$	$+D'''-$
	.	$+E$	$-E'$	$+E''-$
	.	$+F$	$-F'$	$+F''-$
	.	$+G$	$-G'$	$+G''-$
		.	$-H$	$+H'-$
		.	$-I$	$+I'-$
		.	$-L$	$+L'-$
			.	$+M-$
			.	$+N-$
			.	$+O-$
			:	

Sit autem una eademque omnium cuiufcumque columnae terminorum lex, ut facto $A = \frac{1}{(\pm r + a)f}$, & denotante p terminum primum, fecundum, tertium &c. in quacumque columna, terminus, qui in columna s.^efima^ obtinet locum p aequetur terminis, qui in columna antecedente obtinent locum $p, p - 1, p - 2, \ldots, p - t + 1$ multiplicatis per certum factorem Z.

Sit vero Z eiufmodi, ut cum multiplicat terminum p in columna antecedenti fit $\frac{(\pm r + (p + s - 3)q' + a')g}{(\pm r + (p + s - 2)q' + a)f} = Z'$ cum multiplicat terminum $p - 1$ fit $\frac{(\pm r + (p + s - 4)q' + a'')h}{(\pm r + (p + s - 2)q' + a)f} = Z''$

cum multiplicat terminum $p-2$ sit $\frac{(\pm r+(p+s-5)q'+a''')i}{(\pm r+(p+s-2)q'+a)f} = Z'''$ &c. retinendo ſemper eumdem denominatorem, & in numeratore apponendo ſucceſſive $(p+s-3)q'+a'$, $(p+s-4)q'+a''$, $(p+s-5)q'+a'''$, $(p+s-6)q'+a^{IV}$, &c.

His ita poſitis ad habendam ſeriem ipſam quaeſitam, quiſque cuiuſque columnae terminus multiplicetur per $x^{\pm r+q+(s-2+p)q'}X^{n+1}$, prima columna ita multiplicata dabit primum terminum ſeriei, ſecunda ſecundum &c., quod ſi alicubi ſit ſeries abrumpenda multiplicetur terminus quiſque ſequentis columnae per

$$\int(\pm r+(p+s-2)q'+a)\,f\,x^{\pm r+(p+s-2)q}\,dx\,X^{n}$$

Antequam finem facio, non abs re erit obſervare omnia, quae in hoc artic. VII. dicta ſunt, trinomiis quoque, in quibus exponentes ſint utcumque, communia eſſe. Quare ad habendam ſeriem diſpoſitis per columnas quantitatibus progredientibus in progreſſione numerum naturalium 1. 2. 3. 4. &c., & praepoſito, ut ſupra, ſigno, haec ſit lex cuiuſque columnae terminorum, ut nempe quiſque, qui in columna obtinet locum p, ſit aequalis & termino, qui in columna antecedenti obtinet locum p

$$\begin{array}{ccccc} A & -A' & +A'' & -A''' & +\,.\,. \\ & -B & +B' & -B'' & +\,.\,. \\ & & +C & -C' & +\,.\,. \\ & & & -D & +\,.\,. \end{array}$$

multiplicato per $\frac{(\pm r+(s-1-p)q'+(p-1)q''+a')g}{(\pm r+(s-p)q'+(p-1)q''+a)f}$

& termino, qui in eadem columna antecedenti obtinet locum $p-1$ multiplicato per $\frac{(\pm r+(s-p)q'+(p-2)q''+a'')h}{(\pm r+(s-p)q'+(p-1)q''+a)f}$.

Tum ad habendam ſeriem, cuiuſque columnae terminus multiplicetur per $x^{\pm r+q+(s-p)q'+(p-1)q''}X^{n-1}$.

Quod ſi alicubi ſit ſeries abrumpenda, ſequens columna multiplicetur per $\int(\mp r + (s-p)q' + a) fx^{\pm r + (s-p)q' + (p-1)q''} dx X^n$.

Inventa ergo, quae duo ab initio propoſita fuerant, quaeque fortaſſe ad illuſtrandam eam calculi integralis partem, quae de differentiis primis agit, & de fractionibus rationalibus, nonnihil conducere videantur.

RECHERCHES

Sur le calcul intégral aux différences infiniment petites, & aux différences finies.

PAR M.r DE LA PLACE.

I.

Parmi le grand nombre d'équations différentielles que l'on rencontre dans la résolution des problémes où il s'agit d'appliquer le calcul à la nature, les plus ordinaires, & les plus remarquables sont comprises sous la forme générale.

$$X = y + H \cdot \frac{dy}{dx} + H' \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + H'' \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \ldots + H^{n-1} \cdot \frac{d^ny}{dx}$$

X, H, H', H'' *&c.* étant des fonctions quelconques de la variable, x, dont la différence est supposée constante. Il seroit donc très-important d'avoir une méthode générale de les résoudre, & il n'y a aucun doute que le mécanique, & plus particulièrement encor l'astronomie phisique n'en rétirassent de grands avantages.

M.rs d'Alembert, & Euler ont résolu depuis long-temps le cas où l'on a H, H', H'' &c. constants; le premier, par sa belle méthode des coëfficiens indéterminés qui est sûrément une des plus ingénieuses, & des plus fécondes de l'analyse, le second, par une considération très-fine, & qui est du plus grand usage dans le calcul intégral. Dans le troisième volume de ces mémoires, on trouve de profondes recherches de M. de la Grange, dans lesquelles ce grand Géométre intégre le cas ou l'on a,

$$H = A\,(x+h)$$
$$H' = A'\,(x+h)^2$$
$$H'' = A''\,(x+h)^3$$
&c.

A, A' &c., & h, étant des conſtantes. Il fait voir de plus que cette équation

$$X = y + H \frac{dy}{dx} + H'. \frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

eſt généralement intégrable dans les mêmes cas que celle-ci

$$o = y + H \frac{dy}{dx} + H'. \frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

Ce beau théorème dont M. d'Alembert a donné dans le même volume une démonſtration fort ſimple, eſt un pas très important vers la réſolution générale de ce genre d'équations. M. Bezout avoit fait depuis long temps ſur ces équations des remarques analogues qu' il a depuis données dans le quatrième volume de ſon cours de mathématiques.

Voici préſentement une méthode qui m'a conduit non ſeulement à la démonſtration de ce théorème, mais de plus à trouver ſur le champ l' intégrale de la première de ces équations lorſqu'on a celle de la ſeconde. Cette méthode ne ſe borne pas d' ailleurs aux différences infiniment petites, on verra, ci-après qu'elle s'applique également bien aux différences finies.

Remarque.

Par intégrale particulière d'une équation différentielle entre x, & y, on peut entendre, ou une fonction de, x, qui ſubſtituée pour, y, dans cette équation en faſſe évanouir tous les termes ou bien une pareille fonction de, x, qui de plus ſoit compriſe dans l' intégrale générale de cette équation en déterminant d'une certaine manière les conſtantes arbitraires que l' intégration y introduit; car M. Euler a fait voir que la première de ces deux propriétés peut très bien ſubſiſter ſans la ſeconde. Ceſt dans le premier ſens que je prendrai d'or en avant l' intégrale particulière d'une équation différentielle.

PROBLÉME I.

Soit proposé d' intégrer l' équation différentielle

$$X = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} \quad . \; . \; . + H^{n-1}\cdot\frac{d^n y}{dx^n} \quad (A)$$

X, H, H' &c. étant des fonctions quelconques de, x, &, dx étant supposé constant.

Solution.

Soit, $\omega\frac{dy}{dx} + y = T$, (B), ω, & T, étant des fonctions de, x; cette équation différentiée successivement devient

$$\omega\cdot\frac{ddy}{dx^2} + \left(\frac{d\omega}{dx} + 1\right)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$\omega\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{2d\omega}{dx} + 1\right)\cdot\frac{ddy}{dx^2} + \frac{dd\omega}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{ddT}{dx^2}$$

$$\omega\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \left(\frac{3d\omega}{dx} + 1\right)\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3\,dd\omega}{dx^2}\cdot\frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3\omega}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d^3T}{dx^3}$$

$$\omega\cdot\frac{\omega d^5y}{dx^5} + \left(\frac{4d\omega}{dx} + 1\right)\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{6\,dd\omega}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{4d^3\omega}{dx^3}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^4\omega}{dx^4}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d^4T}{dx^4}$$

. . . .

$$\omega\frac{d^n y}{dx^n} + \left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{d\omega}{dx} + 1\right)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{1\cdot 2}\cdot\frac{dd\omega}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \&c. \ldots + \frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}$$

je multiplie la première de ces équations par, ω', la seconde par ω'', la troisième par, ω''', &c., & je les ajoute avec l'équation (B), ce qui donne

$$T + \omega' \cdot \frac{dT}{dx} + \omega'' \cdot \frac{d^2T}{dx^2} + \omega''' \cdot \frac{d^3T}{dx^3} \ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}} =$$

$$= y + \frac{dy}{dx} \cdot \left(\omega + \omega' + \omega' \frac{d\omega}{dx} + \omega'' \cdot \frac{dd\omega}{dx^2} + \omega''' \cdot \frac{d^3\omega}{dx^3} \right.$$

$$\left. \ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}} \right) + \frac{ddy}{dx^2} \left(\omega\omega' + \omega'' + 2\omega'' \cdot \frac{d\omega}{dx} \right.$$

$$\left. + 3\,\omega''' \frac{d^2\omega}{dx^2} + 4\,\omega^{IV} \cdot \frac{d^3\omega}{dx^3} \ldots + \frac{n-1}{1}\,\omega^{n-1} \cdot \frac{d^{n-2}\omega}{dx^{n-2}} \right) + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot$$

$$\left(\omega\omega'' + \omega''' + 3\,\omega''' \cdot \frac{d\omega}{dx} + 6\,\omega^{IV} \cdot \frac{dd\omega}{dx^2} + 10\,\omega^{V} \cdot \frac{d^3\omega}{dx^3} \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2} \cdot \omega^{n-1} \frac{d^{n-3}\omega}{dx^{n-3}} \right)$$

. . . .

$$+ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \left(\omega\omega^{n-3} + \omega^{n-2} + \frac{n-2}{1} \cdot \omega^{n-1} \cdot \frac{d\omega}{dx} + \frac{\overline{n-2} \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \right.$$

$$\left. \omega^{n-1} \cdot \frac{dd\omega}{dx^2} \right) + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdot \left(\omega\omega^{n-2} + \omega^{n-1} + \frac{n-1}{1} \cdot \omega^{n-1} \cdot \frac{d\omega}{dx} \right)$$

$$+ \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \omega\omega^{n-1}. \qquad (C)$$

en comparant cette équation avec l'équation (A), on aura 1° celle ci.

$$X = T + \omega' \cdot \frac{dT}{dx} + \omega'' \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \ldots\ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}$$

2° les ſuivantes.

$$\omega\omega^{n-1} = H^{n-1}$$

$$\omega\omega^{n-2} + \omega^{n-1} + \frac{n-1}{1} \cdot \omega^{n-1} \cdot \frac{d\omega}{dx} = H^{n-2}$$

$$\omega\omega^{n-3} + \omega^{n-2} + \frac{n-2}{1} \cdot \omega^{n-2} \cdot \frac{d\omega}{dx} + \frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2} \cdot \omega^{n-1}, \frac{dd\omega}{dx^2}$$

$$= H^{n-3} \text{ \&c.}$$

d'où l'on conclura les ſuivantes

$$\omega^{n-1} = \frac{H^{-1}}{\omega}$$

$$\omega^{n-2} = \frac{H^{n-2}}{\omega} - \left(1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{d\omega}{dx}\right) \cdot \frac{H^{n-2}}{\omega\omega}$$

$$\omega^{n-3} = \frac{H^{n-3}}{\omega} - \left(1 + \frac{n-2}{1} \cdot \frac{d\omega}{dx}\right) \cdot \left(\frac{H^{n-2}}{\omega\omega} - \right.$$

$$\left. \left[1 + \overline{\frac{n-1}{1}} \frac{d\omega}{dx}\right] \cdot \frac{H^{n-1}}{\omega^3} \right) - \overline{\frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2}} \cdot \frac{dd\omega}{dx^2} \cdot \frac{H^{n-1}}{\omega\omega}$$

&c.

partant

$$\omega' = \frac{H'}{\omega} - \left(1 + \frac{2d\omega}{dx}\right) \cdot \left(\frac{H''}{\omega\omega} - \left(1 + \frac{3d\omega}{dx}\right) \cdot \left[\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right]\right)$$

$$- \&c.$$

$$- \frac{3dd\omega}{dx^2} \left(\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right)$$

$$\omega'' = \frac{H''}{\omega} - \left(1 + \frac{3d\omega}{dx}\right) \cdot \left(\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right)$$

$$\omega''' = \frac{H'''}{\omega} - \&c.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans l' équation

$$H = \omega + \omega' + \omega' \frac{d\omega}{dx} + \omega'' \frac{dd\omega}{dx^2} + \&c.$$

& dans celle ci

$X = T + \omega' \cdot \frac{dT}{dx} \cdot + \&c.$ on formera les deux ſuivantes

$$0 = \omega - H + \left(1 + \frac{d\omega}{dx}\right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{H'}{\omega} - \left(1 + \frac{2d\omega}{dx}\right) \cdot \left[\frac{H''}{\omega\omega} - \right. \\ \qquad\qquad\qquad - \&c. \\ \left(1 + \frac{3d\omega}{dx}\right) \cdot \left[\frac{H''}{\omega^3} - \&c.\right] \\ - \frac{3\,dd\omega}{dx^2} \cdot \left[\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right] \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{dd\omega}{dx^2} \cdot \left(\frac{H''}{\omega} - \left(1 + \frac{3d\omega}{dx}\right) \cdot \left[\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right]\right)$$

$$+ \frac{d^3\omega}{dx^3} \cdot \left(\frac{H'''}{\omega} - \&c.\right)$$

. . . . (D)

$$+\frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}\cdot\frac{H^{n-1}}{\omega}$$

$$X = T + \frac{dT}{dx}\left\{\frac{H'}{\omega} - \left(1+\frac{2d\omega}{dx}\right)\cdot\left[\frac{H''}{\omega\omega} - \left(1+\frac{3d\omega}{dx}\right)\cdot\left[\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right] - \frac{3dd\omega}{dx^2}\cdot\left[\frac{H'''}{\omega^3} - \&c.\right]\right.\right\}$$

$$+\frac{ddT}{dx^2}\cdot\left(\frac{H'}{\omega} - \left(1+\frac{3d\omega}{dx}\right)\cdot\left[\frac{H''}{\omega^2} - \&c.\right]\right)$$

$$+\frac{d^3T}{dx^3}\cdot\left(\frac{H'''}{\omega} - \&c.\right)$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad (E)$$

$$+\frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}\cdot\frac{H^{n-1}}{\omega}$$

I I I.

Les équations (D) & (E) ſont d'un dégré inférieur à la propoſée, ainſi l'équation (A) peut toujours s'abbaiſſer à deux autres d'un dégré moindre d'une unité. Il n'eſt pas même néceſſaire de réſoudre généralement ces équations, il ſuffit de trouver dans l'équation (D) un nombre, n, de valeurs particulières pour, ω, qui ſatisfaſſent à cette équation différentielle

Soient, β, β', β'' &c., ces valeurs ou ces intégrales particulières, on les ſubſtituera ſucceſſivement dans l'équation (E), & l'on en formera par ce moyen un nombre, n, d'équations dont il ſuffira de trouver une intégrale particulière pour chacune; car β, β', β'' &c, étant les valeurs particulières de, ω; ſoient T, T', T'' &c., les valeurs particulières & correſpondantes de, T, on aura le nombre, n, d'équations ſuivantes,

$$\beta \frac{dy}{dx} + y = T$$

$$\beta' \frac{dy}{dx} + y = T$$

$$\beta'' \frac{dy}{dx} + y = T'$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\beta^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} + y = T^{n-1}$$

pourtant l'intégrale complette de l'équation (A), sera

$$y = e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \left(C + \int \frac{T dx}{\beta} \cdot e^{\int \frac{dx}{\beta}} \right)$$

$$+ e^{-\int \frac{dx}{\beta'}} \left(C' + \int \frac{T' dx}{\beta'} e^{\int \frac{dx}{\beta'}} \right) \quad (\tilde{a})$$

$$+ \text{\&c.}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ e^{-\int \frac{dx}{\beta^{n-1}}} \left(C^{n-1} + \int \frac{T^{n-1} dx}{\beta^{n-1}} e^{\int \frac{dx}{\beta^{n-1}}} \right),$$

e étant le nombre dont le logarithme hiperbolique, eſt l'unité.

IV.

Si l'on ſubſtitue dans l'équation (E), β, au lieu de, ω, elle deviendra

$$X = T + \frac{dT}{dx} \left[\frac{H'}{\beta} - \left(1 + \frac{2d\beta}{dx}\right) \cdot \left(\frac{H''}{\beta\beta} - \text{\&c.} \right) \right.$$

$$+ \frac{ddT}{dx^2} \cdot \left(\frac{H''}{\beta} - \text{\&c.} \right)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}} \cdot \frac{H^{n-1}}{\beta}$$

Si l'on ſuppoſe que $T = Z$, ſoit l'intégrale complette de cette équation, Z, alors renfermera un nombre, $n-1$, de conſtantes arbitraires, partant l'intégrale complette de l'équation (A) ſera

$$y = e^{-\int\frac{dx}{\beta}} \cdot \left(C + \int\frac{Z\,dx}{\beta} \cdot e^{\int\frac{dx}{\beta}} \right)$$

puiſque cette intégrale renferme un nombre, n, de conſtantes arbitraires.

V.

Si dans l'équation (A), $X = 0$, on peut ſuppoſer alors dans l'expreſſion ($\tilde{\omega}$) de, y, de l'art. III., $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ &c., & l'on aura

$$y = C\,e^{-\int\frac{dx}{\beta}} + C'\,e^{-\int\frac{dx}{\beta'}} \ldots\ldots + C^{n-1} \cdot e^{-\int\frac{dx}{\beta^{n-1}}}$$

& ſi l'on ſuppoſe que dans l'équation

$$0 = T + \frac{dT}{dx}\left(\frac{H'}{\beta} - \left(1 + \frac{2d\beta}{dx}\right) \cdot \left[\frac{H'}{\beta\beta} - \&c.\right]\right)$$
$$+ \frac{ddT}{dx^2} \cdot \left(\frac{H''}{\beta} - \&c.\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}} \cdot \frac{H^{n-1}}{\beta}$$

l'on ait pour intégrale complette

$T = A\,R + A'\,R' + A'' \cdot R'' \ldots\ldots + A^{n-2} \cdot R^{n-2}$

A, A', A'' étant des conſtantes arbitraires, & R, R', R'' &c. étant des intégrales particulières de l'équation précédente, l'expreſſion (ϖ) de, y, de l'art. précédent donne

$$y = C\,e^{-\int\frac{dx}{\beta}} + e^{-\int\frac{dx}{\beta}} \int\frac{AR}{\beta}\,dx\,e^{\int\frac{dx}{\beta}}$$

$+ e$

$$+ e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \int \frac{A' R' dx}{\beta} e^{\int \frac{dx}{\beta}}$$

$+$ &c.

. . . .

$$+ e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \cdot \int \frac{A^{n-2} \cdot R^{n-2} \cdot dx}{\beta} e^{\int \frac{dx}{\beta}}$$

en comparant cette expreſſion de, y, avec celle-ci

$$y = Ce^{-\int \frac{dx}{\beta}} + C' e^{-\int \frac{dx}{\beta'}} + C'' e^{-\int \frac{dx}{\beta''}} \ldots + C^{n-1} e^{-\int \frac{dx}{\beta^{n-1}}}$$

on formera les équations ſuivantes

$$e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \int \frac{A R dx}{\beta} \cdot e^{\int \frac{dx}{\beta}} = C' e^{-\int \frac{dx}{\beta'}}$$

$$e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \int \frac{A' R' dx}{\beta} \cdot e^{\int \frac{dx}{\beta}} = C'' e^{-\int \frac{dx}{\beta''}}$$

&c.

d'où l'on aura

$$A R = C' \cdot \frac{\beta' - \beta}{\beta'} \cdot e^{-\int \frac{dx}{\beta'}}$$

$$A' R' = C' \cdot \frac{\beta'' - \beta}{\beta''} \cdot e^{-\int \frac{dx}{\beta''}}$$

. . . .

$$A^{n-2} \cdot R^{n-2} = C^{n-1} \cdot \frac{\beta^{n-1} - \beta}{\beta^{n-1}} \cdot e^{-\int \frac{dx}{\beta^{n-1}}}$$

ſuppoſons maintenant que l'on ſâche intégrer l'équation (A) en y faiſant $X = 0$, & ſoient, $C u$, $C' u'$, $C'' u''$ &c. les valeurs particulières de y, qui ſatisfont à cette équation, enſorte que ſon intégrale complette ſoit

$$y = Cu + C'u' + C''u'' \;\ldots\; + C^{n-1}u^{n-1}$$

en la comparant avec celle-ci

$$y = Ce^{-\int\frac{dx}{\beta}} + C'e^{-\int\frac{dx}{\beta'}} + C''e^{-\int\frac{dx}{\beta''}} \ldots + C^{n-1}e^{-\int\frac{dx}{\beta^{n-1}}}$$

on aura

$$Cu = Ce^{-\int\frac{dx}{\beta}},\; C'u' = C'e^{-\int\frac{dx}{\beta'}} \;\&c.$$

d'où l'on conclura

$$\beta = -\frac{udx}{du},\; \beta' = -\frac{u'dx}{du'},\; \beta'' = -\frac{u''dx}{du''} \;\&c.$$

ces valeurs de β, β', β'' &c. satisferont consequemment pour, ω, dans l'équation (D), & l'on en conclura, AR, $A'R'$, $A''R''$ &c., & par conséquent si l'on sçait intégrer l'équation

$$o = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} \;\ldots\; + H^{n-1}\cdot\frac{d^ny}{dx^n}$$

on connoîtra 1° un nombre, n, de valeurs qui satisfont pour, ω, dans l'équation (D), 2° un nombre, $n-1$, de valeurs particulières pour, T, dans l'équation

$$+ \; o = T + \frac{dT}{dx}\left(\frac{H'}{\beta} - \&c.\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}\cdot\frac{H^{n-1}}{\beta}.$$

& partant on saura l'intégrer complettement

VI.

Maintenant si l'on sçait intégrer l'équation

$$X = T + \frac{dT}{dx}\left(\frac{H'}{\beta} - \&c.\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}} \cdot \frac{H^{n-1}}{\beta}$$

en ſuppoſant, Z, ſon intégrale complette, on aura par l'art. IV.

$$y = e^{-\int \frac{dx}{\beta}} \left(C + \int \frac{Z\,dx}{\beta}\, e^{\int \frac{dx}{\beta}} \right)$$

donc la difficulté d' intégrer l'équation

$$X = y + H \frac{dy}{dx} \;\ldots\ldots\; + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

lorſque l'on ſçait intégrer

$$o = y + H \frac{dy}{dx} \;\ldots\ldots\; + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

ſe réduit à intégrer celle-ci

$$X = T + \frac{dT}{dx} \left(\frac{H'}{\beta} - \&c. \right)$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad (\Delta)$$

$$+ \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}} \cdot \frac{H^{n-1}}{\beta}$$

du dégré, $n-1$, & que l'on ſçait intégrer, lorſqu'on ſuppoſe $X = o$, on fera pareillement, & par la même méthode dépendre la réſolution de celle-ci d'une autre du dégré, $n-2$, & ainſi de ſuite juſque à ce qu'on parvienne à une équation du dégré, $n-n$, ou purement algébrique ; d'où il réſulte que l' équation

$$X = y + H \frac{dy}{dx} \;\ldots\ldots\; + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

eſt intégrable dans les mêmes cas que celle-ci

$$o = y + H \frac{dy}{dx} \;\ldots\ldots\; + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

ce qui eſt le beau theoréme de M. de la Grange.

Si l'on ne connoiſſoit qu'un nombre, $n-1$, de valeurs particulières pour, y, dans cette dernière équation, ou ce qui revient au même de valeur particulière pour, ω, dans l'équation (D), l' intégration n'auroit pas plus de

difficulté, parceque au lieu de parvenir à une équation purement algébrique, on parviendroit à une équation du premier dégré de cette forme

$$X = S + Q \frac{dS}{dx}$$

équation que l'on ſçait réſoudre généralement, X. & Q. étant des fonctions de x.

V I I.

La méthode précédente ne nous fournit pas ſeulement la démonſtration du théoréme de M. de la Grange, elle nous conduit encore à trouver tout de ſuite l'expreſſion de, y, dans l'équation

$$X = y + H \frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} \quad (A)$$

lorſqu'on ſçait réſoudre celle-ci

$$0 = y + H \frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

car ſoient, comme précédemment, u, u', u'', &c., les valeurs particulières de, y, dans cette même équation, en ſorte que ſon intégrale complette ſoit

$$y = Cu + C'u' + C''u'' \quad . \; . \; . \; . \quad + C^{n-1} \cdot u^{n-1}$$

l'intégrale complette de l'équation (A) ſera par les art. précédents

$$y = u \left(C - \int \frac{Z\,du}{uu} \right)$$

Z, étant l'intégrale complette de, T, dans l'équation (Δ).

Si l'on nomme, $\bar{u}$, $\bar{u}'$, $\bar{u}''$, &c. les valeurs particulières de, T dans cette équation (Δ) en y ſuppoſant, $X = 0$, on aura pareillement

$$Z = \bar{u} \left(C - \int \frac{Z'\,d\bar{u}}{\bar{u}\,\bar{u}} \right)$$

on formera de même

$$Z' = \overset{=}{u} \left(C'' - \int \frac{Z''\, d\overset{=}{u}}{\overset{=}{u}\,\overset{=}{u}} \right)$$

$$\overset{\equiv}{} \left(\qquad \frac{Z'''\, d\overset{\doteq}{u}}{u \quad u} \right)$$

&c.

jusques à ce qu'enfin on parvienne à cette équation, $Z^{n-1} = X$. Cherchons maintenant les valeurs de, $\overline{u}$, $\overset{=}{u}$, $\overset{\equiv}{u}$, &c. or on a par l'art. v. $R = \overline{u} = \frac{\beta' - \beta}{\beta'}\, e^{-\int \frac{dx}{\beta'}}$ (en substituant au lieu de, β, & β' leurs valeurs,) $= u' - \frac{udu'}{du}$, où, $\overline{u}$, $= \frac{u'\,du - u\,du'}{du}$. pareillement

$$\overline{u'} = \frac{u''\,du - u\,du''}{du}$$

$$\overline{u''} = \frac{u'''du - u\,du'''}{du}$$

&c.

on formera de même

$$\overset{=}{u} = \frac{\overline{u'}\,d\overline{u} - \overline{u}\,d\overline{u'}}{d\overline{u}}$$

$$\overset{=}{u'} = \frac{\overline{u''}\,d\overline{u} - \overline{u}\,d\overline{u''}}{d\overline{u}}$$

&c.

$$\overset{\equiv}{u} = \frac{\overset{=}{u'}\,d\overset{=}{u} - \overset{=}{u}\,d\overset{=}{u'}}{d\overset{=}{u}}$$

$$\overset{\equiv}{u'} = \frac{\overset{=}{u''}\,d\overset{=}{u} - \overset{=}{u}\,d\overset{=}{u''}}{d\overset{=}{u}}$$

&c.

cela posé en substituant, on aura

$$y = u\left(C - \int\left[\frac{\overline{u}\,d\,u}{u\,u}\cdot\left[C' - \int\left[\frac{\overline{\overline{u}}\,d\,u}{\overline{u}\,\overline{u}}\cdot\left[C'' - \int\frac{\overline{\overline{\overline{u}}}\,d\,\overline{\overline{u}}}{\overline{\overline{u}}\,\overline{\overline{u}}}\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left[C''' \ldots - \int\left[\frac{\overset{n-1}{u}\,d\,\overset{n-2}{u}}{\overset{n-1}{u}\,\overset{n-2}{u}}\left[C^{n-1} - \int\frac{X\,d\,\overset{n-1}{u}}{\overset{n-1}{u}\,\overset{n-1}{u}}\right]\right.\right.\right\}(Z)$$

on peut donner à cette expression une forme plus simple, en considérant que

$$\frac{\overline{u}\,d\,u}{u\,u} = -\frac{u'\,d\,u - u\,d\,u'}{u\,u} = -\,d\left(\frac{u'}{u}\right)\text{ ; pareillement}$$

$$\frac{\overline{\overline{u}}\,d\,\overline{u}}{\overline{\overline{u}}\,\overline{u}} = -\,d\left(\frac{\overline{u}'}{\overline{u}}\right)\text{, \&c.}$$

la formule (Z) deviendra conséquemment

$$y = u\left[C + \int\left[d\left(\frac{u'}{u}\right)\cdot\left[C' + \int\left[d\left(\frac{\overline{u}'}{\overline{u}}\right)\cdot\left[C'' \ldots\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.+\int\left[d\left(\frac{\overset{n-2}{u}}{\overset{n-2}{u}}\right)\cdot\left[C^{n-1} - \int\frac{X\,d\,\overset{n-1}{u}}{\overset{n-1}{u}\,\overset{n-1}{u}}\right]\right.\right\}(Y)$$

& l' on aura

$$d\left(\frac{\bar{u'}}{u}\right) = d\cdot\left(\frac{d\left(\frac{u''}{u}\right)}{d\left(\frac{u'}{u}\right)}\right)$$

$$d\left(\frac{\bar{\bar{u'}}}{u}\right) = d\left\{\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{u'''}{u}\right)}{d\left(\frac{u''}{u}\right)}\right)}{d\left(\frac{d\left(\frac{u''}{u}\right)}{d\left(\frac{u'}{u}\right)}\right)}\right\}$$

&c.

Si l'on ne connoiffoit qu'un nombre, $n-1$, de valeurs particulières pour, y, dans l' équation

$$o = y + H\frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + H^{n-1}.\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

ou ce qui revient au même un nombre, $n-1$, de valeurs pour, ω, dans l'équation (D), alors on parviendroit, comme on peut s' en aflurer par l'art. précédent à l'équation fuivante.

$$X = Z^{n-2} + dZ^{n-2}.\ \frac{H^{n-1}}{-\frac{udx}{du}.-\frac{\bar{u}dx}{d\bar{u}}\ .\ .\ .\ .-\frac{\overset{n-2}{u}\,dx}{d\,\overset{n-2}{u}}}$$

au moyen de laquelle on aura facilement, Z^{n-2}, & l'on aura

$$y = u \left[C - \int \left(\frac{\bar{u}\, du}{uu} \cdot \left[C' \ldots\ldots\ldots - \int \frac{u^{n-2}\, d\, u^{n-3}}{u^{n-2}\, u^{n-2}} \right.\right.\right.$$

$$\left[C^{n-2} - \int \frac{Z^{n-2}\, d\, u^{n-2}}{u^{n-2}\, u^{n-2}} \right\} \quad \ldots \quad (X)$$

Remarque.

Nous obſerverons ici que ſi l'on connoit un nombre, $n-1$, de valeurs particulières pour, ω, dans l'équation (D), on ſçaura l' intégrer complettement; car au moyen de ces valeurs on aura par les art. précédentes l' intégrale complette de celle-ci,

$$o = y' + H \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

Suppoſons que cette intégrale complette de, y, ſoit comme ci-deſſus,

$$y = Cu + C'u' \quad \ldots\ldots + C^{n-1} \cdot u^{n-1}$$

& que la valeur complette de, ω, ſoit γ; γ, renfermera conſéquemment un nombre, $n-1$, de conſtantes arbitraires; mais nous aurons $\gamma \frac{dy}{dx} + y = o$ partant $y = Ae^{-\int \frac{dx}{\gamma}}$ & cette expreſſion ſera l' intégrale complette de, y, puiſqu'elle renferme un nombre, n, de conſtantes arbitraires; donc

A e

$$A e^{-\int \frac{dx}{\gamma}} = Cu + C'u' \quad . \quad . \quad . \quad + C^{n-1} \cdot u^{n-1}$$

d'où l' on conclura

$$\gamma = - \left(\frac{u + \frac{C'}{C} u' + \frac{C''}{C} u'' \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{C^{n-1}}{C} \cdot u^{n-1}}{\frac{du}{dx} + \frac{C'}{C} \cdot \frac{du'}{dx} \quad . \quad . \quad + \frac{C^{n-1}}{C} \cdot \frac{d\, u^{n-1}}{dx}} \right.$$

expreſſion qui renferme , $n-1$, conſtantes arbitraires

V I I I.

Reprénnons maintenant la formule

$$y = u \left[C + \int d \left(\frac{u'}{u} \right) \cdot \left[C' + \int \left[d \left(\frac{\overline{u}'}{\overline{u}} \right) \cdot \left[C'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \right.\right.\right.\right.$$

$$\left. + \int \left[d \left(\frac{u^{n-2}}{u^{n-2}} \right) \cdot \left[C^{n-1} - \int X d \left(\frac{1}{u^{n-1}} \right) \right.\right. \right\}$$

ſi l'on diviſe par , u , & que l'on différentie on aura

$$d \left(\frac{y}{u} \right) = d \left(\frac{u'}{u} \right) \cdot \left[C' + \int d \left(\frac{\overline{u}'}{\overline{u}} \right) \left[C'' \quad . \quad . \quad . \quad . \right.\right.$$

$$\left. + \int \left[d \left(\frac{u^{n-2}}{u^{n-2}} \right) \cdot \left[C^{n-1} - \int X \cdot d \left(\frac{1}{u^{n-1}} \right) \right.\right. \right\}$$

en divisant par $d\left(\frac{u'}{u}\right)$, & différentiant encor on aura

$$d\left\{\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{d\left(\frac{u'}{u}\right)}\right\} = d\left(\frac{\bar{u}'}{\bar{u}}\right)\cdot\left[C'' \;.\;.\;.\;. + \text{\&c.}\right]$$

en continuant d'opérer ainsi, on parviendra à une équation différentielle de cette forme

$$C^{n-1} + \int X\, d\left(\frac{1}{\overset{1}{\underset{u}{\approx}}}\right) = \gamma\, y + \gamma'\, \frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ \gamma^{n-1}.\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \quad (1)$$

γ, γ' &c., étant des fonctions de u, u', u'' &c., & de leurs différences on formera, $\overset{1}{\underset{u}{\approx}}$, par l'art. VII., & pour cela nous avons considéré dans cet art. les valeurs de, u, u' &c, dans cet ordre, u, u', u'', u''' . . . . u^{n-1}; mais si au lieu de donner a, u', le second rang, on l' eut mis au premier, & u au second dans l'ordre suivant, u', u, u'', u''' . . . . . u^{n-1}, alors on seroit parvenu à cette équation

$$C^{n-1} + \int X\, d\left(\frac{1}{\left(\boxed{\overset{1}{\underset{u}{\approx}}}\right)}\right) = \boxed{\gamma}\, y + \boxed{\gamma'}\, \frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ \boxed{\gamma^{n-1}}\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \quad (2)$$

$\boxed{\overset{1}{\underset{u}{\approx}}}$, $\boxed{\gamma}$, &c. étant ce que

deviennent, $\overset{n-1}{u}$, γ, &c. lors qu'on y change, u, en u', & réciproquement, u', en, u; or ſi l'on ſuppoſe, $X = 0$, les deux équations (1) & (2) deviennent

$$C^{n-1} = \gamma y + \gamma' \frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\;.\;.\; + \gamma^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$C^{n-1} = \overline{|\gamma|}\, y + \overline{|\gamma'|} \frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\;.\; + \overline{|\gamma^{n-1}|} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

partant, $\gamma y + \gamma' \frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\;.\; + \gamma^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \overline{|\gamma|} \cdot y$

$$+ \overline{|\gamma'|} \cdot \frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\; + \overline{|\gamma^{n-1}|} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \qquad (3)$$

équation qui doit être identique, car ſans cela, comme on a $y = Cu + C'u' \;.\;.\;.\;.\; + C^{n-1} \cdot u^{n-1}$ l'intégrale de l'équation (3), quoiqu'elle ſoit de l'ordre, $n-1$, renfermeroit un nombre, n, de conſtantes arbitraires, ce qui eſt abſurde. On aura donc en comparant les équations (1) & (2)

$$C^{n-1} + \int X d \left(\frac{1}{\overset{n-1}{u}}\right) = C^{n-1} + \int X d \left(\frac{1}{\boxed{\overset{n-1}{u}}}\right) \cdot \text{partant}$$

on aura, $\overset{n-1}{u} = \boxed{\overset{n-1}{u}}$ · ainſi l'expreſſion, $\overset{n-1}{u}$, reſtera la même, ſoit qu'on y change ou non, u', en u, & u, en u'. On prouvera de la même maniére qu'elle reſtera conſtamment la même, ſoit que l'on y change, u'', en, u', & u', en u''; u''', en u', & u', en u''', &c., & qu'en général, en formant, $\overset{n-1}{u}$, on peut ſans changer ſa valeur donner

à, u, u', u'' &c., tel ordre que l'on voudra, pourvu que l'on confidére, u^{n-1}, comme la dernière de ces quantités.

Soit maintenant $\dfrac{d\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right)}{dx}$ =, Z^{n-1}; foit, Z^{n-2}, ce que devient, Z^{n-1}, lorfqu'on y change, u^{n-1}, en, u^{n-2}, &, u^{n-2}, en, u^{n-1}; on aura par la même méthode qui nous a fait parvenir à l'équation (1),

$$C^{n-2} + \int X Z^{n-2}\, dx = \underline{\gamma}\, y + \underline{\gamma}'\, \frac{dy}{dx} \ldots + \gamma^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

$\underline{\gamma}$, $\underline{\gamma}'$, $\underline{\gamma}''$ &c. étant ce que deviennent, γ, γ' &c. lorfqu'on y change, u^{n-1}, en u^{n-2}, & réciproquement; on aura de même en traitant fucceffivement, u^{n-3}, u^{n-4}, &c., comme les dernières des quantités, u, u', &c.

$$C^{n-3} + \int X z^{n-3}\, dx = \underline{\underline{\gamma}}\, y + \underline{\underline{\gamma}}'\, \frac{dy}{dx} \ldots + \underline{\underline{\gamma}}^{n-1}\, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

&c.

en difpofant toutes ces équations dans l'ordre fuivant,

$$C^{n-1} + \int z^{n-1} X dx = \gamma y + \gamma' \frac{dy}{dx} \ldots\ldots + \gamma^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

$$C^{n-2} + \int z^{n-2} X dx = \underline{\gamma}\, y + \underline{\gamma}'\, \frac{dy}{dx} \ldots\ldots + \underline{\gamma}^{n-1}\, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

$$C^{n-3} + \int z^{n-3} X dx = \underline{\underline{\gamma}}'\, y + \underline{\underline{\gamma}}'\, \frac{dy}{dx} \ldots\ldots + \underline{\underline{\gamma}}^{n-1}\, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

$$C + \int z X dx = \gamma_{n-1}\, y + \gamma'_{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} \ldots\ldots + \gamma^{n-1}_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

& les ajoutant ensemble après avoir multiplié la première par, u^{n-1}, la seconde par, u^{n-2}, & ainsi de suite, on aura une équation de cette forme

$$\lambda y + \lambda' \frac{dy}{dx} \ldots\ldots + \lambda^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u\,(C + \int z\,X\,dx)$$
$$+ u'\,(C' + \int z'\,X\,dx)$$
$$+ u''\,(C'' + \int z''\,X\,dx)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u^{n-1}\,(C^{n-1} + \int z^{n-1}\,X\,dx)$$

Si l'on suppose, $X = 0$, on aura

$$\lambda y + \lambda' \frac{dy}{dx} \ldots + \lambda^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C u + C'u' + C''u'' \ldots + C^{n-1}\,u^{n-1}$$

mais on a, $y = C u + c' u' \ldots\ldots + c^{n-1}\,u^{n-1}$. donc

$$y = \lambda y + \lambda' \frac{dy}{dx} \ldots + \lambda^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

équation qui doit être identique, car sans cela, quoiqu' elle soit de l'ordre, $n - 1$, son intégrale renfermeroit un nombre n, de constantes arbitraires, ce qui est absurde, on aura donc

$$y = u\,(C + \int Z\,X\,dx)$$
$$+ u'\,(C' + \int Z'\,X\,dx)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u^{n-1}\,(C^{n-1} + \int z^{n-1}\,X\,dx)$$

de là résulte cette régle fort simple pour avoir l' intégrale complette de l' équation

$$X = y + H \frac{dy}{dx} + H' \frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

lorsqu'on sçait intégrer celle ci

$$0 = y + H \frac{dy}{dx} + H' \frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$$

soit $y = C u + C' u' + C'' u'' \ldots\ldots + C^{n-1}\,u^{n-1}$ l' intégrale de cette dernière, & que l'on fasse

$$\bar{u} = \frac{u' du - u du'}{du} \quad \bar{\bar{u}} = \frac{\bar{u}' d\bar{u} - \bar{u} d\bar{u}'}{d\bar{u}} \quad \bar{\bar{\bar{u}}} = \frac{\bar{\bar{u}}' d\bar{\bar{u}} - \bar{\bar{u}} d\bar{\bar{u}}'}{d\bar{\bar{u}}}$$

$$\bar{u}' = \frac{u'' du - u du''}{du} \quad \bar{\bar{u}}' = \frac{\bar{u}'' d\bar{u} - \bar{u} d\bar{u}''}{d\bar{u}} \quad \&c.$$

$$\bar{u}'' = \frac{u''' du - u du'''}{du} \qquad \&c.$$

&c.

& que l'on parvien ne à former ainsi, $\overset{n-1}{u}$ soit alors $d \left(\frac{1}{\overset{n-1}{u}} \right) = Z^{n-1}$. si dans l' expression de, Z^{n-1}, on

$$\frac{\left(\overset{n-1}{u} \right)}{dx}$$

change, u^{n-1}, en u^{n-2}, & réciproquement, on formera, Z^{n-2}; si dans la même expression de, Z^{n-1}, on change u^{n-1}, en u^{n-3}, & réciproquement on formera, Z^{n-3} &c., & ainsi de suite, je dis que l'intégrale complette de l' équation

$$X = y + H \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad + H^{n-1} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} \quad (A)$$

sera $y = u \left(C = \int Z X dx \right)$

$$+ u' \left(C' + \int Z' X dx \right)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ u^{n-1} \left(C^{n-1} + \int Z^{n-1} X dx \right.$$

I X.

Si l'on ſuppoſe maintenant dans l' équation (A), H, H' H'' &c. conſtants, on voit facilement que pour avoir un nombre, n, de valeurs particulières qui ſatisfaſſent pour, ω, dans l' équation (D) il ſuffit de ſuppoſer, ω, conſtant, & alors cette équation ſe changera dans celle-ci

$$o = \omega - H + \frac{H'}{\omega} - \frac{H''}{\omega^2} + \frac{H'''}{\omega^3} \ldots \pm \frac{H^{n-1}}{\omega^{n-1}}$$

en reſolvant cette dernière équation on aura un nombre, n, de valeurs pour, ω, au moyen deſquelles on intégrera facilement l' équation (A). Appliquons à ce cas la régle donnée dans l'art. précéd.

Soient pour cela, $-\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}$ &c. les racines de l'équation

$o = \omega - H + \frac{H'}{\omega} -$ &c., on aura $\beta = -\frac{1}{p} = -\frac{udx}{du}$ partant $u = e^{px}$, $u' = e^{p'x}$, $u'' = e^{p''x}$ &c. d'où l'on formera.

$$\bar{u} = e^{p'x}\left(\frac{p-p'}{p}\right) \quad \bar{\bar{u}} = e^{p''x}.\left(\frac{p-p''}{p}\right):\left(\frac{p'-p''}{p'}\right)$$

$$\bar{\bar{\bar{u}}} = e^{p'''x}\left(\frac{p-p'''}{p}\right).\left(\frac{p'-p'''}{p'}\right).\left(\frac{p''-p'''}{p''}\right)$$

$$\bar{u}' = e^{p''x}\left(\frac{p-p''}{p}\right). \quad \bar{\bar{u}}' = e^{p'''x}\left(\frac{p-p'''}{p}.\left(\frac{p'-p'''}{p'}\right)\right. \text{ \&c.}$$

$$\bar{u}'' = e^{p'''x}\left(\frac{p-p'''}{p}\right) \text{ \&c.}$$

&c.

donc $\overset{n-1}{u} = e^{p^{n-1}x}.\left(\frac{p-p^{n-1}}{p}\right).\left(\frac{p'-p^{n-1}}{p'}\right)\ldots\left(\frac{p^{n-2}-p^{n-1}}{p^{n-2}}\right.$

partant $Z^{n-1} = \frac{-p.p'.p''\ldots p^{n-1}}{(p-p^{n-1}).(p'-p^{n-1}).(p''-p^{n-1})\ldots(p^{n-2}-p^{n-1}.e^{p^{n-1}x}}$

d' où l'on conclurra

$$Z^{n-2} = \frac{-p \cdot p' \cdot p'' \ldots\ldots p^{n-1}}{(p-p^{n-2}) \cdot (p'-p^{n-2}) \ldots (p^{n-1}-p^{n-2}) \cdot e^{p^{n-2}x}}$$

. . . .

$$Z = \frac{-p \cdot p' \cdot p'' \ldots\ldots p^{n-1}}{(p'-p) \cdot (p''-p) \ldots (p^{n-1}-p)\; e^{px}}$$ partant

$$y = \frac{p \cdot p' \cdot p'' \ldots\ldots p^{n-1} \cdot e^{px}}{(p'-p)(p''-p)\ldots\ldots(p^{n-1}-p)} \left(A - \int \frac{Xdx}{e^{px}}\right)$$
$$+ \frac{p \cdot p' \cdot p'' \ldots\ldots p^{n-1} \cdot e^{p'x}}{(p-p')(p''-p') \cdot \&c.} \left(A' - \int \frac{Xdx}{e^{p'x}}\right)$$
$+$ &c.

ſuppoſons encor dans l' équation (A), $H = Ax$, $H' = A'\,x^2$, $H'' = A''\,x^3$ &c. il eſt facile d'apperçevoir qu' en ſuppoſant dans l'équation (D), $\omega = mx$, on ſatisfera à cette équation, & l'on aura en diviſant par, x,

$$0 = m - A + (1+m) \cdot \frac{A'}{m} - (1+m) \cdot (1+2m) \cdot \frac{A''}{mm} + (1+m)(1+2m)(1+3m) \cdot \frac{A'''}{m^3} - \&c.$$

en réſolvant cette équation, on aura un nombre, n, de valeurs pour, m, & par conſéquent un nombre, n, d'intégrales particulières de l'équation (D). Ce cas eſt aſſez connu pour nous diſpenſer d'entrer dans aucun détail à ſon égard. Cette méthode d' intégrer les équations de la forme

$$X = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} \;\ldots\ldots + H^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}$$

en cherchant un nombre n, ou $n-1$, d'intégrales particulières de l' équation (D) embraſſe donc tous les cas connus où l' intégration a reuſſi juſqu' à préſent, & il n'eſt pas douteux que l'on ne puiſſe par ſon moyen en découvrir de nouveaux, & de beaucoup plus étendus.

X.

X.

Si l'on ſuppoſe que l'équation (A) ne monte qu'au ſecond dégré, l'équation (D) deviendra

$$o = dx \cdot (H' - H\omega + \omega\omega) + H' d\omega \quad (o)$$

dont il ſuffira de trouver une ſeule intégrale particulière, pour intégrer l'équation

$$X = y + H\frac{dy}{dx} + H' \cdot \frac{ddy}{dx^2}.$$

car ſoit, β, cette intégrale en la ſubſtituant dans l'équation (E), on aura

$$X = T + \frac{dT}{dx} \cdot \frac{H'}{\beta}$$ d'où l'on conclura

$$T = e^{-\int\frac{\beta dx}{H'}} \cdot \left(A + \int\frac{\beta X dx}{H'} \cdot e^{\int\frac{\beta dx}{H'}}\right)$$

donc on aura par l'art. IV.

$$y = e^{-\int\frac{dx}{\beta}}\left(C + \int\left(\frac{e^{-\int\left[\frac{\beta dx}{H'} - \frac{dx}{\beta}\right]}}{\beta} \cdot \left(A + \int\frac{\beta X dx}{H'} e^{\int\frac{\beta dx}{H'}}\right)\right)\right)$$

ſi au lieu de connoître une valeur de, ω, on connoiſſoit une valeur particulière de, y, dans l'équation

$$o = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2}$$

ſoit, $y = A'u$, cette valeur, on aura $\omega = \beta, = -\frac{udx}{du}$, & l'on intégrera comme, ci-deſſus,

$$X = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2}$$

de là, & de la remarque que nous avons faite art. VII. réſultent les deux théorémes ſuivants.

L'équation, $o = dx(H' - H\omega + \omega\omega) + H'd\omega$ (o), eſt complettement intégrable, lorſque l'on en connoit une intégrale particulière.

L'équation de Riccati ſera donc intégrable toutefois que l'on en connoîtra une intégrale particulière, puiſque cette équation eſt compriſe dans la précédente, & plus généralement encore l'équation

$$o = dx\,(P + Qy + Ryy) + S\,dy$$

P, Q, R, S, étant des fonctions quelconques de, x, eſt intégrable, lorſque l'on connoit une ſeule valeur particulière qui ſatisfaſſe pour, y, dans cette équation; car en diviſant par, R, on aura

$$o = \frac{P}{R}\,dx + \frac{Q}{R}\,ydx + yydx + \frac{S}{R}\,dy$$

pour ramener cette équation à la formule (o) je le multiplie par, $\frac{P}{S}$, & je fais, $\frac{P}{S}\,dx = dz$, ce qui donne

$$o = \frac{P}{R}\,dz + \frac{Q}{R}\,ydz + yydz + \frac{P}{R}\,dy$$

P, Q, R, devenant alors des fonctions de z ſoit $\frac{P}{R} = H'$, & $\frac{Q}{R} = -H$, on aura,

$$o = dz\,(H' - Hy + yy) + H'\,dy;$$

équation qui eſt la même que l'équation (o).

L'équation $X = y + H\frac{dy}{dx} + H' \cdot \frac{ddy}{dx^2}$ (7)

eſt intégrable toutefois que $H = \omega + \frac{H'}{\omega}\left(1 + \frac{d\omega}{dx}\right)$.

Si nous ſuppoſons, $\omega = (m + nx + px^2 \ldots + hx^r)^q$, l'équation

$$X = y + \frac{dy}{dx}\,[(m + nx + px^2 \ldots\ldots + hx^r)^q$$
$$+ Q\,(1 + q\,(m + nx \ldots + hx^r)^{q-1}\,[n + 2px \ldots + hrx^{r-1})]$$

$$+ \frac{ddy}{dx^2} [Q (m + nx + px^2 \ldots . + hx^r)^q]$$

eſt intégrable quelque ſoit Q. On peut donc au moyen du théoréme précédent, trouver dans une infinité de cas l' intégrale de l'équation (7) quelque ſoit · Q · ſavoir en donnant à ω, une infinité de valeurs.

X I.

L' équation (D) deviendra pour le troiſième ordre

$$0 = \omega - H + [1 + \frac{d\omega}{dx}] \cdot \left(\frac{H'}{\omega} - (1 + \frac{2d\omega}{dx}) \cdot \frac{H''}{\omega\omega} \right)$$
$$+ \frac{dd\omega}{dx^2} \cdot \frac{H''}{\omega} \qquad (P)$$

dont il ſuffit de trouver deux intégrales particulières, pour avoir l' intégrale complette de celle ci

$$X = y + H \frac{dy}{dx} + H' \frac{ddy}{dx^2} + H'' \cdot \frac{d^3 y}{dx^3}$$

il ſeroit facile de trouver ainſi une infinité d'équations du troiſième ordre, & des ordres ſupérieurs intégrables, & de former ainſi pour chaque ordre de différentielles, une claſſe d'équations très-générales, & intégrables, mais je me contente d'en avoir donné la méthode.

X I I.

Application de la méthode précédente au calcul intégral aux différences finies.

Quoique le calcul intégral aux différences finies ſoit le fondement de toute la théorie des ſuites, cependant cette branche intéreſſante de l'analyſe eſt encore bien loin du point de perfection où l'on a porté les autres. Monſieur

Euler a donné à la verité dans ſes inſtitutions pluſieurs méthodes très-belles, & très-ingénieuſes pour intégrer une fonction différentielle aux différences finies & à une ſeule variable, mais l' intégration des équations différentielles eſt une partie abſolument neuve, ſi l'on en excepte un ou deux cas qui renferment la théorie des ſuites récurrentes, & l'excellent eſſai que M. le Marquis de Condorcet a donné ſur cette matière dans ſon calcul intégral (*). Je me ſuis donc ici propoſé de l'approfondir, en y appliquant la méthode dont j'ai fait uſage, ci-deſſus pour les différences infiniment petites; elle m'a conduit à trouver le terme général d'une claſſe de ſuites fort étendue, & dont les ſeries connües ne ſont que des cas particuliers, ainſi qu' à pluſieurs autres remarques qui m'ont paru importantes à faire voir, par ex:, que le beau théoréme de M. de la Grange ſuivant lequel l' équation

$$X = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} + \&c.$$

X, H, H' étant des fonctions quelconques de, x, eſt intégrable dans les mêmes cas que celle-ci

$$0 = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} + \&c.$$

a également lieu pour les différences finies, & à déterminer d'une manière fort ſimple l'intégrale de la première de ces équations, lorſque l'on connoit l' intégrale de la ſeconde.

(*) Lorſque j'écrivois ce-ci au mois du mars 1771 il n'avoit paru rien de plus ſur cette matière; depuis ce tems j'ai eu occaſion de voir un fort beau mémoire de M. le Marquis de Condorcet ſur les différences finies qui paroîtra dans le volume des mémoires de l'Académie des ſciences de France, pour l'année 1770 mais les recherches de cet illuſtre Géométre n'ont rien de commun avec les miennes. Si ce n'eſt qu'il obſerve pareillement que le théoréme de M. de la Grange a également lieu pour les différences finies.

XIII.

Pour nous former une idée précise des équations différentielles aux différences finies, concevons une suite

$$y' + y'' + y''' \ldots\ldots\ldots + y^x$$

formée suivant une loi telle que l'on ait constamment

$$X^x = M^x y^x + V^x \cdot \Delta \cdot y^x + p^x \cdot \Delta^2 y^x \ldots + S^x \Delta^n \cdot y^x \quad (A)$$

X^x, M^x, V^x &c. étant des fonctions quelconques de l'indice, x, dont la différence est supposée constante & égale à 1, & la caractéristique $\Delta \cdot$ désignant à la manière de M. Euler la différence finie d'une quantité. L'équation précédente sera une équation différentielle aux différences finies qui peut généralement représenter les équations de cette espéce ou la variable y^x, & ses différences sont sous une forme linéaire.

Quoique l'on puisse aisément former d'autres équations différentielles dans lesquelles par ex. y^x & ses différences seroient multipliées par elles mêmes, ou les unes par les autres, cependant celles qui sont comprises dans l'équation (A) sont les seules qu'il soit véritablement intéressant de bien connoître, parcequ'elles seules peuvent servir dans la théorie des suites; ainsi nous nous attacherons à les examiner avec soin.

XIV.

Plusieurs principes du calcul intégral aux différences infiniment petites, ont également lieu pour les différences finies, ainsi toutte fonction de x, par ex. qui satisfera pour y^x, dans l'équation (A) & qui renfermera un nombre n, de constantes arbitraires, en sera l'intégrale complette. Ce principe qui est de plus grand usage dans le calcul intégral aux différences infiniment petites, n'est pas d'un usage moins étendu, dans le calcul aux différences finies.

Par intégrale particulière d'une équation différentielle, j'entends comme précédemment toute fonction de x, qui ſubſtituée pour y^x, dans cette équation en faſſe évanouir tous les termes.

J'avertirai ici que pour la commodité du calcul je ſuppoſerai que H, $'H$, $''H$ &c. expriment des quantités différentes, & qui peuvent n'avoir aucun rapport entr'elles, au lieu que celle-ci, H, H', H'' &c. expriment comme à l'ordinaire ce que devient, H, lorſque l'indice augmente ſucceſſivement de 1, 2, 3, &c., & les ſuivantes, $H_{\backslash}$, $H_{\backslash\backslash}$, $H_{\backslash\backslash\backslash}$, &c. expriment ce que devient cette même quantité, H, lorſque l'indice diminue ſucceſſivement de 1, 2, 3 &c. cela poſé.

X V.

Comme on a

$$\Delta \cdot y^x = y^{x+1} - y^x$$
$$\Delta^2 y^x = y^{x+\text{II}} - 2y^{x+1} + y^x$$
$$\Delta^3 y^x = y^{x+\text{III}} - 3y^{x+\text{II}} + 3y^{x+1} - y^x$$
&c.

on peut metre l'équation (A) ſous cette forme

$$X^x = y^x\,(M^x - N^x + P^x - \text{\&c.}$$
$$+ y^{x+1}\,(N^x - 2\,P^x + \text{\&c.})$$
$$+ \text{\&c.} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$
$$+ y^{x+n} \cdot S^x.$$

on peut conſéquemment lui donner cette forme

$$X^x = y^x + H^x \cdot y^{x+1} + {'H^x} \cdot y^{x+\text{II}} + {''H^x} \cdot y^{x+\text{III}} \;.\;.\;.\;. + {}^{n-1}H^x\, y^{x+\text{II}} \qquad (B)$$

& cette équation repréſente généralement toute équation linéaire aux différences finies. L'équation,

$X^x = y^x + H^x\, y^{x+1}$. eſt du premier ordre; celle-ci

$X^x = y^x + H^x \cdot y^{x+1} + {'H^x}\, y^{x+\text{II}}$

est du second ordre, & ainsi de suite. Nous allons présentement résoudre les problémes suivants.

XVI.

PROBLÉME II.

Soit proposé d'intégrer l'équation du premier ordre

$$X^x = y^x + H^x y^{x+1}$$

Solution.

Je mets cette équation sous cette forme,

$y^{x+1} = -\frac{1}{H^x} \cdot y^x + \frac{X^x}{H^x} \cdot$ soit

$-\frac{1}{H^x} = R^x$, &, $\frac{X^x}{H^x} = Z^x$ · & l'on aura,

$$y^{x+1} = R^x y^x + Z^x$$

équation qu'il faut intégrer; or elle donne

$$y' = Ry + Z$$

$$y'' = R'y' + Z'$$

en substituant dans cette seconde équation, au lieu de, y', sa valeur tirée de la première, on aura

$$y'' = R'Ry + R'Z + Z'$$

donc, $y''' = R''R'y' + R''Z' + Z''$

en substituant toujours au lieu de, y', sa valeur, on aura

$$y''' = R'' \cdot R' \cdot Ry + R''R' \cdot Z + R''Z' + Z''$$

& $y^{\text{IV}} = R''' \cdot R'' \cdot R'y' + R''' \cdot R''Z' + R''' \cdot Z'' + Z'''$

pourtant

$$y^{IV} = R''' \cdot R'' \cdot R' \cdot R y + R''' \cdot R'' \cdot R' Z + R''' \cdot R'' Z' + R''' Z'' + Z'''$$

on aura pareillement

$$y^{V} = R^{IV} \cdot R''' \cdot R'' \cdot R' \cdot R y + R^{IV} \cdot R''' R'' R' Z + R^{IV} \cdot R''' \cdot R'' Z' + R^{IV} \cdot R''' Z'' + R^{IV} Z''' + Z^{IV}$$

& généralement

$$y^{x} = R^{x-1} \cdot R^{x-2} \cdot R^{x-3} \cdot R^{x-4} \ldots R y + R^{x-1} \cdot R^{x-2} \ldots R' Z + R^{x-1} \cdot R^{x-2} \ldots + R'' Z' + R^{x-1} \cdot R^{x-2} \ldots + R''' Z'' \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; + Z^{x-1}$$

ou en ſuppoſant, $y = A$

$$y^{x} = R \cdot R' \cdot R'' \ldots R^{x-1} \left(A + \frac{Z}{R} + \frac{Z'}{R \; R'} \ldots + \frac{Z^{x-1}}{R \cdot R' \ldots R^{x-1}} \right)$$

donc, $y^{x} = R \cdot R' \cdot R'' \ldots R^{x-1} \cdot \left(A + \Sigma \cdot \frac{Z^{x}}{R \, R' \ldots R^{x}} \right)$

le caractériſtique, Σ, déſignant l' intégrale aux différences finies. Pour plus de ſimplicité, je marquerai par, ∇R^{x-1}, le produit $R \cdot R' \ldots R^{x-1}$. Ce qui donne,

$y^{x} = \nabla \cdot R^{x-1} \left(A + \Sigma \cdot \frac{Z^{x}}{\nabla R^{x}} \right)$ d'où l' on conclura en ſubſtituant au lieu de, Z^{x}, & R^{x-1}, leurs valeurs

$$y^{x} = \frac{1}{\nabla (-H^{x-1})} \cdot \left(A + \Sigma \left[- X^{x} \Delta (- H^{x-1}) \right] \right)$$

ſi, H^{x}, eſt conſtant, & égal à $-\frac{1}{p}$ on aura

$$y^{x} = p^{x-1} \left(A - \Sigma \cdot \left[\frac{X^{x}}{p^{x-1}} \right] \right)$$

XVII.

X V I I.

PROBLÉME III.

Soit proposé d'intégrer l'équation différentio-différentielle $X^x = y^x + H^x \cdot y^{x+1} + {}'H^x \cdot y^{x+2} + {}''H^x \cdot y^{x+3}$ . . . . . . $+ {}^{n-1}H^x \cdot y^{x+n}$ (B).

Solution.

Je suppose que l'on ait, $\omega^x y^{x+1} + y^x = T^x$ (C)
& l'on formera les équations suivantes

$$\omega^{x+1} y^{x+II} + y^{x+1} + T^{x+1}$$
$$\omega^{x+II} y^{x+III} + y^{x+II} = T^{x+II}$$
$$\omega^{x+III} y^{x+4} + y^{x+3} = T^{x+3}$$
. . . . .
$$\omega^{x+n-1} y^{x+n} + y^{x+n-1} = T^{x+n-1}$$

je multiplie la première de ces équations par, $'\beta$, la seconde par, $''\beta$, la troisième par, $'''\beta$, &c., & je les ajoute avec l'équation (C) ce que donne

$$T^x + {}'\beta \cdot T^{x+1} + {}''\beta \cdot T^{x+II} + {}'''\beta \cdot T^{x+III} \quad \ldots\ldots$$
$$+ {}^{n-1}\beta \cdot T^{x+n-1} = y^x + (\omega^x + {}'\beta)\, y^{x+1} + ({}'\beta\, \omega^{x+1} + {}''\beta)\, y^{x+II}$$
$$+ ({}''\beta\, \omega^{x+II} + {}'''\beta)\, y^{x+3} + ({}'''\beta\, \omega^{x+III} + {}^{IV}\beta)\, y^{x+4} \ldots\ldots$$
$$+ ({}^{n-1}\beta\, \omega^{x+n-1})\, y^{x+n}$$

en comparant cette équation avec l'équation (B), on aura

1° $X^x = T^x + {}'\beta \cdot T^{x+1} = {}''\beta \cdot T^{x+II} \;..+ {}^{n-1}\beta \cdot T^{x+n-1}$

2° Les suivantes.

$$\omega^x + {}'\beta = H^x$$
$${}'\beta \cdot \omega^{x+1} + {}''\beta = {}'H^x$$
$${}''\beta\, \omega^{x+2} + {}'''\beta = {}''H^x$$
. . . . .
$${}^{n-1}\beta \cdot \omega^{x+n-1} = {}^{n-1}H^x$$

d'où l'on conclura

$'\beta = H^x - \omega^x$

$''\beta = 'H^x - H^x \omega^{x+1} + \omega^x \cdot \omega^{x+1}$

$'''\beta = ''H - 'H^x \cdot \omega^{x+2} + 'H^x \omega^{x+1} \cdot \omega^{x+2} - \omega^x \cdot \omega^{x+1} \cdot \omega^{x+2}$

&c.

. . . .

$$^{n-1}\beta = \pm (\omega^x \cdot \omega^{x+1} \ldots \omega^{x+n-2} - H^x \cdot \omega^{x+1} \ldots \omega^{x+n-2} + 'H^x \cdot \omega^{x+2} \ldots \omega^{x+n-2} - \&c.) = \frac{^{n-1}H^x}{\omega^{x+n-1}}$$

le ſigne, +, ayant lieu ſi, n, eſt impair, & le ſigne, —, ſi il eſt pair; on aura donc pour réſoudre le problême, les deux équations ſuivantes.

$$X^x = T^x + T^{x+1} (H^x - \omega^x) + T^{x+2} ('H^x - H\omega^{x+1} + \omega^x \cdot \omega^{x+1}) + \&c. \ldots + T^{x+n-1} \cdot \frac{^{n-1}H^x}{\omega^{x+n-1}} \quad (D)$$

$$0 = 1 - \frac{H^x}{\omega^x} + \frac{'H^x}{\omega^x \cdot \omega^{x+1}} - \frac{''H^x}{\omega^x \cdot \omega^{x+1} \omega^{x+2}} \cdots \pm \frac{^{n-1}H^x}{\omega^x \ldots \omega^{x+n-1}} \quad (E)$$

XVIII.

Les équations (D) & (E) ſont d'un dégré inférieur à la propoſée, & l'équation (D) eſt de la même forme; or il n'eſt pas néceſſaire de réſoudre généralement ces équations, il ſuffit de connoître un nombre, n, de valeurs qui ſatisfaſſe pour, ω^x, dans l'équation (E), car en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (D), on en formera un nombre, n, d'équations dont il ſuffira de trouver pour chacune une intégrale particulière. Soient V^x, $'V^x$, $''V^x$ &c. les valeurs particulières de, ω^x, & L^x, $'L^x$, $''L^x$ &c. les valeurs correſpondantes de, T^x, on aura

$$V^x y^{x+1} + y^x = L^x$$

$$'V^x y^{x+1} + y^x = 'L^x$$

$$''V^x y^{x+1} + y^x = ''L^x$$
&c.

& l' intégrale complette de l'équation (B) sera

$$y^x = \frac{1}{\nabla(-V^{x-1})}[A - \Sigma \cdot L^x \nabla(-V^{x-1})]$$

$$+ \frac{1}{\nabla(-'V^{x-1})} \cdot ['A - \Sigma \cdot 'L^x \nabla(-'V^{x-1})]$$

. . . .

$$+ \frac{1}{\nabla(-^{n-1}V^x)} \cdot [^{n-1}A - \Sigma \cdot {}^{n-1}L^x \nabla(-^{n-1}V^{x-1})]$$

puisque cette intégrale renferme un nombre, n, de constantes arbitraires

X I X.

Je suppose que $X = 0$, & l' intégrale complette de l'équation
$0 = y^x + H^x \cdot y^{x+1} + 'H^x y^{x+2} \ldots + {}^{n-1}H^x \cdot y^{x+n-2}$
sera

$$y^x = \frac{A}{\nabla(-V^{x-1})} + \frac{'A}{\nabla(-'V^{x-1})} \ldots + \frac{^{n-1}A}{\nabla(-^{n-1}V^{x-1})}$$

présentement si l'on substitue dans l'équation (D), V^x, au lieu de, ω^x, & que l'on suppose ensuite que l' intégrale complette de cette nouvelle équation que j'appelle (D'), soit lorsqu'on suppose, $X^x = 0$,
$T^x = C R^x + 'C 'R^x + ''C ''R^x \ldots\ldots + {}^{n-2}C^{r-2} R^x$
il est aisé de voir que puisque l'on a, $V^x y^{x+1} + y^x = T^x$
l' intégrale complette de l'équation
$0 = y^x + H^x y^{x+1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad + {}^{n-1}H^x y^{x+1}$

sera

$$y^x = \frac{1}{\nabla(-V^{x-1}}\begin{pmatrix} A - C\cdot\Sigma.[R^x \nabla(-V^{x-1})] \\ -'C\cdot\Sigma\cdot['R^x \nabla(-V^{x-1})] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -{}^{n-2}C\cdot\Sigma\cdot[{}^{n-2}R^x \nabla(-V^{x-1})] \end{pmatrix}$$

en comparant cette dernière intégrale avec la précedente, on aura

$$\frac{1}{\nabla(-V^{x-1}}\cdot\Sigma[R^x \nabla(-V^{x-1})] = \frac{1}{\nabla(-'V^{x-1}}$$

$$\frac{1}{\nabla(-V^{x-1}}\cdot\Sigma['R^x \nabla(-V^{x-1})] = \frac{1}{\nabla(-''V^{x-1}}$$

&c.

donc $R^x = \nabla\dfrac{\left(\dfrac{\nabla(-V^{x-1})}{\nabla(-'V^{x-1})}\right)}{\nabla(-V^{x-1})}$ $'R^x = \nabla\dfrac{\left(\dfrac{\nabla(-V^{x-1})}{\nabla(-''V^{x-1})}\right)}{\nabla(-V^{x-1})}$

&c.

donc ſi l'on ſçait réſoudre l'équation (B) en y ſuppoſant $X^x = 0$, on ſaura réſoudre l'équation (D') en y ſuppoſant pareillement $X^x = 0$. Soient alors, u, $'u$, $''u$, &c. les valeurs particulières de, y^x, dans l' équation (B), enſorte que ſon intégrale complette ſoit

$$y^x = Au + 'A'u + ''A''u \;.\;.\;.\;.\;. + {}^{n-1}A\cdot{}^{n-1}u$$

on aura, $u = \dfrac{1}{\nabla(-V^{x-1})}$, & l' intégrale de l'équation (D) en y ſuppoſant, $X^x = 0$ ſera

$$T^x = Cu\nabla\left(\frac{'u}{u}\right) + 'Cu\nabla\left(\frac{''u}{u} + ''Cu\nabla\left(\frac{'''u}{u} \;.\;.\;.\;.\;. + {}^{n-2}Cu\nabla\left(\frac{{}^{n-1}u}{u}\right)\right.\right.$$

maintenant ſi l'on ſçait intégrer l'équation (D') en y ſuppoſant X^x, quelconque on ſaura pareillement intégrer dans la même ſuppoſition l'équation (B). Car ſoit alors, Z^x, l' intégrale complette de, T^x, dans l'équation (D), on aura pour l' intégrale complette de, y^x, dans l'équation (B)

$$y^x = \frac{1}{\nabla(-V^{x-1})} \cdot [A - \Sigma \cdot (Z^x \nabla(-V^{x-1})]$$

puiſque cette intégrale renferme un nombre, n, de conſtantes arbitraires, donc la difficulté d' intégrer

$$X^x = y^x + {}'H^x y^{x+1} \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n}.$$

lorſqu'on ſçait intégrer celle-ci

$$0 = y^x + {}'H^x y^{x+1} \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n}$$

ſe réduit à intégrer l'équation

$$\begin{aligned} X^x = T^x &+ T^{x+1}(H^x - V^x) \\ &+ \&c. \\ &\ldots \quad (D') \\ &+ T^{x+n-1} \cdot \frac{{}^{n-1}H^x}{V^{x+n-1}} \end{aligned}$$

qui eſt du dégré, $n-1$, & que l'on ſçait réſoudre en y ſuppoſant $X^x = 0$; on fera pareillement dépendre la réſolution de celle-ci, de la réſolution d'une équation du dégré, $n-2$, & ainſi de ſuite; d'où il réſulte que l'équation

$$X^x = y^x + H^x y^{x+1} \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n}$$

eſt intégrable dans les mêmes cas que celle-ci

$$0 = y^x + H^x y^{x+1} \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n}$$

ce qui eſt le beau théoréme que M. de la Grange a trouvé pour les différences infiniment petites, & que la méthode précédente nous donne ainſi moyen d'étendre aux différences finies.

X X.

Cette méthode nous conduit encore plus loin, ſavoir à trouver tout de ſuite l'expreſſion générale de, y^x. Car, Z^x, étant l' intégrale complette de T^x dans l'équation (D'), ſoient comme ci-deſſus, u, $'u$, $''u$ &c. les valeurs particulières de, y^x, dans l'équation (B) lorſqu'on ſuppoſe $X^x = 0$ à cauſe de $\frac{1}{\nabla(-V^{x-1})} = u$, on aura $y^x = u\left(A - \Sigma \cdot \frac{Z}{u}\right)$ · pour l' intégrale complette de l'équation (B), X^x, étant quelconque. Si l'on nomme $\bar{u}$, $'\bar{u}$, $''\bar{u}$ &c. les valeurs particulières de, T^x, dans l' équation (D') lorſqu'on y ſuppoſe $X^x = 0$, on aura de la même manière

$$Z^x = \bar{u}\left('A - \Sigma \cdot \frac{'Z^x}{\bar{\bar{u}}}\right)$$

on aura ſemblablement

$$'Z^x = \bar{\bar{u}}\left(''A - \Sigma \cdot \frac{''Z}{\bar{\bar{\bar{u}}}}\right)$$

&c.

juſque à ce qu'enfin on parvienne à cette équation algébrique

$$^{n-1}Z = X^x$$

on aura donc en ſubſtituant.

$$y^x = u\left(A - \Sigma\left(\frac{\bar{u}}{u}\left('A - \left[\left(\frac{\bar{\bar{u}}}{\bar{u}} \cdot \left(''A - \Sigma\left(\frac{\bar{\bar{\bar{u}}}}{\bar{\bar{u}}} \cdot \right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left({}^{\prime\prime\prime}A \,\ldots\ldots - \Sigma \left\{ \frac{{}^{n-2|}u^{\,n-1}}{u^{\,n-2|}} \cdot \left({}^{n-1}A - \Sigma \frac{X^x}{u^{\,n-1|}} \right) \right\} \quad (K)$$

il faut préſentement déterminer, $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ &c. or on a par l'art. XVIII.

$$\bar{u} = u\,\Delta\left(\frac{{}'u}{u}\right),\ {}'\bar{u} = u\,\Delta\cdot\left(\frac{{}''u}{u}\right),\ {}''\bar{u} = u\,\Delta\left(\frac{{}'''u}{u}\right)\ \&c.$$

on aura de même

$$\bar{\bar{u}} = \bar{u}\,\Delta\left(\frac{{}'\bar{u}}{\bar{u}}\right)\ {}'\bar{\bar{u}} = \bar{u}\,\Delta\left(\frac{{}''\bar{u}}{\bar{u}}\right),\ {}''\bar{\bar{u}} = \bar{u}\,\Delta\left(\frac{{}'''\bar{u}}{\bar{u}}\right)\cdot\ \&c.$$

$$\bar{\bar{\bar{u}}} = \bar{\bar{u}}\,\Delta\left(\frac{{}'\bar{\bar{u}}}{\bar{\bar{u}}}\right)\cdot\ \&c.$$

& la formule (K) deviendra

$$y^x = u\left[\,A - \Sigma\left[\,\Delta\left(\frac{{}'u}{u}\right)\cdot\left[\,{}'A - \Sigma\left[\,\Delta\left(\frac{{}'\bar{u}}{\bar{u}}\right)\cdot\right.\right.\right.\right.$$

$$\left({}''A \,\ldots\ldots - \Sigma\left[\,\Delta \left\{ \frac{{}'u^{\,n-2|}}{u^{\,n-2|}} \cdot \left[\, {}^{n-1}A - \Sigma \frac{X^x}{u^{\,n-1|}} \right.\right\}\right.\right. \quad (o)$$

ſi l'on ne connoiſſoit qu'un nombre, $n-1$, de valeurs particulières dans l'équation, $o = y^x + H^x y^{x+1} + \&c.$

l' intégration n'auroit pas plus de difficulté ; car au lieu de parvenir comme précédemment à l'équation algébrique, $^{n-1} z^x = X^x$, on parviendroit a une équation de cette forme, $X^x = {}^{n-2} Z^x + S^x \cdot {}^{n-2} Z^{x+1}$ · équation que l'on ſçait intégrer par le ſeconde probléme.

Si au lieu de ſavoir réſoudre l'équation, $o = y^x + H^x y^{x+1} +$ &c., on connoiſſoit un nombre, n, ou, $n-1$, de valeurs pour, ω^x, dans l'équation (E), les formules précédentes ſerviroient également, car on a, $u = \frac{1}{\nabla(-V^{x-1})}$ $'u = \frac{1}{\nabla(-'V^{x-1})}$ &c.

X X I.

On peut encore ſimplifier la formule (o), en la mettant ſous cette forme.

$$y^x = Au + 'A'u + ''A''u \quad \ldots\ldots \quad + {}^{n-1}A\,{}^{n-1}u$$

$$\pm u\,\Sigma\left(\Delta\left(\frac{'u}{u}\right)\cdot\Sigma\left(\Delta\left(\frac{''u}{'u}\right)\ldots\ldots {}'\Sigma\frac{X^x}{{}^{n-1}u}\right)\right) \qquad (\sigma)$$

le ſigne, +, ayant lieu, ſi, n, eſt pair, & le ſigne, −, ſi il eſt impair: or concevons d'abord que l' équation différentielle (B) ne ſoit que de ſecond ordre, & nous aurons

$$y^x = Au + 'A'u + u\,\Sigma\left(\Delta\left(\frac{'u}{u}\right)\cdot\Sigma\frac{X^x}{'u}\right)\cdot \text{ or}$$

$$\Sigma\left(\Delta\left(\frac{'u}{u}\right)\cdot\Sigma\frac{X^x}{'u}\right) = \frac{'u}{u}\Sigma\cdot\frac{X^{x-1}}{'u} - \Sigma\frac{X^{x-1}}{u}\cdot\frac{'u}{u}\cdot$$

donc

donc

$$y^x = u\left(A - \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{\bar{u}_{,}} \cdot \frac{'u}{u}\right)$$

$$+ 'u\left('A + \Sigma\, \frac{X^{x-1}}{\bar{u}_{,}}\right)$$

mais on a, $\bar{u} = u\,\Delta\left(\frac{'u}{u}\right) = u \cdot \frac{'u'}{u'} - 'u$, en multipliant par, $\frac{u'}{'u'}$ on aura $\bar{u} \cdot \frac{u'}{'u'} = -\left('u \cdot \frac{u'}{'u'} - u\right)$.

partant si l'on fait, $\bar{u} = 'Z$ & que l'on appelle, Z, ce que devient, $\bar{u}$, lorsqu'on y change, $'u$, en u, & u en $'u$, on aura

$$y^x = u\left(A + \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{Z}\right)$$

$$+ 'u\left('A + \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{'Z}\right)$$

&

$$Z = 'u_{,}\,\Delta\left(\frac{u_{,}}{'u_{,}}\right)$$

$$'Z = u_{,}\,\Delta\left(\frac{'u_{,}}{u_{,}}\right)$$

j'observerai cependant qu'en intégrant différemment, on auroit une valeur de y^x, qui paroitroit différente, mais dont il est facile de reconnoître l'identité avec la précédente. Car on aura.

$$\Sigma\left(\Delta\left(\frac{'u}{u}\right) \cdot \Sigma\, \frac{X^x}{\bar{u}}\right) = \frac{'u}{u} \cdot \Sigma\, \frac{X^x}{\bar{u}} - \Sigma \cdot \frac{X^x}{\bar{u}} \cdot \frac{'u'}{u'} \,;$$

d'où l'on conclura facilement.

$$y^x = u\left(A + \Sigma \cdot \frac{X^x}{Z'}\right) + {}'u\left({}'A + \Sigma \cdot \frac{X^x}{{}'Z'}\right)$$

or il eſt aiſé de voir que cette expreſſion de $\cdot y^x \cdot$ eſt la même que la précedente, c'eſt-à-dire, que l'on a

$$\left.\begin{matrix} u\left(A + \Sigma \frac{X^x}{Z'}\right) \\ + {}'u\left({}'A + \Sigma \frac{X^x}{{}'Z'}\right) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} u\left(A + \Sigma \frac{X^{x-1}}{Z}\right) \\ + {}'u\left(A + \Sigma \frac{X^{x-1}}{{}'Z}\right) \end{matrix}\right.$$

ou ce qui revient au même que $\frac{u}{Z} = \frac{-{}'u}{{}'Z}$; ou que $\frac{u}{{}'u_,} \Delta \left(\frac{{}'u_,}{u_,}\right) = \frac{-{}'u}{u_,} \Delta \left(\frac{u_,}{{}'u_,}\right)$, ou enfin que, $\frac{{}'u}{{}'u_,} \frac{-u}{u_,} = \frac{-u}{u_,} + \frac{{}'u}{{}'u_,} \cdot$ ce qui eſt viſible.

Si l'on ſuppoſe préſentement que l'équation (B) ſoit du troiſième ordre, on aura,

$$y^x = Au + {}'A{}'u + {}''A{}''u - u\Sigma\left[\Delta\left(\frac{{}'u}{u}\right) \cdot \Sigma\left[\Delta\left(\frac{\overline{{}'u}}{\overset{=}{u}}\right) \cdot \Sigma \frac{X^x}{\overset{=}{u}}\right)\right.\right.$$

or $\Delta\left[\Delta\left(\frac{\overline{{}'u}}{\overset{=}{u}}\right) \cdot \Delta \frac{X^x}{\overset{=}{u}}\right) = \frac{\overline{{}'u}}{\overset{=}{u}} \Delta \cdot \frac{X^{x-1}}{\overset{=}{u}} - \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{\overset{=}{u}_,} \cdot \frac{\overline{{}'u}}{\overset{=}{u}} = \frac{\Delta\left(\frac{{}''u}{u}\right)}{\Delta\left(\frac{{}'u}{u}\right)} \cdot \Delta \frac{X^{x-1}}{\overset{=}{u}} - \Delta \cdot \frac{X^{x-1}}{\overset{=}{u}_,} ; \frac{\overline{{}'u}}{\overset{=}{u}}$;

partant $\Sigma\left[\Delta\left(\frac{{}'u}{u}\right)\Sigma\left[\Delta\left(\frac{\overline{{}'u}}{\overset{=}{u}}\right)\Sigma\frac{X^x}{\overset{=}{u}}\right) = \frac{{}''u}{u}\Sigma\frac{X^{x-11}}{\overset{\equiv}{u}_{,,}}\right.\right.$

$$-\frac{'u}{u}\Sigma\frac{X^{x-11}}{\overline{\overline{u_{''}}}}\cdot\frac{\overline{'u}}{u_{'}}+\Sigma\frac{X^{x-11}}{\overline{\overline{u_{''}}}}\left(\frac{\overline{'u}}{u_{'}}\cdot\frac{'u}{u}-\frac{''u}{u}\right)$$

donc $y^x = u\left(A-\Sigma\cdot\frac{X^{x-11}}{\overline{\overline{u_{''}}}}\cdot\left[\frac{\overline{'u}}{u_{'}}\cdot\frac{'u}{u}-\frac{''u}{u}\right]\right)$

$$+\,'u\left('A-\Sigma\cdot\frac{X^{x-11}}{\overline{\overline{u_{''}}}}\cdot\frac{\overline{'u_{'}}}{u_{'}}\right)$$

$$+\,''u\left(''A-\Sigma\,\frac{X^{x-11}}{\overline{\overline{u_{''}}}}\right.$$

en obſervant le même procédé, on aura la valeur de y^x, en ſuppoſant l'équation différentielle (B) de tel ordre que l'on voudra.

X X I I.

Mais voici une méthode fort ſimple pour conclure cette valeur de y^x reprenons pour cela la formule

$$y^x = u\left[A-\Sigma\left[\Delta\left(\frac{'u}{u}\right).\left['A-\Sigma\left[\Delta\left(\frac{\overline{'u}}{u}\right)\cdot\right.\right.\right.\right.$$

$$\left[''A\ldots\ldots-\Sigma\left[\Delta\left\{\frac{\overset{n-2}{'u}}{\underset{n-2}{u}}\right\}\cdot\left[{}^{n-1}A-\Sigma\cdot\frac{X^x}{\underset{n-1}{u}}\right\}\right.\right.\right.$$

en différentiant, on aura

$$-\Delta\left(\frac{y^x}{u}\right) = \Delta\left(\frac{'u}{u}\right)\cdot[\,'A - \Sigma[\,\Delta\left(\frac{'u}{u} - \&c.\right)$$

d'où l'on conclura en divifant par, $\Delta\left(\frac{'u}{u}\right)$ & différentiant

$$\Delta\left\{\frac{\Delta\left(\frac{y^x}{u}\right)}{\Delta\left(\frac{'u}{u}\right)}\right\} = \Delta\left(\frac{\overline{'u}}{u}\right)[\,''A - \&c.$$

on aura donc en continuant de différentier ainfi.

$$^{n-1}A - \Sigma\cdot\frac{X^x}{u^{n-1}} = \gamma^x\cdot y^x + {'\gamma^x}\cdot y^{x+1}\ldots + {^{n-1}\gamma^x}\cdot y^{x+n-1}$$

γ^x, $'\gamma^x$ &c. étant des fonctions de u, $'u$, $''u$ &c.

Si au lieu de u, on eut confideré, $'u$, comme la première des valeurs de y^x, de l'équation (B) lorfqu'on y fuppofe $X^x = 0$, & u, comme la feconde on auroit eu.

$$^{n-1}A - \Sigma\cdot\frac{X^x}{\boxed{u^{n-1}}} = \boxed{\gamma^x}\,y^x + \boxed{'\gamma^x}\,y^{x+1}\ldots + \boxed{^{n-1}\gamma^x}\cdot y^{x+n-1}$$

$\boxed{u^{n-1}}$, & $\boxed{\gamma^x}$ &c. étant ce que deviennent, u^{n-1} γ^x &c. lorfqu'on y fuppofe, u, & réciproquement: or fi l'on fuppofe $X^x = 0$, on aura

$$^{n-1}A = \gamma^x\,y^x + {'\gamma^x}\,y^{x+1}\ldots\ldots + {^{n-1}\gamma^x}\cdot y^{x+n-1}$$
$$^{n-1}A = \boxed{\gamma^x}\,y^x + \boxed{'\gamma^x}\,y^{x+1}\ldots\ldots + \boxed{^{n-1}\gamma^x}\,y^{x+n-1}$$

on aura donc

$$\gamma^x\, y^x\ {}'\gamma^x\, y^{x+1} \ldots\ldots + {}^{n-1}\gamma^x\, y^{x+n-1} = \boxed{\gamma^x}\, y^x \ldots\ldots + \boxed{{}^{n-1}\gamma^x}\, y^{x+n-1}$$

équation qui doit être identique, car ſi elle ne l'étoit pas, alors cette équation étant différentielle de l'ordre, $n-1$, auroit cependant pour intégrale complette,

$$y^x = A u \ldots\ldots + {}^{n-1}A \cdot {}^{n-1}u$$

qui renferme, n, conſtantes arbitraires, ce qui eſt abſurde · il faut donc que

$$ {}^{n-1}A - \Sigma \cdot \frac{X^x}{\overset{n-1}{u}} = {}^{n-1}A - \Sigma \cdot \frac{X^x}{\boxed{\overset{n-1}{u}}}$$

partant que, $\overset{n-1}{u}$, $= \boxed{\overset{n-1}{u}}$ · ainſi l'expreſſion, $\overset{n-1}{u}$ reſtera toujours la même, ſoit qu'on y change, u, en, $'u$ & $'u$, & $'u$ en u · il ſeroit facile d'établir de la même manière que ſi dans, $\overset{n-1}{u}$, on change, u, en $''u$, & $''u$, en u, ou, $'u$, en $''u$, & $''u$ en $'u$, ou, $'''u$, en $'u$, & $'u$, en $'''u$, &c., & généralement, ${}^k u$, en ${}^i u$, & ${}^i u$, en ${}^k u$, k, & i, étant moindre que, $n-1$, l'expreſſion, $\overset{n-1}{u}$, reſtera toujours la même, & qu'ainſi, quelque ordre que l'on donne aux valeurs, u, $'u$ &c. pour former, $\overset{n-1}{u}$, cette expreſſion reſtera conſtamment la même, pourvu que, ${}^{n-1}u$, ſoit toujours conſidérée comme la dernière de ces valeurs.

Soit maintenant, $\underset{u}{\frac{1}{z}} = {}^{n-1}z$, & concevons qu'après avoir traité, ${}^{n-1}u$, comme la dernière des valeurs u, $'u$, $''u$ &c. on regarde, ${}^{n-2}u$, comme cette dernière, soit, ${}^{n-2}z$, ce que devient, ${}^{n-1}z$, lorsqu'on y change, ${}^{n-2}u$, en ${}^{n-1}u$, & réciproquement on aura

$$- {}^{n-2}A - \Sigma \cdot \frac{X^x}{{}^{n-1}z} = \underline{\gamma}^x y^x \dots + {}^{n-1}\underline{\gamma}^x y^{x+n-1}$$

$\underline{\gamma}^x$ &c., étant ce que devient, γ^x, &c., lorsqu'on y change, ${}^{n-1}u$, eu ${}^{n-2}u$, & réciproquement je donne a, ${}^{n-2}A$, le signe, $-$, car la formule (o) donne, en y supposant $X^x = o$

$$y^x = Au - 'A'u \dots \mp {}^{n-2}A \cdot {}^{n-2}u \pm {}^{n-1}A \cdot {}^{n-1}u$$

le signe, $+$, ayant lieu si, n, est impair, & le signe, $-$, si il est pair, on aura de même.

$${}^{n-3}A - \Sigma \frac{X^x}{{}^{n-3}z} = \underline{\underline{\gamma}}^x y^x \dots + {}^{n-1}\underline{\underline{\gamma}}^x \cdot y^{x+n-1}$$

& ainsi de suite; en disposant toute ces équations dans l'ordre suivant,

$${}^{n-1}A - \Sigma \cdot \frac{X^x}{{}^{n-1}z} = \gamma^x y^x \dots + {}^{n-1}\gamma^x y^{x+n-1} \quad (4)$$

$$- {}^{n-2}A - \Sigma \cdot \frac{X^x}{{}^{n-2}z} = \underline{\gamma}^x y^x \dots + {}^{n-1}\underline{\gamma}^x \cdot y^{x+n-1} \quad (10)$$

$${}^{n-3}A + \Sigma \frac{X^x}{{}^{n-3}z} = \underline{\underline{\gamma}}^x y^x \dots + {}^{n-1}\underline{\underline{\gamma}}^x \cdot y^{x+n-1} \quad (7)$$

. . . .

$$\pm A - \Sigma \frac{X^x}{z} = \underset{\frac{1}{z}}{\underline{\gamma^x}} y^x \dots + {}^{n-1}\underset{\frac{1}{z}}{\underline{\gamma^x}} \cdot y^{x+n-1} \quad (15)$$

& les ajoutant ensemble après avoir multiplié la première par ${}^{n-1}u$, la seconde par ${}^{n-2}u$, &c., & la dernière par u, on aura une équation de cette forme

$$\lambda^x y^x \ldots . + {}^{n-1}\lambda^x . y^{x+n-1} = u\left(A \pm \Sigma . \frac{X^x}{z}\right)$$
$$+ {}'u\left(-{}'A \pm \Sigma . \frac{X^x}{{}'z}\right)$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$+ {}^{n-1}u\left(\mp A \pm \Sigma . \frac{X^x}{{}^{n-1}z}\right)$$

ce qui donne en y ſuppoſant, $X^x = 0$,

$$\lambda^x y^x \ldots + {}^{n-1}\lambda^x y^{x+n-1} = A u - {}'A {}'u \ldots \mp {}^{n-1}A . {}^{n-1}u$$

mais on a dans cette même ſuppoſition

$$y^x = A u - {}'A {}'u + {}''A {}''u \ldots \ldots \mp {}^{n-1}A {}^{n-1}u . \text{ partant}$$
$$y^x = \lambda^x y^x \ldots . + {}^{n-1}y^{x+n-1}$$

or cette équation doit être identique, autrement quoiqu'elle ſoit de l'ordre, $n-1$, comme on a

$$y^x = A u \ldots . + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u$$

ſon intégrale renfermeroit un nombre, n, de conſtantes arbitraires, ce qui eſt abſurde, on aura donc pour l'intégrale complette de l'équation (B), en changeant de ſigne, comme cela eſt permis les conſtantes arbitraires négatives

$$y^x = u\left(A \pm \Sigma . \frac{X^x}{z}\right)$$
$$+ {}'u\left({}'A \pm \Sigma . \frac{X^x}{z}\right) \quad (n)$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$+ {}^{n-1}u\left({}^{n-1}A \pm \Sigma . \frac{X}{{}^{n-1}z}\right)$$

le ſigne, $+$, ayant lieu ſi, n, eſt impair, & le ſigne, $-$, ſi il eſt pair ; reprenons maintenant les équations (4), (10), (7), (15) ; elles donnent

$${}^{n-1}A - \Sigma . \frac{X^{n-1}}{{}^{n-1}z_{,}} = \gamma^{x-1} \ldots . + {}^{n-1}\gamma^{x-1} . y^{x+n-2}$$

. . . .

$$\pm A - \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{z_{,}} = \frac{\gamma^{x-1}}{n-1} \cdot y^{x-1} \ldots + {}^{n-1}\gamma^{x-1} \cdot y^{x+n-2}$$

multipliant la première de ces équations par, ${}^{n-1}u$, la feconde par, ${}^{n-2}u$, & ainfi de fuite, on aura en les ajoutant une équation de cette forme

$$\lambda^{x} y^{x-1} \ldots + {}^{n-2}\lambda^{x} \cdot y^{x+n-2} = u\left(A \pm \Sigma \frac{X^{x-1}}{z}\right)$$
$$+ {}'u\left(-{}'A \pm \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{{}'z_{,}}\right)$$
$$+ \&c.$$

on aura donc en fuppofant, $X^{x} = 0$

$\lambda^{x} y^{x-1} \ldots + {}^{n-1}\lambda^{x} \cdot y^{x+n-2} = Au - {}'A\,{}'u +$ &c. donc

$\lambda^{x} \cdot y^{x-1} \ldots + {}^{n-1}\lambda^{x} \cdot y^{x+n-1} = y^{x} \cdot$

équation qui doit être identique · partant on aura, en changeant de figne les conftantes négatives

$$y^{x} = u\left(A \pm \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{z_{,}}\right)$$
$$+ {}'u\left({}'A \pm \Sigma \cdot \frac{X^{x-1}}{{}'z_{,}}\right)$$
$$+ \&c.$$

on trouvera pareillement

$$y^{x} = u\left(A \pm \Sigma \cdot \frac{X^{x-2}}{z_{,,}}\right)$$
$$+ {}'u\left({}'A \pm \Sigma . \frac{X^{x-2}}{{}'z_{,,}}\right)$$
$$+ \&c.$$

& ainfi de fuite, jufque à ce qu'on parvienne à cette dernière expreffion inclufivement

$$y^{x} = u\left(A \pm \Sigma \cdot \frac{X^{x-n+1}}{z_{n-1}}\right)$$
$$+ {}'u\left({}'A \pm \Sigma \cdot \frac{X^{x-n+1}}{{}'z_{n-1}}\right)$$
$$+ \&c.$$

&

& toutes ces expressions de, y^x, doivent être les mêmes, comme nous avons remarqué ci-dessus que celà avoit lieu pour les équations du second ordre; en comparant ensemble ces expressions, on formera les équations suivantes

$$\frac{u}{z_{,}} + \frac{'u}{'z_{,}} + \frac{''u}{''z_{,}} \ldots\ldots + \frac{{}^{n-1}u}{{}^{n-1}z_{,}} = 0$$

$$\frac{u}{z_{,,}} + \frac{'u}{'z_{,,}} \ldots\ldots + \frac{{}^{n-1}u}{{}^{n-1}z_{,,}} = 0$$

. . . .

$$\frac{u}{z_{n-1}} + \frac{'u}{'z_{n-1}} \ldots\ldots + \frac{{}^{n-1}u}{{}^{n-1}z_{n-1}} = 0$$

XXIII.

Reprenons maintenant l' équation (E), laquelle est

$$0 = 1 - \frac{H^x}{\omega^x} + \frac{'H^x}{\omega^x \cdot \omega^{x+1}} - \frac{''H^x}{\omega^x \cdot \omega^{x+1}\,\omega^{x+11}} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{{}^{n-1}H^x}{\omega^x \ldots\ldots \omega^{x+n-1}} \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

supposons

$$H^x = C \cdot \varphi^x$$
$$'H^x = 'C \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x+1}$$
$$''H^x = ''C \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x+1} \cdot \varphi^{x+11}$$
&c.

C, $'C$, $''C$ &c. étant des constantes quelconques, & φ^x, une fonction quelconque de, x, alors l'équation

$$X^x \cdot = y^x + C \cdot \varphi^x \cdot y^{x+1} + 'C \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x+1}\, y^{x+11} + ''C \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x+1} \cdot \varphi^{x+11} \cdot y^{x+111} + \&c. \ldots\ldots + {}^{n-1}C \cdot \varphi^x \ldots\ldots \varphi^{x+n-1}\, y^{x+n} \quad (F)$$

sera intégrable; car si l'on suppose dans l'équation (E), $\omega^x = a \cdot \varphi^x$, a, étant constant, elle deviendra

$$0 = 1 - \frac{C}{a} + \frac{'C}{aa} - \frac{''C}{a^3} \ldots\ldots \pm \frac{{}^{n-1}C}{a^n}$$

d'où l'on aura un nombre, n, de valeurs pour, a, & par conſéquent pour, ω^x, à cauſe de $\omega^x = a \cdot \varphi^x$
on peut mettre la formule (F) ſous cette forme

$$y^{x+n} = -\frac{{}^{n-2}C}{{}^{n-1}C} \frac{y^{x+n-1}}{\varphi^{x+n-1}} - \frac{{}^{n-3}C}{{}^{n-1}C} \cdot \frac{y^{x+n-2}}{\varphi^{x+n-1} \cdot \varphi^{x+n-2}} + \&c.$$

$$+ \frac{X^x}{{}^{n-1}C \cdot \varphi^x \ldots \varphi^{x+n-1}}$$

& par conſéquent ſous celle-ci qui eſt plus ſimple

$$y^x = A \cdot \varphi^x \cdot y^{x-1} + {}'A \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x-1} \cdot y^{x-2} + {}''A \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x-1} \cdot \varphi^{x-2} \cdot y^{x-3} + \&c. + X^x \quad (H)$$

cette formule dont on peut trouver le terme général par les art. précéd. eſt beaucoup plus étendue qu'aucune de celles que les géométres ont examinées juſques ici; car ſi, φ^x, $= 1$, ce qui en eſt le cas le plus ſimple, alors elle ſe change en celle-ci.

$$y^x = A\, y^{x-1} + {}'A \cdot y^{x-11} + {}''A\, y^{x-111} \ldots + X^x$$

ce qui eſt, comme l'on ſait, l'expreſſion générale des ſuites recurrentes.

X X I V.

Parmi le nombre infini de ſeries que nous offre la formule (H), nous choiſirons en premier lieu celles, dans leſquelles on a $\varphi^x = x$, & nous conſidérerons les ſeries formées ſuivant cette loi

$$y^x = A^x \cdot y^{x-1} + {}'A \cdot x \cdot \overline{x-1}\, y^{x-2} \ldots\ldots + X^x$$

en y ſuppoſant d'abord, $X^x = 0$; on verra dans la ſuite que les recherches que nous allons faire ſur cette formule s'étendent facilement au cas, où l'on auroit φ^x, égal à une fonction quelconque de $\cdot\, x$.

examinons présentement cette équation lorsqu'elle ne monte qu'au second ordre, elle devient alors

$$y^x = Ax \cdot y^{x-1} + 'A \cdot x \cdot \overline{x-1} \cdot y^{x-11}$$

pour donner un exemple d'une serie formée suivant cette loi, supposons $A = 2$, & $'A = 3$, & l'on aura, $y^x = 2x \cdot y^{x-1} + 3x \cdot \overline{x-1} \cdot y^{x-11}$, d'où l'on formera la suite, 1, 4, 42, 480, 7320, 131040, &c. cherchons maintenant la valeur de, y^x, dans l'équation différentielle $y^x = Ax \cdot y^{x-1} + 'Ax \cdot \overline{x-1} \cdot y^{x-11}$, je la mets sous cette forme

$$o = y^x + \frac{A}{A' \cdot \overline{x+1}} y^{x+1} - \frac{y^{x+11}}{'A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2}}:$$

en la comparant avec l'équation (B) du probléme 11; on aura,

$$X^x = o,\ H^x = \frac{A}{'A \cdot \overline{x+1}},\ 'H^x = \frac{-1}{'A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2}}$$

& l'équation (E) donnera,

$$o = 1 \frac{-A}{'A \cdot \overline{x+1} \cdot \omega^x} \frac{-1}{'A\ \overline{x+1} \cdot \overline{x+2} \cdot \omega^x \cdot \omega^{x+1}}$$

je suppose $\omega^x = \frac{1}{a \cdot \overline{x+1}}$, & l'on aura, $o = \frac{-Aa}{'A} \frac{-a^2}{'A}$ ou $'A = Aa + a^2$ · partant $a = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{'A + \frac{1}{4}A^2}$ soient exprimées par, $-p$, & $-'p$ ces deux valeurs de, a; on aura donc par ce qui précéde, $y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x\ (B\ p^x + 'B \cdot 'B^x)$,
c'est le terme général de cette nouvelle espéce de suite, lorsque l'équation différentielle ne passe pas le second ordre.

Pour déterminer B, & $'B$, il faut ſuppoſer que les deux premiers termes de la ſuite ſont donnés; ſoient M, & $'M$, ces deux termes, & l'on aura

$$M = Bp + 'B'p$$
$$'M = {}^2Bp^2 + 2\,'B'p^2$$

donc $B = \frac{'M - 2M'p}{2p(p-'p)}$; $'B = \frac{'M - 2Mp}{2'p('p-p)}$. partant

$$y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x \cdot \left(\frac{'M-2M'p}{2p(p-'p)}\right) \cdot p^x + \frac{'M-2Mp}{2'p('p-p)} \cdot p^x \quad (\lambda)$$

ſi l'on avoit $p = 'p$, c'eſt-à-dire, ſi les deux racines de l'équation $'A = Aa + a^2$, étoient égales, on feroit $'p = p + dp$, d'ou l'on conclura facilement

$$y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x \cdot p^{x-1}\left[\frac{4Mp-'M}{2p} + \left(\frac{'M-2Mp}{2p}\right)x\right] (\lambda)$$

pour appliquer les formules précédentes à un exemple, ſoit comme ci-deſſus $A = 1$, $'A = 3$, on aura $A = -1 + 2$, donc $p = -1$, & $'p = -3$: ſuppoſons que les deux premiers termes de la ſerie ſoient 1, & 4, enſorte que $M = 1$ & $'M = 4$. on aura donc $B = -\frac{1}{4}$ $'B = \frac{1}{4}$ partant la formule (λ) donnera $y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots x \cdot \frac{1}{4}(3^x \pm 1)$, le ſigne, $+$, ayant lieu ſi, x, eſt impair, & le ſigne, $-$, ſi il eſt pair. Si l'on veut avoir par ex. le cinquième terme de la ſerie, on aura, $y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,5\,(3^5 + 1) = 7320$ comme précédemment.

X X V.

Suppoſons préſentement que l'on ait à reſoudre l'équation différentielle du troiſième ordre.

$$y^x = Ax \cdot y^{x-1} + 'Ax \cdot \overline{x-1} \cdot y^{x-2} + ''Ax \cdot \overline{x-1} \cdot$$

$\overline{x-2} \cdot y^{x-3}$ je la mets sous cette forme

$$0 = y^x + \frac{'A \cdot}{''A \cdot \overline{x-1}} \cdot y^{x+1} \quad \frac{+\, ''A}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2}}\, y^{x+11}$$

$$\frac{-\, y^{x+111}}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2} \cdot \overline{x+3}}$$

en comparant avec l'équation (B) du probléme ·11· on aura,

$$X^x = 0,\ H^x = \frac{'A}{''A \cdot \overline{x+1}},\ 'H^x = \frac{A}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2}}$$

$$''H^x = \frac{-1}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2} \cdot \overline{x+3}}.$$

& l'équation (E) donnera

$$0 = 1 - \frac{'A}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \omega^x} + \frac{A}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2}\, \omega^x \cdot \omega^{x+1}}$$

$$+ \frac{1}{''A \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2} \cdot \overline{x+3}\, \omega^x \cdot \omega^{x+1} \cdot \omega^{x+11}}$$

je suppose $\omega^x = \frac{1}{a \cdot \overline{x+1}}$, & l'on aura,

$0 = ''A - 'A\,a + A\,a^2 + a^3$ soient, $-p$, $-'p$, $-''p$, les trois valeurs de, a, & l'on aura

$y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \;.\;.\;.\; x \;(B\,p^x + 'B \cdot 'p^x + ''B \cdot ''p^x)$

soient M, $'M$, $''M$, les trois premiers termes de la serie, on aura pour déterminer le constante B, $'B$ $''B$, les trois équations

$$M = B\,p + 'B\,'p + ''B\,''p$$

$$\frac{'M}{1 \cdot 2} = B\,p^2 + 'B\,'p^2 + ''B\,''p^2$$

$$\frac{''M}{1 \cdot 2 \cdot 3} = B\,p^3 + 'B\,'p^3 + ''B\,''p^3$$

XXVI.

Delà nous pouvons nous élever à des considérations plus générales, car si l'on examine attentivement le procédé de l'art. précéd., il est facile de voir que si l'on a généralement

$$y^x = A \cdot x \cdot y^{x-1} + {}'A \cdot x \cdot \overline{x-1}\, y^{x-2} + \&c. \dots\dots$$

$$+ {}^{n-1}A\, x \dots\dots \overline{x-n+1} \cdot y^{x-n}$$ on aura

$$y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots x\, (B p^x + {}'B\, {}'p^x \dots\dots + {}^{n-1}B \cdot {}^{n-1}p^x) \quad \dots\dots \quad (\gamma)$$

$-p$, $-{}'p$, $-{}''p$ &c. étant les racines de, a, dans l' équation

$$0 = {}^{n-1}A - {}^{n-2}A\, a + {}^{n-3}A\, a^2 \dots\dots \mp A\, a^{n-1} \pm a^n$$

le signe, $+$, ayant lieu si, n, est impair, & le signe, $-$, si il est pair, or si M, $'M$, $''M$, &c. sont les premiers termes de la serie, on aura pour déterminer les constantes, B, $'B$, $''B$ &c. le nombre, n, d'équations suivantes

$$M = B p + {}'B\, {}'p + {}''B\, {}''p \dots\dots + {}^{n-1}B \cdot {}^{n-1}p$$

$$\frac{'M}{1 \cdot 2} = B p^2 + {}'B\, {}'p^2 + {}''B\, {}''p^2 \dots\dots + {}^{n-1}B \cdot {}^{n-1}p^2$$

$$\frac{''M}{1 \cdot 2 \cdot 3} = B p^3 + {}'B\, {}'p^3 + {}''B\, {}''p^3 \dots\dots + {}^{n-1}B \cdot {}^{n-1}p^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{^{n-1}M}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = B p^n + {}'B\, {}'p^n + {}''B\, {}''p^n \dots + {}^{n-1}B \cdot {}^{n-1}p^n$$

pour résoudre ces équations on peut se servir des méthodes ordinaires d'élimination, mais en voici une qui me paroit plus commode & plus simple.

Je multiplie la première équation par, ${}^{n-1}p$, & je la retranche de la seconde, je multiplie pareillement la seconde par, ${}^{n-1}p$, & je la retranche de la troisième, & ainsi

de ſuite, ce qui produit les équations ſuivantes

$$\frac{'M}{1 \cdot 2} - M \cdot {}^{n-1}p = B\,p \cdot (p - {}^{n-1}p) + {}'B\,{}'p \cdot$$
$$({}'p - {}^{n-1}p) \ldots + {}^{n-2}B\,{}^{n-2}p\,({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

$$\frac{''M}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{-'M \cdot}{1 \cdot 2}\,{}^{n-1}p = B\,p^2\,(p - {}^{n-1}p) + {}'B\,{}'p^2$$
$$({}'p - {}^{n-1}p) \ldots + {}^{n-2}B \cdot {}^{n-2}p^2\,({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

. . . .

$$\frac{{}^{n-1}M}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{-{}^{n-2}M}{1 \cdot 2 \ldots n-1} \cdot {}^{n-1}p = B \cdot p^{n-1}\,(p - {}^{n-1}p) \ldots$$
$$+ {}^{n-2}B \cdot {}^{n-2}p^{n-1}\,({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

je multiplie encore la première de ces équations par ${}^{n-2}p$, & je la retranche de la ſeconde, je multiplie ſemblablement la ſeconde par ${}^{n-2}p$, & je la retranche de la troiſième, & ainſi de ſuite, ce qui donne

$$\frac{''M}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{-'M}{1 \cdot 2}\,({}^{n-1}p + {}^{n-2}p) + M \cdot {}^{n-1}p \cdot {}^{n-2}p$$
$$= B\,p \cdot (p - {}^{n-2}p) \cdot (p - {}^{n-1}p)$$
$$+ {}'B\,{}'p\,({}'p - {}^{n-2}p) \cdot ({}'p - {}^{n-1}p)$$

. . . .

$$+ {}^{n-3}B \cdot {}^{n-3}p\,({}^{n-3}p - {}^{n-2}p) \cdot ({}^{n-3}p - {}^{n-1}p)$$

$$\frac{'''M}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{''M}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,({}^{n-1}p + {}^{n-2}p) + \frac{'M}{1\,2} \cdot {}^{n-1}p \cdot {}^{n-2}p$$
$$= B\,p^2\,(p - {}^{n-2}p) \cdot (p - {}^{n-1}p)$$
$$+ {}'B\,{}'p^2\,({}'p - {}^{n-2}p) \cdot ({}'p - {}^{n-1}p)$$
$$+ {}^{n-3}B \cdot {}^{n-3}p\,({}^{n-3}p - {}^{n-2}p) \cdot ({}^{n-3}p - {}^{n-1}p)$$

&c.

en opérant ſur ces dernières équations comme ſur les précédentes, on aura

$$\frac{'''M}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{''M}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,({}^{n-1}p + {}^{n-2}p + {}^{n-3}p)$$
$$+ \frac{'M}{1 \cdot 2}\,[({}^{n-2}p + {}^{n-1}p) \cdot {}^{n-3}p + {}^{n-1}p \cdot {}^{n-2}p]$$

$- M \cdot {}^{n-1}p \cdot {}^{n-2}p \cdot {}^{n-3}p = Bp\ (p - {}^{n-1}p) \cdot (p - {}^{n-2}p) \cdot (p - {}^{n-3}p)$
$+$ &c.

d'où il eſt aiſé de voir que ſi l'on nomme, f, la ſomme de toutes les racines, $'p$, $''p$, &c. à l'exception de p,
h, la ſomme de leur produits deux à deux,
l, la ſomme de leur produits trois à trois,
q, la ſomme de leur produits quatre à quatre
&c.
$'f$, la ſomme de toutes les racines p, $''p$, &c. à l'exception de $'p$,
$'h$, la ſomme de leurs produits deux à deux
&c.
$''f$, la ſomme de toutes les racines, p, $'p$, $'''p$, à l'exception de $''p$
&c.
on aura,

$$B = \frac{{}^{n-1}M - n f\, {}^{n-2}M + n \cdot \overline{n-1}\, h \cdot {}^{n-3}M - n\, \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}\, l \cdot {}^{n-4}M + \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot p \cdot (p - {}'p)\,(p - {}''p)\,(p - {}'''p) \cdot \&c.}$$

$$'B = \frac{{}^{n-1}M - n'f\, {}^{n-2}M + n\, \overline{n-1}\, {}'h\, {}^{n-3}M - n \cdot \overline{n-1}\ \overline{n-2} \cdot {}'l\, {}^{n-4}M + \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n'p\, ({}'p - p)\,({}'p - {}''p) \cdot ({}'p - {}'''p \cdot \&c.}$$

&c.

ſoit pour abreger, $\dfrac{{}^{n-1}M - n f\, {}^{n-2}M + n\ \overline{n-1} \cdot h\, {}^{n-3}M - \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = N$

$$\frac{{}^{n-1}M - n'f \cdot {}^{n-2}M + \&c.}{1 \cdot 2 \ldots n} = {}'N$$

&c.

on aura donc

$$y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{N}{(p - {}'p)\,(p - {}''p)\,(- {}'''p) \cdot \&c.} \cdot p^{x-1} \\ + \dfrac{'N}{({}'p - p)\,({}'p - {}''p)\,({}'p - {}'''p) \cdot \&c.} \cdot {}'p^{x-1} \\ + \&c. \end{array} \right\} (\tilde{\omega})$$

les quantites f, h; l, q, peuvent ſe déterminer fort aiſément de la manière ſuivante.

Soit repriſe l'équation de cet art.

$$o = a^n + A \cdot a^{n-1} - 'A \cdot a^{n-2} + ''A \cdot a^{n-3} \ldots \pm {}^{n-1}A$$

je le diviſe par $a + p$ ce qui donne

$$\begin{aligned} o = a^{n-1} &+ a^{n-2}\,(A - p) \\ &- a^{n-3}\,('A + Ap - pp) \\ &+ a^{n-4}\,(''A + 'Ap + Ap^2 - p^3) \\ &- \&c. \end{aligned}$$

d'où il eſt facile de conclure

$$\begin{aligned} f &= A - p, \\ h &= -\,('A + Ap - pp) \\ l &= ''A + 'Ap + Ap^2 - p^3 \\ &\&c. \\ 'f &= A - 'p \\ 'h &= -\,('A + A'p - 'p^2) \\ &\&c. \end{aligned}$$

XXVII.

Si l'on avoit $p = 'p$ on auroit $N = 'N$; ſoit alors $'p = p + dp$, & $\frac{1}{(p-''p)\,(p-'''p)\cdot \&c.} = Q$, on aura $\frac{'N}{('p-p)\,('p-''p)\,\&c.} = 'NQ + 'Ndp \cdot \frac{dQ}{dp}$ or il eſt facile de voir par la formation de N, & $'N$, que $N = 'N + \frac{d'N}{dp}\,dp$ partant $'N = N - \frac{dN}{dp}\,dp$, donc

$$\frac{'N}{('p-''p)('p-'''p)\ \&c.} = dp\left(\frac{NQ}{dp} + \frac{NdQ}{dp} - \frac{QdN}{dp}\right), \ \&$$

$$\frac{'N\ \ 'p^{x-1}}{('p-''p)\,('p-'''p)\ \&c.} = dp\left(\frac{NQ}{dp} + \frac{NdQ}{dp} - \frac{QdN}{dp} + (x-1)\cdot\frac{NQ}{p}\right)\cdot p^{x-1}$$

partant à cauſe de

$p - {}'p = - dp$, & ${}'p - p = dp$, on aura

$$\frac{N \cdot p^{x-1}}{(p - {}'p)\,(p - {}''p)\ \&c.} + \frac{{}'N \cdot {}'p^{x-1}}{({}'p - p) \cdot ({}'p - {}''p) \cdot \&c.}$$

$$= p^{x-1}\left(\frac{N\,dQ}{dp} - \frac{Q\,dN}{dp} + NQ \cdot \frac{\overline{x-1}}{p}\right) = N^2 \cdot p^{x-2}$$

$\left(\overline{x-1} \cdot R + p\,\frac{dR}{dp}\right)$ · en ſuppoſant $R = \frac{Q}{N}$ ·

on aura donc

$$y^x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x \left\{ \begin{array}{l} N^2 \cdot p^{x-2}\left(\overline{x-1} \cdot R + \frac{pdR}{dp}\right) \\ + \frac{{}''N}{({}''p - p)^2 \cdot ({}''p - {}'''p)\ \&c.} \cdot {}''p^{x-1} \\ + \&c. \end{array} \right\} \quad (\tilde{\omega})$$

ſi de plus on avoit dans cette derniére formule $p = {}''p$, on y feroit encor ${}''p = p + dp$, & ainſi de ſuite il ſeroit ſuperflu de nous arrêter davantage à ces différents cas.

XXVIII.

Si l'on conſidére avec attention le procédé des art. précédents, on doit appercevoir qu'il nous donne le terme général des ſuites formées ſuivant cette équation

$$y^x = A \cdot \varphi^x \cdot y^{x-1} + {}'A \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x-1} \cdot y^{x-11} + {}''A \cdot \varphi^x\, \varphi^{x-1} \cdot \varphi^{x-11}\, y^{x-3} + \&c.$$

car le tout ſubſiſtant comme dans ces art. avec cette ſeule différence que l'on doit faire ici

$$N = \frac{{}^{n-1}M - nf \cdot {}^{n-2}M + \&c.}{\varphi' \cdot \varphi'' \ldots\ldots \varphi^n}$$

$${}'N = \frac{{}^{n-1}M - n'f \cdot {}^{n-2}M + \&c.}{\varphi' \cdot \varphi'' \ldots\ldots \varphi^n}$$

&c.

les formules $\tilde{\omega}$, & $\underset{\sim}{\omega}$ deviendront

$$y^x = \varphi \cdot \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{N}{(p-'p)\ (p-''p)\ \&c.} \cdot p^{x-1} \\ + \dfrac{'N}{('p-p)\ ('p-''p) \cdot \&c.} \cdot 'p^{x-1} \\ + \&c. \end{array} \right\} (\tilde{\omega})$$

$$y^x = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \left\{ \begin{array}{l} N^2 \cdot p^{x-2} \left(\overline{x-1} \cdot R + p \dfrac{dR}{dp} \right) \\ + \dfrac{''N}{(''p-p)^2 (''p-'''p) \cdot \&c.} \cdot ''p^{x-1} \\ + \&c. \end{array} \right\} (\underset{\sim}{\omega})$$

si $\varphi^x = 1$, les suites précédentes se changent en suites récurrentes, & l'on aura ainsi d'une manière très-directe, le terme général des suites récurrentes: de là resulte ce théoréme.

si l'on nomme T^x, le terme général d'une suite récurrente telle que

$$y^x = A \cdot y^{x-1} + 'A \cdot y^{x-11} + ''A\, y^{x-3} \ldots + {}^{n-1}A \cdot y^{x-n}$$

le terme général d'une suite telle que l'on ait

$$y^x = A\ \varphi^x \cdot y^{x-1} + 'A \cdot \varphi^x \cdot \varphi^{x-1}\, y^{x-11} \ldots\ldots + {}^{n-1}A \cdot \varphi^x \ldots\ldots\ldots \varphi^{x+1-n} \cdot y^{x-n}$$

& dans laquelle les n premiers termes qui sont arbitraires, soyent les mêmes que dans la précédente, sera

$$y^x = \varphi^{n+1} \cdot \varphi^{n+2} \ldots\ldots \varphi^x\, T^x.$$

c'est ce dont il est facile de s'assurer d'ailleurs; car si l'on substitue cette valeur de y^x, dans l'équation

$$y^x = A\, \varphi^x \cdot y^{x-1} \ldots\ldots + {}^{n-1}A \cdot \varphi^x \ldots \varphi^{x+1-n} \cdot y^{x-n}$$

on aura

$$\varphi^{n+1} \ldots\ldots \varphi^x\, T^x = A \cdot \varphi^{n+1} \ldots \varphi^x\, T^{x-1} \ldots\ldots + {}^{n-1}A \cdot \varphi^{n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi^x \cdot\cdot T^{x-n},$$

ou $T^x = A \cdot T^{x-1} \ldots\ldots + {}^{n-1}A\, T^{x-n}$

or cette dernière équation a lieu, puisque T^x, est le terme général de la suite récurrente formée par l'équation

$$y^x = A\, y^{x-1} \ldots\ldots + {}^{n-1}A\, y^{x-n}$$

XXIX.

Nous avons ſuppoſé juſque ici dans la formule (H) de l'art. XXII. $X^x = 0$ · & cela étoit indiſpenſable avant que de l'intégrer, en ſuppoſant X^x quelconque, nous allons préſentement examiner cette formule dans cette hypothéſe, or ſi dans l' équation

$$y^x = A \cdot \varphi^x \cdot y^{x-1} \ldots + {}^{n-1}A \cdot \varphi^x \ldots \varphi^{x-n+1}\, y^{x-n} + X^x,$$

ou ſuppoſe $X^x = 0$, on aura comme on l'a vû précédemment

$$y^x = \varphi' \cdot \varphi'' \;.\;.\;.\; \varphi^x \cdot (B\, p^x + {}'B\, {}'p^x \;.\;.\;. + {}^{n-1}B\; {}^{n-1}p^x)$$

d'où l'on formera par les art. XVIII. & ſuivants

$$u = \varphi' \cdot \varphi'' \;\;.\;\;.\;\;.\;\; \varphi^x\, p^x$$

$${}'u = \varphi' \cdot \varphi'' \;\;.\;\;.\;\;.\;\; \varphi^x\, {}'p^x$$

$$.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

$${}^{n-1}u = \varphi' \cdot \varphi'' \;\;.\;\;.\;\;.\;\; \varphi^x \cdot {}^{n-1}p^x$$

formons préſentement les expreſſions de ${}^{n-1}z$, ${}^{n-11}z$ &c. pour les ſubſtituer dans la formule (n) de l'art. XXI., on aura

$$\bar{u} = u\, \Delta\left(\frac{'u}{u}\right) = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \cdot p^x \cdot \Delta\left(\frac{'p^x}{p^x}\right)$$

$$= \varphi' \cdot \varphi'' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \varphi^x \cdot \left(\frac{'p - p}{p}\right) \cdot {}'p^x$$

$$\cdot\; \overline{'u} = \varphi' \cdot \varphi'' \;.\;.\;.\;.\; \varphi^x \cdot \left(\frac{''p - p}{p}\right) \cdot {}''p^x$$

$$\overline{''u} = \varphi' \cdot \varphi'' \;.\;.\;.\;.\; \varphi^x \cdot \left(\frac{'''p - p}{p}\right) \cdot {}'''p^x$$

&c.

partant

$$\bar{\bar{u}} = \bar{u}'\, \Delta\left(\frac{\overline{'u}}{\bar{u}}\right) = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \left(\frac{''p - p}{p}\right) \left(\frac{''p - 'p}{'p}\right) \cdot {}''p^x$$

$$\overline{\overline{'u}} = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots\ldots \varphi^x \cdot \left(\frac{'''p - p}{p}\right)\left(\frac{'''p - 'p}{'p}\right) \cdot '''p^x$$

&c.

$$\overline{\overline{\overline{u}}} = \overline{\overline{u}}\,\Delta\left(\frac{\overline{\overline{'u}}}{\overline{\overline{u}}}\right) = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \left(\frac{'''p - p}{p}\right)\left(\frac{'''p - 'p}{'p}\right)\left(\frac{'''p - ''p}{''p}\right)$$

&c.

& ainsi de suite, on aura donc

$$z = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \cdot p^x \cdot \left(\frac{p - 'p}{'p}\right)\left(\frac{p - ''p}{''p}\right)\left(\frac{p - '''p}{'''p}\right) \ldots \left(\frac{p - {}^{n-1}p}{{}^{n-1}p}\right)$$

$$'z = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots\ldots \varphi^{x+n-1}\, 'p^x \cdot \left(\frac{'p - p}{p}\right)\left(\frac{'p - ''p}{''p}\right) \text{ \&c.}$$

d'où l'on conclura en substituant ces valeurs dans la formule (n)

$$y^x = \frac{\varphi' \cdot \varphi'' \ldots\ldots \varphi^x \cdot p^x}{\left(\frac{p - 'p}{'p}\right)\left(\frac{p - ''p}{''p}\right) \cdot \text{\&c.}} \cdot \left(A \pm \Sigma \cdot \frac{X^x}{\varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \cdot p^x}\right)$$

$$+ \frac{\varphi' \cdot \varphi' \ldots\ldots \varphi^x \cdot 'p^x}{\left(\frac{'p - p}{p}\right)\left(\frac{'p - ''p}{''p}\right) \text{\&c.}} \cdot \left('A \pm \Sigma \cdot \frac{X^x}{\varphi' \cdot \varphi^x \ldots\ldots 'p^x}\right)$$

$+$ &c.

X X X.

Si $p = 'p$; on fera $'p = p + dp$. soit $N = \frac{''p \cdot '''p \ldots\ldots {}^{n-1}p}{(p - ''p)\,(p - '''p)\ \&c.}$ on aura donc

$$y^x = \frac{-N'}{dp} \cdot p\,\varphi'\,\varphi'' \ldots \varphi^x \cdot p^x \cdot \left(A \pm \Sigma \frac{X^x}{\varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x\, p^x}\right)$$

$$+ \left(\frac{Np}{dp} + \frac{p\,dN}{dp}\right) \cdot \varphi' \cdot \varphi'' \ldots\ldots \varphi^x\,(p + dp)^x \cdot$$

$$\left('A \pm \Sigma \frac{X^x}{\varphi' \ldots\ldots \varphi^x\,(p + dp)}\right)$$

$+$ &c.

ce qui donne toutes réductions faites

$$y^x = \varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \, p^x \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{N^x + p dN}{dp} \right) \cdot \left('A + \Sigma \frac{X^x}{\varphi' \, \varphi'' \ldots \varphi^x \, p^x} \right) \\ - N \left(A \pm \Sigma \cdot \frac{\cdot \, X^x \cdot (x+1)}{\varphi' \cdot \varphi'' \ldots \varphi^x \cdot p^x} \right) \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

si de plus on a $p = {}''p$, on fera dans cette dernière expression $''p = p + dp$, & ainsi de suite ; il suffit de supposer $\varphi^x = 1$, pour avoir le terme général des suites récurrentes.

X X X I.

Nous allons présentement examiner quelques autres cas, dans lesquels l'équation proposée (B) est intégrable. Mais nous supposons qu'elle ne monte qu'au second ordre. L'équation (E) devient alors $0 = 1 \frac{-H^x}{\omega^x} + \frac{'H^x}{\omega^x \cdot \omega^{x+1}}$ dont il suffit de trouver une intégrale particulière ; toutes fois donc que l'on aura $H^x = \omega^x + \frac{'H^x}{\omega^{x+1}}$, l'équation $X^x = y^x + H^x y^{x+1} + 'H^x y^{x+2}$ sera intégrable.

L'équation $X^x = y^x + \left(\omega^x + \frac{'H^x}{\omega^{x+1}}\right) y^{x+1} + 'H^x y^{x+11}$, est intégrable ω^x, & $'H^x$, étant des fonctions quelconques de x ·

si ω^x, est constant, & égal $a \cdot m$ ·, l'équation $X^x = y^x + \left(m + \frac{'H^x}{m}\right) y^{x+1} + 'H \cdot y^{x+11}$ sera intégrable. Le cas des suites récurrentes est compris dans celui-ci ; car si l'on veut intégrer $X^x = y^x + A \cdot y^{x+1} + 'A \cdot y^{x+11}$, on fera $'H^x = 'A$

$$m + \frac{'H^x}{m} = 'A \cdot$$

ce qui donne deux valeurs pour m, & par conséquent pour · ω^x · en donnant à ω^x d'autres valeurs, on aura d'autres équations intégrable, on voit que cette méthode s'étend pareillement aux équations différentielles de tous les ordres, mais il seroit inutile d'entrer dans un plus grand détail à cet égard.

XXXII.

Je ne quitterai point cette matière sans indiquer un usage remarquable du calcul intégral aux différences finies dans la formation des suites: quelques exemples le feront mieux connoître que tout ce que l'on pourroit dire. Soit x le *sinus* d'un angle z, & y son *cosinus*, on a généralement

$$\text{sin. } n z = y \cdot \text{sin. } (n-1) z - \text{sin. } (n-2) z \cdot \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \text{sin. } z &= x \\ \text{sin. } 2 z &= 2 x y \\ \text{sin. } 3 z &= 4 x y^2 - x \\ \text{sin. } 4 z &= 8 x y^3 - 4 x y \\ \text{sin. } 5 z &= 16 x y^4 - 8 x y^2 + x \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

il est facile de trouver, cela posé, l'expression générale de sin. $n z$; il est aisé de remarquer. 1° que les expressions précédentes sont le produit de x par une fonction rationelle, & entière de y, 2° que dans cette fonction le plus haut exposant de y, est moindre d'une unité que le nombre qui multiplie l'angle · z · 3° que les exposants de y, diminuent suivant une progression arytmétique, dont · 2 · est la différence, & que ces exposants sont toujours positifs, il est facile de voir que cela doit avoir lieu pour le *sinus* d'un multiple quelconque de · z; l'expression de sin. $n z$, aura donc la forme suivante

$$\text{sin. } n z = x \left(A \cdot y^{n-1} + B \cdot y^{n-3} + C \cdot y^{n-5} + D \cdot y^{n-7} + \text{\&c.}\right)$$

il faut présentement déterminer les coefficients, A, B, C, D, &c. on a

$\text{sin.}\ \overline{n-1}\cdot z = x\ (A_{,}\ y^{n-2} + B_{,}\ y^{n-4} + C_{,}\ y^{n-6}$ $+ D_{,}\ y^{n-8} + \&c.)$ & · $\text{sin.}\ \overline{n+1}\cdot z = x\ (A'\cdot y^{n} + B'\cdot y^{n-2} + C'\cdot y^{n-4} + D'\cdot y^{n-6} + \&c.)$

$$= 2y\cdot \text{sin.}\ nz - \text{sin.}\ \overline{n-1}\cdot z = x \left\{ \begin{array}{l} 2A\cdot y^{n} + 2B\cdot y^{n-2} + 2C\cdot y^{n-4} \\ + 2D\cdot y^{n-6} + \&c. - A_{,}\ y^{n-2} - B_{,}\cdot y^{n-4} \\ \qquad - C_{,}\cdot y^{n-6} + \&c. \end{array} \right\}$$

on aura donc en comparant.

1° $A' = 2A$ · donc par le probléme · 11 ·, $A = 2^{n}\cdot H\cdot$, (H, étant une constante), or n étant, 1, $A = 1$, donc $H = \frac{1}{2}$, partant · $A = 2^{n-1}$

2° $B' = 2B - A$, ou $B' = 2B - 2^{n-2}$, d'où l'on aura en intégrant, $B = 2^{n-1}\ \Sigma\cdot \frac{-2^{n-1}}{2^{n}} = -2^{n-3}\ \Sigma\cdot 1\cdot = -2^{n-3}\ (n + H)$; comme y ne peut avoir d'exposant négatif, dans l'expression de sin. nz, il faut que B, soit zero, lorsque $n = 2$ · partant $B = -2^{n-3}\ (n-2)$.

3° $C' = 2c - B, = 2c + 2^{n-4}\cdot(n-3)\cdot$ donc $\cdot C = 2^{n-5} \left(\frac{nn-7n}{2} + H\right)\cdot$

on déterminera H par cette condition que C soit zero, lorsque $n = 4$ · donc $H = 6$ · partant

$$C = 2^{n-5} : \frac{\overline{n-3}\cdot\overline{n-4}}{1\cdot 2}$$

4° · $D' = 2D - C_{,}$ · d'où l'on conclura facilement

$$D = -\frac{2^{n-7}\cdot\overline{n-4}\cdot\overline{n-5}\cdot\overline{n-6}}{1\cdot 2\cdot 3}\ \&c.$$

$$\text{donc} \cdot \text{ſin.}\, n\, z = x \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1} \cdot y^{n-1} - \frac{n-2}{1} \cdot 2^{n-3}\, y^{n-3} \\ + \frac{\overline{n-3} \cdot \overline{n-4}}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-5}\, y^{n-5} \\ - \frac{\overline{n-4} \cdot \overline{n-5} \cdot \overline{n-6}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-7}\, y^{n-7} + \&c. \end{array} \right\}$$

ſoit encore $\cdot\, z =$ ang. ſin. x $\cdot$ en différentiant, on aura $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$ préſentement on veut avoir l'expreſſion générale de $\frac{d^n z}{dx^n}$; dx étant ſuppoſé conſtant.

Soit $y = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^2+1}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6x^3+9^x}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x^4+72x^2+9}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

pour peu que l'on conſidére avec attention ces expreſſions de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ &c. il eſt aiſé d'appercevoir que l'expreſſion générale de $\cdot \frac{d^n y}{dx^n} \cdot$ doit avoir la forme ſuivante

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{Ax^n + B \cdot x^{n-2} + Cx^{n-4} + D \cdot x^{n-6} + F \cdot x^{n-8} + \&c.}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}$$

partant

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{A' \cdot x^{n+1} + B' \cdot x^{n-1} + C' \cdot x^{n-3} + D' \cdot x^{n-5} + F' \cdot x^{n-7} + \&c.}{(1-xx)^{n+\frac{3}{2}}}$$

en différentiant $\frac{d^n y}{dx^n}$ on aura

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{\begin{matrix} (2n+1)\,A \cdot x^{n+1} & + (2n+1)\,B \cdot x^{n-1} & \\ & + (2n+1)\,C \cdot x^{n-3} & + \&c. \\ - nA & + nA & + (n-2)\,B \\ & - (n-2)\,B & - (n-4)\,C \end{matrix}}{(1-xx)^{n+\frac{3}{2}}}$$

on aura en comparant ces deux expressions de, $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$, & intégrant convenablement les valeurs de A, B, C, D &c. & l'on trouvera après avoir fait le calcul comme précédemment

$$d^{n-1} y \cdot dx = d^n \cdot \text{ang. sin. } x \cdot = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overline{n-1} \cdot dx^n \cdot}{(1-xx)^{n-\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} x^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-3} \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3} \cdot \overline{n-4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-5} \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-6}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6} \cdot x^{n-7} \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

cette méthode, comme l'on voit, eſt celle des indéterminées, avec cette différence que les coëficiens indéterminés au lieu d'être conſtants, ſont ici variables, & donnés par autant d'équation aux différences finies.

XXXIII.

Application de la méthode précédente aux différences partielles.

Pour intégrer l'équation aux différences partielles $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,dy}{dt}$ · on obſervera que $\frac{dy}{dx}\,dx + \frac{dy}{dt}\,dt = dy$, d'où il eſt facile de conclure, $dy = \frac{dy}{dt}\,(dt + a\,dx)$ partant $y = \varphi\,(t + a\,x)$ · φ, ſervant à deſigner une fonction quelconque · cela poſé.

PROBLÉME II.

On propoſe d' intégrer l'équation différentielle

$$X = \frac{d^n y}{dx^n} + a' \cdot \frac{d^n y}{d x^{n-1} \cdot dt} + a'' \cdot \frac{d^n y}{d x^{n-2}\, d t^n} \ldots + \frac{a^n \cdot d^n y}{d t^n}\ (A)$$

a', a'' &c., étant des conſtantes quelconques, & X, une fonction quelconque de · x ··

Solution.

Soit $y = z + u$, z, étant une fonction de x ſeule ; l'équation (A) donne

$$X = \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{d^n u}{dx^n} + a' \cdot \frac{d^n u}{dx^{n-1} \cdot dt} + \text{\&c.}$$

je fais $X = \frac{d^n z}{d x^n}$ · partant, on aura

$$o = \frac{d^n u}{d x^n} + a' \cdot \frac{d^n u}{d x^{n-1} \cdot d t} + a'' \cdot \frac{d^n u}{d x^{n-2}\, d t^2} + \&c. \quad (A')$$

ſoit, $\frac{d u}{d x} = \omega \frac{d u}{d t}$, ω étant conſtant. Si l'on différentie cette équation en faiſant varier 1°, x, 2° t, on aura les deux ſuivantes

$$\frac{d d u}{d x^2} = \omega \frac{d d u}{d x\, d t}$$

$$\frac{d d u}{d x\, d t} = \omega \frac{d d u}{d t^2}$$

ſi l'on différentie pareillement ces deux équations en faiſant varier 1° x, 2° t, on aura les trois ſuivantes

$$\frac{d^3 u}{d x^3} = \omega \frac{d^3 u}{d x^2\, d t}$$

$$\frac{d^3 u}{d x^2\, d t} = \omega \frac{d^3 u}{d x\, d t^2}$$

$$\frac{d^3 u}{d x\, d t^2} = \omega \cdot \frac{d^3 u}{d t^3}$$

en différentiant ainſi ſucceſſivement, on trouvera

$$\frac{d^n u}{d x^n} = \omega \cdot \frac{d^n u}{d x^{n-1}\, d t}$$

$$\frac{d^n u}{d x^{n-1}\, d t} = \omega \cdot \frac{d^n u}{d x^{n-2}\, d t^2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^n u}{d x \cdot d t^{n-1}} = \omega \cdot \frac{d^n u}{d t^n}$$

ſi l'on multiplie la ſeconde de ces équations par ω', la troiſième par ω'', la quatrième par ω''' &c., & qu'on les ajoute enſemble avec la première, on aura

$$o = \frac{d^n u}{d x^n} + (\omega' - \omega) \cdot \frac{d^n u}{d x^{n-1}\, d t} + (\omega'' - \omega\, \omega') \cdot \frac{d^n u}{d x^{n-2}\, d t^2}$$

$$\ldots + (\omega^{n-1} - \omega\, \omega^{n-2}) \cdot \frac{d^n u}{d x \cdot d t^{n-1}} - \omega\, \omega^{n-1} \cdot \frac{d^n u}{d t^n}$$

en comparant cette équation avec l'équation (A'), on formera les ſuivantes

$$\omega' - \omega = a'$$
$$\omega'' - \omega\,\omega' = a''$$
$$\omega''' - \omega\,\omega'' = a'''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega^{n-1} - \omega\,\omega^{n-\mathrm{I}} = a^{n-1}$$
$$- \omega\,\omega^{n-\mathrm{I}} = a^{n}$$

d'où l'on conclura,

$$\omega' = a' - \omega$$
$$\omega'' = a'' - a'\omega + \omega^2$$
$$\omega''' = a''' - a''\omega + a'\omega^2 + \omega^3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega^{n-\mathrm{I}} = a^{n-\mathrm{I}} + a^{n-\mathrm{II}}\,\omega + a^{n-\mathrm{III}}\,\omega^2 \ldots + \omega^{n-1}$$

partant, on aura

$$0 = \omega^n + a' \cdot \omega^{n-\mathrm{I}} + \omega'' \cdot \omega^{n-2} \ldots + a^n$$

ſoient p, p', p'' les valeurs de ω, dans cette équation, on aura donc les équations ſuivantes,

$$\frac{du}{dx} = p \cdot \frac{du}{dt}$$
$$\frac{du}{dx} = p' \frac{du}{dt}$$
&c.

partant l'intégrale complette de l'équation (A') ſera

$$u = \varphi\,(t + p\,x) + \varphi'\,(t + p'\,x) + \varphi''\,(t + p''\,x) \ldots + \varphi^{n-\mathrm{I}}\,(t + p^{n-\mathrm{I}}\,x)$$

je dois obſerver que M. D'Alembert a intégré cette même équation d'une manière très-élegante, dans le quatrième volume de ſes opuſcules : auſſi ne l'ais-je intégrée ici que pour faire voir comment ma méthode s'applique au calcul des différences partielles.

Voici présentement plusieurs théorémes sur le calcul intégral, qui n'ont point encore été, que je sache, remarqués par aucun géométre, & qui m'ont paru être de quelque utilité dans l'analyse infinitésimale.

Soit $M\,d\,x = 0$ une équation différentielle de l'ordre n, M étant une fonction finie, & homogéne de x, y, & de leurs différences premières, secondes . . . & n.^{mes}. Je suppose d'ailleurs cette fonction telle que l'on y puisse faire à volonté, $d\,x$, ou, $d\,y$, constant, ou variable. Soit maintenant, $d\,y = p\,d\,x$, $d\,p = q\,d\,x$, $d\,q = r\,d\,x$, $d\,r = s\,d\,x$ &c. M. Euler a fait voir dans ses institutions de calcul différentiel, que, M, sera dans ce cas une fonction de x, y, p, q, r, s, &c. or il est clair que, p, est de dimension nulle; q, de la dimension, -1, r, de la dimension -2 &c. puisque donc, M, est une fonction homogéne, en nommant, h, sa dimension, on aura

$$M = x^h \cdot \text{fonct.}\left(\frac{y}{x},\, p,\, q\,x,\, r\,x^2,\, s\,x^3 \text{ \&c.}\right) \cdot \text{ partant}$$

$$0 = \text{fonct.}\left(\frac{y}{x},\, p,\, q\,x,\, r\,x^2,\, s\,x^3 \text{ \&c.}\right) \quad (A)$$

je fais présentement, $\frac{y}{x} = u$, & $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t}$, ce qui donne $\frac{dy}{dx} = u + t = p$: ensuite, $q = \frac{d(u+t)}{dx}$, & $q\,x = \frac{x}{dx} \cdot d(u+t) = \frac{t \cdot d(u+t)}{du}$ · différentiant, on aura, $\frac{dq}{dx}$

$$= \frac{d\left(\frac{t\cdot d(u+t)}{du}\right)}{x\,dx} - \frac{q}{x} = r \text{ partant } r\,x^2 = \frac{t\cdot d\left(\frac{t\,[d\,(u+t)]}{du}\right)}{du}$$

$= \frac{t \cdot d(u+t)}{du}$ · je nomme cette quantité · γ · pour abréger · différentiant de nouveau l'équation précédente, on aura $\frac{dr}{dx} = s = \frac{d\gamma}{x^2 dx} - \frac{2r}{x}$ · partant, $s x^3 = d\gamma \cdot \frac{x}{dx} - 2 r x^2 = \frac{d\gamma \cdot t}{du} - 2\gamma$, & ainſi deſuite · cela poſé ſubſtituant au lieu de, $\frac{y}{x}$, p, $q x$, $r x^2$ &c. ces valeurs dans l'équation (A) elle deviendra

$$0 = \text{fonct.} \left\{ u,\ u+t,\ t \cdot \frac{d(u+t)}{du},\ \frac{t \cdot d\left(\frac{t \cdot d(u+t)}{du}\right)}{du},\ \frac{t \cdot d\left(\frac{t \cdot d\left(\frac{t \cdot d(u+t)}{du}\right)}{du}\right)}{du}\ \&c. \right\} \quad (B)$$

laquelle équation ne renferme plus que des différences de l'ordre · $n-1$ ·

On peut donc ainſi abaiſſer une équation homogéne de l'ordre, n, à une autre de l'ordre · $n-1$ ·

Il peut arriver que l'équation abaiſſée à une autre d'un ordre inférieur reſte encore homogéne, en ce cas on la traitera de nouveau, comme la précédente.

Pour en donner un exemple, ſoit

$$0 = dx \left(y + A^x \frac{dy}{dx} + A' \cdot x^x \frac{ddy}{dx^2} \right),$$ dx étant conſtant elle ſe changera dans la ſuivante

$$0 = y + A p + A' q^x,$$ d'où l'on conclura

$$0 = u + A(u+t) + A' \cdot \frac{t \cdot d(u+t)}{du}$$

équation homogéne, & du premier dégré.

Généralement l'équation homogéne $M\,dx = 0$, abbaiſſée à une autre d'un ordre inférieur reſtera encore homogéne, ſi M eſt homogéne par raport à, x, & à ſes différences, & qu'elle le ſoit de plus par raport à, y, & ſes différences. Car il eſt viſible que dans cette ſuppoſition l'équation (B) eſt homogéne.

Si dans l'équation, $M\,dx = 0$, la dimenſion de x, & de ſes différences, moins la dimenſion de y, & de ſes différences fait pour chaque terme une quantité conſtante, on rendra cette équation homogéne en faiſant $x = \frac{1}{z}$.

Soit come précédemment l'équation, $M\,dx = 0$, de l'ordre, n, M, étant une fonction finie, & homogéne de x, y, & de leur différence premières, ſecondes.... & n.^{mes}, dans laquelle on puiſſe faire à volonté, dx, ou dy, conſtant, ou variable. Je ſuppoſe de plus que cette fonction ſoit homogéne par raport à y, & à ſes différences, enſorte que pour chaque terme le nombre des dimenſions de cette variable, & de ſes différences, ſoit le même; je le nomme $\cdot\, h \,\cdot$ cela poſé. Soit, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$ &c. M, ſera fonction de x, y, p, q, r, s &c., & p, q, r, s &c. ſeront de la dimenſion $\cdot\, 1 \,\cdot$ par raport à $\cdot\, y$: je fais, $\frac{dy}{dx} = ty = p$, donc $\frac{dy}{y} = t\,dx$ $\cdot$ enſuite $\frac{dp}{dx} = q = y\,\frac{dt}{dx} + \frac{t\,dy}{dx} = y\left(\frac{dt}{dx} + t^2\right)$; donc, $\frac{dq}{dx} = y \cdot \frac{d\left(\frac{dt}{dx} + t^2\right)}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dt}{dx} + t^2\right)$

$$= y \left\{ \frac{d\left(\frac{dt}{dx} + t^2\right)}{dx} + t \cdot \left(\frac{dt}{dx} + t^2\right) \right\} = r, \text{ \&c.}$$

& en ſubſtituant au lieu de p, q, r, &c. ces valeurs dans M, on aura

$$M = y^h \cdot \text{fonct.} \left\{ x,\ t,\ \frac{dt}{dx},\ \frac{d \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)}{dx},\ \frac{d \cdot \left\{ \frac{d\left(\frac{dt}{dx}\right)}{dx} \right\}}{dx} \text{ \&c.} \right\}$$

partant

$$o = \text{fonct.} \left\{ x,\ t,\ \frac{dt}{dx},\ \frac{d \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)}{dx} \text{ \&c.} \right\}$$

équation qui ne renferme plus que des différences de l'ordre $n - 1$.

ERRATA

Pour les Mémoires de Monſieur MONNET.

Page	ligne			
51	2	(pour la nature)	*liſez*	(c'eſt-à-dire quartzeux).
53	14, 18, 23	*cœgulum*		*coagulum*
ibid.	dernière	matture		matière
54	2	*cœgulum*		*coagulum*
ibid.	5	arrêté		pouſſé
ibid.	15, 16	à leurs		aux
55	6	&		qui
ibid.	7	faiſant		faiſoit
ibid.	9	a		eſt
ibid.	17	agloméſant		aglomérant

ERRATA CORRIGE

In ſpecimine Thermarum Vinadienſium.

JOANNIS ANTONII MARINI.

p. 82 §. 3	l. 11	conſtat meridie.	*lege :*	conſtat. Meridie
	12	aſcendit haec ſubdio		aſcendit. Haec ſub dio
85	13	rivularumque		rivulorumque
	16	ſuſtinet		ſuſtinent
	25	acuta		aucta
86	14	vitri		vini
88	11	ſalſo-nuvriatica		ſalſo-muriatica
	2 (12)	diſperiatur		diſpertiatur
	1 (13)	ſyrapi		ſyrupi
	5	M. Creumanno		M. Neumanno
89	21	ſalſo-acerbiſſimo		ſalſo-acerbiſſimi

ERRATA

Pour la Mémoire de Monsieur de la GRANGE

Sur la solution d'un Problême d'Arithmétique.

Page	ligne	
47	14	ajoutés $- y^2 x' 2$
48	11	$R = x^2$ & $- a y^2$ *lisez* $R = x^2 - a y^2$ &
49	2	$\pm a q p'$ *lisez* $\pm q p'$
55	17	divisible 2 *lisez* divisible par 2
58	14	après la quantité $(2 u y)^2$ *mettez* une virgule
65	6 & 7	au lieu de 49 & 69 *lisez* 4q & 6q
ibid.	10	au lieu de $m(m' - 4)$ &c. *lisez* $m(m^2 - 4$ &c.
ibid.	26	au lieu de $p'^2 - q^2$ *lisez* $q'^2 - q^2$
66	16	on aura $\frac{p-q}{q}$ *lisez* $\frac{p-1}{q}$
68	14	$p^2 = a q^2 = p'$, & *lisez* $p'' = p^2 + a q^2 = p'$ &
70	3	(*Art.* 1) $\frac{1}{Nm}$ *lisez* $\frac{1}{Nn}$
71	2	$R = m > 1$ *lisez* $R =$ ou > 1
72	13	à cause de $x^2 - ay^2 = 1 \frac{1}{y^2}$ &c *lisez* $x^2 - ay^2 = 1$; $\frac{1}{y^2}$
74	2 & 4	au lieu de $(q'' - z)$ &c., & de & q'' *lisez* $(q''' - z)$ &, & q'''
86	22	au lieu de $2 =$ &c. *lisez* $x =$ &c.
95	3	au lieu de $(p + q\sqrt{a})^m$ *lisez* $(p - q\sqrt{a})^m$
104	16	au lieu de $\beta + \gamma y$ *lisez* $\beta + 2\gamma y$
107	1	au lieu de P *lisez* p
ibid.	5	au lieu de pq *lisez* Pq
ibid.	ib.	au lieu de T, dp *lisez* T, dP
108	9	avant la méthode *mettez* 12
109	16	par $2dP$ *lisez* par $2dp$

Page	ligne	
110	24	au lieu de l'équation (E) *lisez* (D)
114	10	$(\int Q\, d q\, X \phi \cdot p$ &c.) *lisez* $(\int Q\, d q \times \phi \cdot$ &c.)
ibid.	21	$(5p^4+10p^2q^2)\, q$ &c. *lisez* $(5p4+10p^2q^2+q^4)q$ &c.
ibid.	24	$Q(\int A\, d q\, X \phi \cdot$ &c.) *lisez* $Q(\int Q\, dq \times \phi \cdot$ &c.)
115	2	$\beta - \gamma p$ &c. *lisez* $\beta + \gamma p$ &c.
ibid.	19, 22, 25, 26	au lieu de X *mettez* $\times$
116	1	au lieu de X $\times$
120	6	$\frac{d^2 y}{d y^2}$ *lisez* $\frac{d^2 y}{d y}$
121	1	$d \frac{Y}{T^2}$ *lisez* $d \frac{X}{T^2}$
122		a la fin au lieu de 21 *mettez* §. 20
ibid.		lig. dernière & $Z = \int P\, d x$ &c. *lisez* $z = \int P\, d x$ &c.

Pl. I.

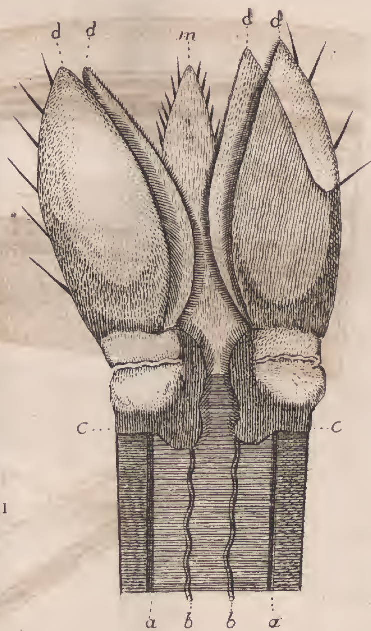


Fig. III

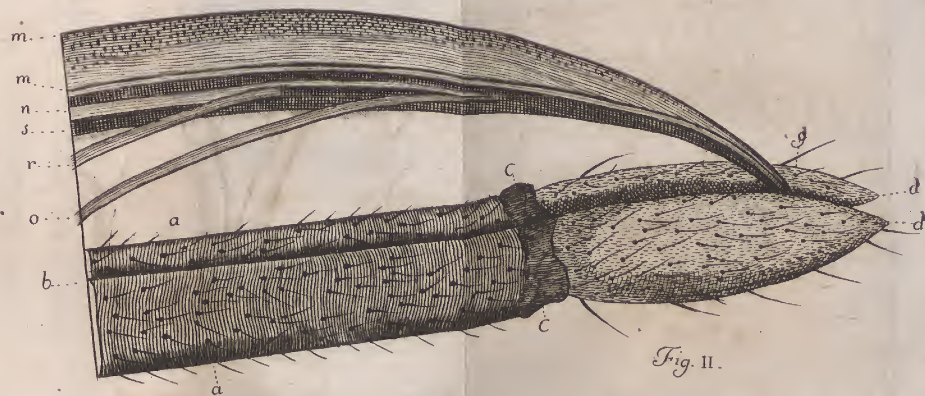


Fig. II.

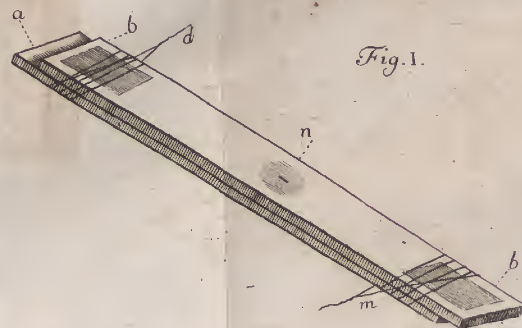
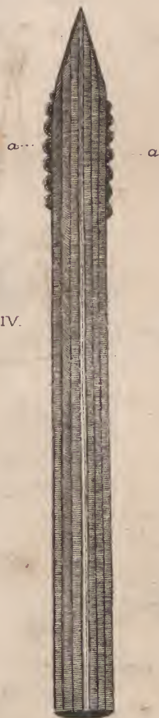
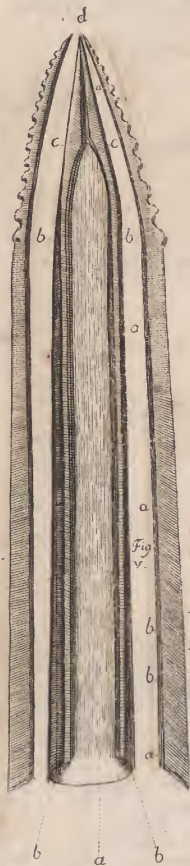
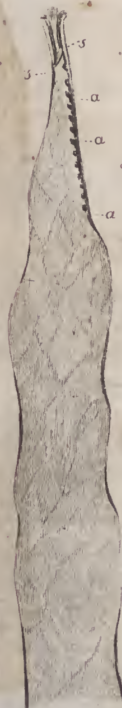


Fig. I.

Pl.II.


a
a
Fig. IV.


d
c
c
b
b
a
a
Fig VII.
Fig V.
Fig. VI.
b
b
b
b
b
b
a
b
b
a
b

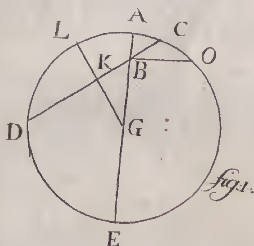

s
s
a
a
a
Fig. IX.

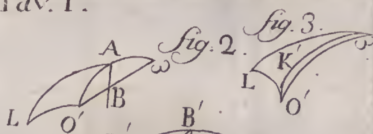

m
d
Fig. VIII.
c
b
b
b a b

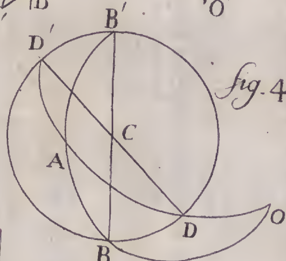

Fig. X.

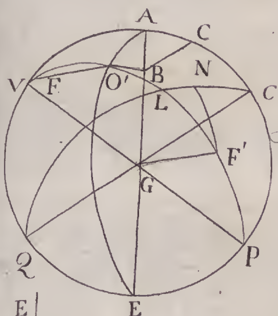


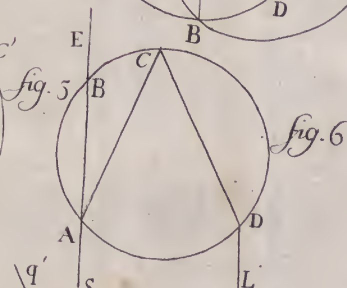
Tav. I.

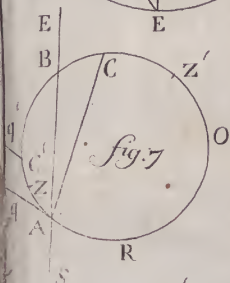

A
C
L
K
B
O
D
G
E
fig.1.

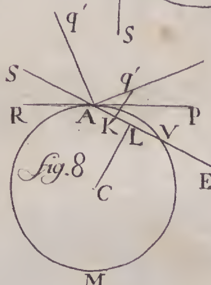

A
fig.2.
ω
B
L
O'
fig.3.
K'
L
O'
B

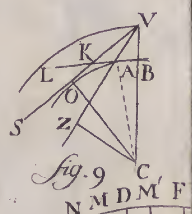

B'
D'
fig.4
C
A
D
O
B

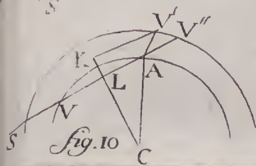

A
C
V
F
O'
B
N
C'
L
fig.5
F'
G
Q
P
E

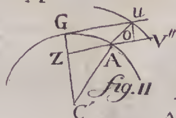

E
B
C
fig.6
A
D
S
L

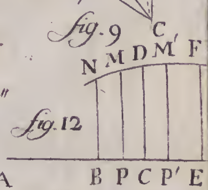

E
B
C
Z'
q
O
C'
fig.7
Z
q
A
R
S


q'
S
q'
R
A
K
L
V
P
fig.8
C
E
M


V
K
L
A
B
O
S
Z
C
fig.9

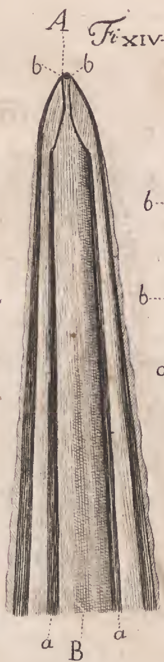

V'
V''
K
L
A
N
S
fig.10
C

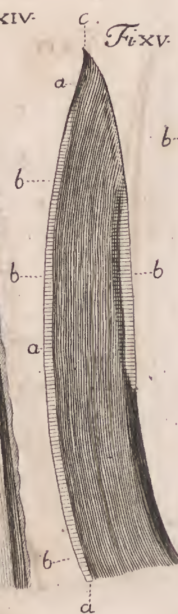

G
u
o
V''
Z
A
fig.11
C'

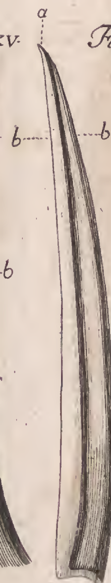

N
M
D
M'
F
fig.12
A
B
P
C
P'
E

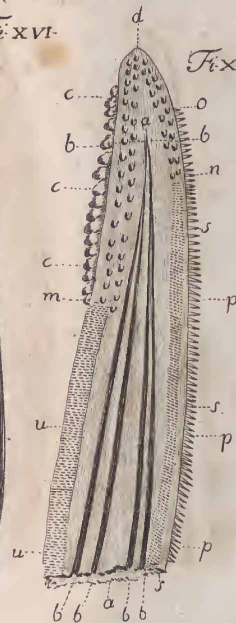


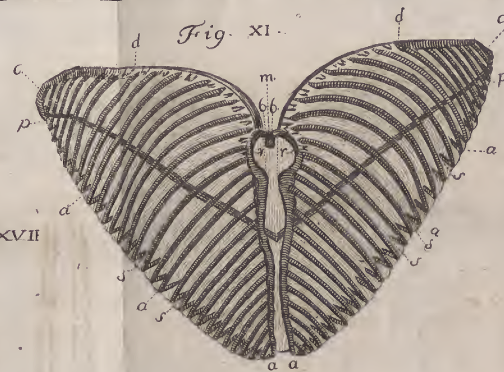

Fi·XIII·

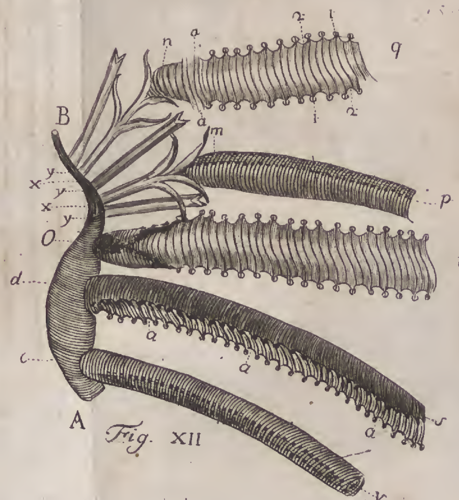

Fi·XIV·


Fi·XV·


Fi·XVI·


Fi·XVII


Fig· XI·


Fig· XII

1 6 1 1

